



DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA Y DEL COSMOS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA

INSTITUTO DE ASTROFÍSICA DE ANDALUCÍA  
CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

# VARIACIÓN DE LOS OBSERVABLES NO ADIABÁTICOS EN EL DIAGRAMA HR Y ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DE LA ROTACIÓN

Directores de Tesis:

Dr. D. **Rafael Garrido Haba**

Investigador Científico del CSIC

Dr. D. **Andrés Moya Bedón**

Becario Post-Doctoral del MEC – Observatoire de Paris,  
LESIA, Meudon

Dr. D. **Juan Carlos Suárez Yanes**

Investigador Contratado del CSIC

Tutor:

Dra. D<sup>a</sup>. **Inmaculada Domínguez Aguilera**

Profesor contratado doctor del Departamento de  
Física Teórica y del Cosmos de la Universidad de Granada

**Memoria presentada para optar al grado de  
DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICAS**

Ricardo Casas del Castillo



# Agradecimientos

Quiero mostrar mi agradecimiento a todos aquellos que han hecho posible este trabajo de Tesis. En primer lugar a mis directores: Rafa, Juan Carlos y Andy. Reconozco todo el esfuerzo que habéis tenido que realizar, en algunas ocasiones, en circunstancias difíciles, a distancia, con muchísimo trabajo aparte de las miles de correcciones y más revisiones .... En fin, gracias a los tres, muchas gracias.

También a todo el departamento de Física Estelar. Sois todos personas excepcionales. Es difícil encontrar a tanta gente tan estupenda reunida en un espacio tan pequeño. Todos me habéis ayudado y apoyado en los momentos más difíciles.

Cómo no, a mis padres y mi hermana, una familia que me ha dado todo lo que tenían. Sin ellos no podría haber llegado hasta aquí.

A mi Comunidad de la Parroquia de las Angustias. Tantos hermanos que han rezado por mí, que me han apoyado, que me han aguantado. Sin ellos no estaría donde estoy como persona, ni este trabajo hubiera visto la luz.

A mi familia, mi mujer, que es una santa, aparte de mi musa. Gracias por tu paciencia, pues sabes que sin tí no estaría aquí, donde estoy. Y a mi hija, Rocío, que ha dado sentido a tanto sufrimiento. Por ella lo he aguantado todo. Y a Ricardo, que está en el cielo. Sé que has rezado por mí. Y al que viene. No sé cómo serás, pero ya me has dado fuerzas, y estoy deseando verte.

Por último, a Dios, que me ha amado siempre, me ha cuidado y ha sido un Padre para mí. Y a Jesucristo, por haberme perdonado mis pecados, haber dado su vida y su sangre por mí. Y al Espíritu Santo, que me ha dado discernimiento y me ha guiado y librado tantísimas veces (y las que quedan). Sin la Santísima Trinidad, ¿dónde estaría yo?

En fin, gracias a todos los que me habéis hecho algún bien en algún momento de mi vida.

Por último, decir que dedico este trabajo a mi mujer y a nuestros tres hijos (uno de ellos ya en el cielo, con el Señor).



“Si contemplo el cielo, obra de tus dedos,  
la luna y las estrellas que has creado,  
¿qué es el hombre para que te acuerdes de él,  
el hijo del hombre, para darle poder?”

Sal. 8, 4-5

“Hizo Dios los dos luceros mayores; el lucero grande para el dominio del día,  
y el lucero pequeño para el dominio de la noche, y las estrellas;  
y púsolos Dios en el firmamento celeste para alumbrar sobre la tierra,  
y para dominar en el día y en la noche, y para apartar la luz de la oscuridad;  
y vio Dios que estaba bien. Y amaneció y atardeció: día cuarto.”

Gen. 1, 16-19

“Él cuenta el número de estrellas,  
y llama a cada una por su nombre.”

Sal. 147, 4

Variación de los observables no adiabáticos en el  
diagrama HR y estudio de la influencia de la  
rotación

Ricardo Casas del Castillo

13 de marzo de 2006



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>22</b>
1.1. Breve historia de la astrosismología . . . . .	22
1.2. La astrosismología en la actualidad . . . . .	24
1.2.1. Breves apuntes sobre heliosismología . . . . .	25
1.2.2. Resultados en otras estrellas . . . . .	26
1.3. Las $\delta$ Scuti . . . . .	28
1.3.1. Características de las $\delta$ Scuti . . . . .	28
1.3.2. Historia . . . . .	30
1.3.3. Resultados estadísticos . . . . .	31
1.3.4. Mecanismo de excitación . . . . .	32
1.3.5. Modos de oscilación . . . . .	32
1.3.6. Rotación . . . . .	36
1.4. Objetivos y metodología . . . . .	37
<b>2. Modelos de Estructura Estelar</b>	<b>40</b>
2.1. Escalas de tiempo . . . . .	41
2.2. Ecuaciones de la Hidrodinámica . . . . .	42
2.2.1. Ecuación de continuidad . . . . .	43
2.2.2. Ecuación de movimiento . . . . .	43
2.2.3. Ecuación de Poisson . . . . .	44
2.2.4. Ecuación de la energía . . . . .	44
2.2.5. Otras ecuaciones . . . . .	46
2.3. Atmósfera estelar . . . . .	46
2.4. Convección . . . . .	48
2.4.1. Inestabilidad convectiva. Criterio de Schwarzschild . . . . .	48
2.4.2. Teoría de la Longitud de Mezcla . . . . .	51
2.4.3. Teoría de Canuto-Goldmann-Mazzitelli . . . . .	55
2.5. Rotación . . . . .	57
2.5.1. Rotación uniforme . . . . .	58
2.5.2. Rotación diferencial . . . . .	59
<b>3. Oscilaciones Adiabáticas</b>	<b>62</b>
3.1. Estado de equilibrio estelar . . . . .	62
3.2. Ecuaciones de oscilación . . . . .	63
3.2.1. Análisis perturbativo . . . . .	64
3.2.2. Ecuaciones de oscilación en las direcciones radial y angular . . . . .	68
3.3. Aproximación adiabática . . . . .	69
3.3.1. Oscilaciones adiabáticas . . . . .	69

3.3.2.	Condiciones de contorno . . . . .	70
3.3.3.	Oscilaciones radiales adiabáticas . . . . .	71
3.3.4.	Propiedades generales de las autofrecuencias y autofunciones . . . . .	71
3.3.5.	Tratamiento numérico de las ecuaciones . . . . .	73
3.4.	Naturaleza física de los modos de oscilación . . . . .	76
3.4.1.	La aproximación de Cowling . . . . .	76
3.4.2.	Modos “ <i>atrapados</i> ” . . . . .	77
3.4.3.	Modos <b>p</b> . . . . .	81
3.4.4.	Modos <b>g</b> . . . . .	83
3.4.5.	Modos mixtos . . . . .	84
3.4.6.	Algunos resultados numéricos . . . . .	86
<b>4.</b>	<b>Oscilaciones no adiabáticas</b>	<b>92</b>
4.1.	Ecuaciones de oscilación no adiabáticas . . . . .	93
4.2.	Condiciones de contorno del sistema de ecuaciones . . . . .	96
4.3.	Formulación adimensional de las ecuaciones no adiabáticas internas . . . . .	98
4.3.1.	Caso sin atmósfera . . . . .	99
4.3.2.	Caso con atmósfera . . . . .	100
4.4.	Ecuaciones no adiabáticas atmosféricas . . . . .	101
4.4.1.	Equilibrio radiativo . . . . .	102
4.4.2.	Conservación de momento . . . . .	103
4.4.3.	Condiciones de contorno en la atmósfera . . . . .	104
4.5.	Formulación adimensional de las ecuaciones atmosféricas no adiabáticas . . . . .	106
4.6.	Estabilidad de los modos en las oscilaciones no adiabáticas . . . . .	107
4.6.1.	Ecuación de la energía e integral de trabajo . . . . .	107
4.6.2.	Aproximación quasiadiabática . . . . .	110
4.6.3.	Integral de trabajo en aproximación quasiadiabática . . . . .	111
4.7.	Mecanismos de excitación . . . . .	112
<b>5.</b>	<b>Oscilaciones adiabáticas con rotación</b>	<b>114</b>
5.1.	Ecuaciones de oscilación en presencia de rotación . . . . .	115
5.1.1.	Estructura de equilibrio de los modelos rotantes . . . . .	116
5.1.2.	Distorsión no esféricamente simétrica . . . . .	117
5.1.3.	Formalismo perturbativo hasta segundo orden . . . . .	118
5.1.4.	Frecuencias de oscilación de un modelo pseudorotante . . . . .	119
5.2.	Correcciones a las frecuencias . . . . .	121
5.3.	Efectos de la rotación diferencial sobre las frecuencias . . . . .	123
5.4.	Degeneración accidental . . . . .	125
5.4.1.	Ecuaciones de oscilación en presencia de degeneración . . . . .	126
5.4.2.	Correcciones a primer y segundo orden para frecuencias afectadas por la degeneración por cercanía . . . . .	127
5.4.3.	Degeneración accidental a primer orden . . . . .	130
5.4.4.	Degeneración accidental a segundo orden . . . . .	131
5.4.5.	Expresiones completas de las correcciones a las frecuencias . . . . .	131
5.5.	Correcciones debidas a la degeneración accidental . . . . .	132
5.6.	Coefficientes de contaminación . . . . .	133

<b>6. Fotometría multicolor</b>	<b>135</b>
6.1. Necesidad de la fotometría multicolor . . . . .	135
6.2. Ecuaciones básicas de la fotometría multicolor . . . . .	136
6.3. Obtención de los observables no adiabáticos e identificación modal en fotometría multicolor . . . . .	139
6.4. Fórmula de Watson en presencia de degeneración accidental . . . . .	140
<b>7. RV Ari</b>	<b>143</b>
7.1. Datos de la estrella . . . . .	143
7.2. Oscilaciones no adiabáticas sin rotación . . . . .	144
7.2.1. Modelos . . . . .	144
7.2.2. Rangos de inestabilidad . . . . .	145
7.2.3. Variación del rango de frecuencias inestables en la caja fo- tométrica . . . . .	150
7.2.4. Observables no adiabáticos . . . . .	151
7.2.5. Variación de los observables no adiabáticos a lo largo de la evolución estelar . . . . .	154
7.2.6. Influencia de la atmósfera . . . . .	156
7.2.7. Conclusiones . . . . .	156
7.3. Identificación de los modos . . . . .	163
7.3.1. Fotometría Strömgren . . . . .	163
7.3.2. Evolución de los índices de color . . . . .	169
7.3.3. Conclusiones . . . . .	172
7.4. Influencia de la composición química . . . . .	172
7.5. Oscilaciones adiabáticas con rotación . . . . .	178
7.5.1. Modelos . . . . .	178
7.5.2. Acoplamientos por rotación . . . . .	179
7.5.3. Fotometría multicolor . . . . .	188
7.5.4. Conclusiones . . . . .	191
7.6. Efectos de la evolución sobre los acoplamientos por rotación . . . . .	192
7.6.1. Rotación rígida . . . . .	192
7.6.2. Rotación diferencial . . . . .	196
7.7. Diagramas de Petersen para RV Ari . . . . .	199
7.7.1. Introducción . . . . .	200
7.7.2. Resultados obtenidos. . . . .	203
7.7.3. DP y diagramas de color en presencia de rotación . . . . .	205
7.7.4. Conclusiones . . . . .	206
7.8. Conclusiones generales para RV Ari . . . . .	206
<b>8. 29 Cyg</b>	<b>207</b>
8.1. Datos de la estrella . . . . .	207
8.2. Oscilaciones no adiabáticas sin rotación . . . . .	208
8.2.1. Modelos . . . . .	208
8.2.2. Rangos de inestabilidad . . . . .	210
8.2.3. Observables no adiabáticos . . . . .	213
8.2.4. Variación de los observables no adiabáticos a lo largo de la evolución estelar . . . . .	215
8.2.5. Conclusiones . . . . .	217

8.3.	Identificación de los modos . . . . .	217
8.3.1.	Fotometría Strömgren . . . . .	217
8.3.2.	Evolución de los índices de color . . . . .	227
8.3.3.	Conclusiones . . . . .	228
8.4.	Oscilaciones adiabáticas con rotación . . . . .	228
8.4.1.	Modelos . . . . .	228
8.4.2.	Acoplamiento por rotación . . . . .	229
8.4.3.	Fotometría multicolor . . . . .	233
8.4.4.	Conclusiones . . . . .	238
8.5.	Efectos de la evolución sobre los acoplamientos por rotación . . . . .	238
8.5.1.	Rotación rígida . . . . .	238
8.5.2.	Rotación diferencial . . . . .	241
8.6.	Diagramas de Petersen para 29 Cyg . . . . .	242
8.7.	Estudio de 29 Cyg mediante modelos obtenidos con metalicidad solar . . . . .	246
8.7.1.	Propiedades de las estrellas $\lambda$ Bootis . . . . .	246
8.7.2.	Modelos con atmósfera . . . . .	250
8.7.3.	Identificación de los modos . . . . .	250
8.7.4.	Diagramas de Petersen . . . . .	252
8.8.	Conclusiones generales para 29 Cyg . . . . .	253
<b>9.</b>	<b>HD 205</b> . . . . .	<b>255</b>
9.1.	Datos de la estrella . . . . .	255
9.2.	Oscilaciones no adiabáticas sin rotación . . . . .	256
9.2.1.	Modelos . . . . .	256
9.2.2.	Rangos de frecuencias inestables . . . . .	259
9.2.3.	Observables no adiabáticos . . . . .	261
9.2.4.	Variación de los observables no adiabáticos a lo largo de la evolución estelar . . . . .	261
9.2.5.	Comportamiento general de los observables no adiabáticos . . . . .	264
9.3.	Identificación de los modos . . . . .	265
9.3.1.	Fotometría Strömgren . . . . .	265
9.3.2.	Evolución de los índices de color . . . . .	273
9.3.3.	Conclusiones . . . . .	274
9.4.	Oscilaciones adiabáticas con rotación . . . . .	274
9.4.1.	Modelos . . . . .	275
9.4.2.	Acoplamiento por rotación . . . . .	276
9.4.3.	Fotometría multicolor . . . . .	277
9.4.4.	Conclusiones . . . . .	280
9.5.	Efectos de la evolución sobre los acoplamientos por rotación . . . . .	281
9.5.1.	Rotación rígida . . . . .	282
9.5.2.	Rotación diferencial . . . . .	285
9.6.	Conclusiones generales para HD 205 . . . . .	287
<b>10.</b>	<b>Conclusiones y trabajo futuro</b> . . . . .	<b>289</b>
10.1.	Conclusiones . . . . .	289
10.1.1.	Diagramas de Petersen . . . . .	292
10.2.	Trabajo futuro . . . . .	292

<b>A. Funciones especiales</b>	<b>294</b>
A.1. Polinomios de Legendre . . . . .	294
A.2. Funciones asociadas de Legendre . . . . .	296
A.3. Armónicos esféricos . . . . .	297
<b>B. Radiación en las atmósferas estelares</b>	<b>299</b>

# Índice de tablas

1.1.	Principales características de las estrellas $\delta$ Scuti. . . . .	30
1.2.	Clasificación de las estrellas variables hasta llegar a las $\delta$ Scuti. . . . .	30
7.1.	Modelos calculados para <b>RV Ari</b> , con atmósfera y sin rotación. La convección se ha tratado con <b>MLT</b> y con <b>FST</b> . La temperatura está dada en grados K, la gravedad superficial $g$ en el sistema cgs, y la edad en millones de años. $X_C$ representa la fracción de Hidrógeno en el centro. Se proporciona el valor de $\alpha$ para cada uno de ellos; cuando es igual a 0.69, es porque ese modelo se ha calculado con <b>FST</b> . $f_{min}$ y $f_{max}$ muestran los límites inferior y superior del intervalo de inestabilidad ( $\mu\text{Hz}$ ). . . . .	145
7.2.	Valores de $\alpha_{max} = \Delta z/H_p$ y del tanto por ciento del radio estelar que ocupa la zona convectiva para cada uno de los modelos calculados (se incluyen sólo aquéllos para los que se ha utilizado <b>MLT</b> ). . . . .	149
7.3.	Identificación de los modos para las dos frecuencias de todos los modelos. Para los modelos calculados con <b>MLT</b> se ha utilizado $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 1.25$ , mientras que para los obtenidos con <b>FST</b> se ha empleado $\alpha_{\text{FST, atm}} = 0.69$ . Los pares $(n, \ell)$ indican los valores del orden radial y del grado angular, en ese orden. . . . .	164
7.4.	Valores de las distintas variables que intervienen en la fórmula de Watson, en función del tratamiento de la convección y del valor de $\alpha$ utilizado en el interior y en la atmósfera estelar. Modelos $0j$ . . . . .	168
7.5.	Diferencias de fase y cocientes de amplitudes para los filtros <b>v</b> y <b>b</b> . Modelos $0j$ . . . . .	168
7.6.	Modelos calculados para el punto central de la caja fotométrica, con distintas metalicidades. La convección ha sido tratada mediante el <b>MLT</b> , con $\alpha_{\text{MLT}} = 1.0$ . La temperatura está dada en K (en escala logarítmica), la edad en millones de años, y las frecuencias en $\mu\text{Hz}$ . $f_0$ representa la frecuencia del modo fundamental radial, y $f_{min}$ y $f_{max}$ son, respectivamente, los límites inferior y superior del intervalo de inestabilidad. . . . .	173
7.7.	Propiedades de los modelos obtenidos con las dos velocidades de rotación consideradas. $\Omega$ representa la velocidad de rotación, en km/s. La temperatura efectiva está dada en grados K, la gravedad superficial $g$ en el sistema cgs, y la edad en millones de años. $X_C$ representa la fracción de Hidrógeno en el centro. $f_0$ es la frecuencia del modo fundamental radial (en $\mu\text{Hz}$ ), y $\nu_\Omega$ es la frecuencia de rotación del modelo (también en $\mu\text{Hz}$ ). . . . .	179

7.8.	Parejas de modos acoplados con frecuencias cercanas (en torno a un 5%) a las observadas, $f_1$ y $f_2$ , para los modelos con $v = 18$ km/s. $\beta$ denota los valores de los coeficientes de contaminación. . . . .	184
7.9.	Igual que la tabla 7.8, para los modelos con $v = 52.6$ km/s. $\beta$ denota los valores de los coeficientes de contaminación. . . . .	186
7.10.	Propiedades de los acoplamientos entre parejas de modos con el mismo valor de $\ell$ para los modelos con $v = 52.6$ km/s. . . . .	187
7.11.	Propiedades de los acoplamientos entre modos mixtos con $(\ell, \ell') = (0, 2)$ para los modelos con $v = 52.6$ km/s. . . . .	187
8.1.	Modelos calculados para <b>29 Cyg</b> , con atmósfera y sin rotación. La convección se ha tratado con <b>MLT</b> . La temperatura está dada en grados K, la gravedad superficial $g$ en el sistema cgs, y la edad en millones de años. $X_C$ representa la fracción de Hidrógeno en el centro. $f_{min}$ y $f_{max}$ muestran los límites inferior y superior del intervalo de inestabilidad ( $\mu\text{Hz}$ ). . . . .	209
8.2.	Valores de $\alpha_{max} = \Delta z/H_p$ y del tanto por ciento del radio estelar que ocupa la zona convectiva para cada uno de los modelos calculados. $f_0$ representa la frecuencia del modo fundamental radial, en $\mu\text{Hz}$ . . . . .	210
8.3.	Identificación de los modos para las tres frecuencias. Para la atmósfera se ha utilizado $\alpha_{atm} = 1.25$ . Los pares $(n, \ell)$ indican los valores del orden radial y del grado angular, en ese orden. . . . .	224
8.4.	Valores de las distintas variables que intervienen en la fórmula de Watson, en función del tratamiento de la convección y del valor de $\alpha$ utilizado en el interior y en la atmósfera estelar. Modelos $0j$ . . . . .	225
8.5.	Diferencias de fase y cocientes de amplitudes para los filtros <b>v</b> y <b>b</b> . Modelos $0j$ . . . . .	225
8.6.	Propiedades de los modelos obtenidos con rotación, ( $\Omega = 80$ km/s). La temperatura efectiva está dada en grados K, la gravedad superficial $g$ en el sistema cgs, y la edad en millones de años. $X_C$ representa la fracción de Hidrógeno en el centro. $f_0$ es la frecuencia del modo fundamental radial y $\nu_\Omega$ la frecuencia de rotación del modelo, ambas expresadas en $\mu\text{Hz}$ . . . . .	229
8.7.	Parejas de modos acoplados con frecuencias cercanas (en torno a un 5%) a las observadas, $f_1$ , $f_2$ y $f_3$ , para el modelo central. $\beta$ denota los coeficientes de contaminación de los modos. . . . .	232
8.8.	Propiedades de los acoplamientos entre parejas de modos con el mismo valor de $\ell$ para el modelo central. . . . .	235
8.9.	Propiedades de los acoplamientos entre modos mixtos con $(\ell, \ell') = (0, 2)$ para el modelo central. . . . .	235
8.10.	Modelos calculados para <b>29 Cyg</b> , con atmósfera, sin rotación y con metalicidad solar. La convección se ha tratado con <b>MLT</b> . . . . .	250
8.11.	Identificación de los modos para las tres frecuencias del modelo central. Se ha utilizado $\alpha_{atm} = 1.25$ . . . . .	252

9.1.	Modelos calculados para <b>HD 205</b> , con atmósfera y sin rotación. La convección se ha tratado con <b>MLT</b> y con <b>FST</b> . La temperatura está dada en grados K, la gravedad superficial $g$ en el sistema cgs, y la edad en millones de años. $X_C$ representa la fracción de Hidrógeno en el centro. Se proporciona el valor de $\alpha$ para cada uno de ellos; cuando es igual a 0.69, es porque ese modelo se ha calculado con <b>FST</b> . $f_{min}$ y $f_{max}$ muestran los límites inferior y superior del intervalo de inestabilidad ( $\mu\text{Hz}$ ). . . . .	256
9.2.	Valores de $\alpha_{max} = \Delta z/H_p$ y del tanto por ciento del radio estelar que ocupa la zona convectiva para cada uno de los modelos calculados (se incluyen sólo aquéllos para los que se ha utilizado <b>MLT</b> ). . . . .	259
9.3.	Identificación de los modos para las dos frecuencias de todos los modelos. Para los modelos calculados con <b>MLT</b> se ha utilizado $\alpha_{MLT, atm} = 1.25$ , mientras que para los obtenidos con <b>FST</b> se ha empleado $\alpha_{FST, atm} = 0.69$ . Los pares $(n, \ell)$ indican los valores del orden radial y del grado angular, en ese orden. . . . .	271
9.4.	Valores de las distintas variables que intervienen en la fórmula de Watson, en función del tratamiento de la convección y del valor de $\alpha$ utilizado en el interior y en la atmósfera estelar. Modelos $0j$ . . . . .	272
9.5.	Propiedades de los modelos obtenidos con rotación, ( $\Omega = 20 \text{ km/s}$ ). La temperatura efectiva está dada en grados K, la gravedad superficial $g$ en el sistema cgs, y la edad en millones de años. $X_C$ representa la fracción de Hidrógeno en el centro. $f_0$ es la frecuencia del modo fundamental radial y $\nu_\Omega$ la frecuencia de rotación del modelo, ambas expresadas en $\mu\text{Hz}$ . . . . .	275
9.6.	Ejemplos de parejas de modos acoplados con frecuencias cercanas (en torno a un 5%) a $f_2$ . $\beta$ denota los valores de los coeficientes de contaminación. . . . .	276
9.7.	Propiedades de los acoplamientos entre modos mixtos con $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . . . . .	276

# Índice de figuras

1.1.	Espectro de potencias de las oscilaciones solares, obtenidas de observaciones Doppler en luz integrada sobre todo el disco solar. La ordenada está normalizada para mostrar la potencia de la velocidad por unidad de frecuencia. Los datos abarcan aproximadamente cuatro meses. Tomado de Christensen-Dalsgaard (1998). . . . .	25
1.2.	Diagrama de Hertzsprung-Russel (HR) donde se representan los diversos tipos conocidos de estrellas variables y la posición del Sol ( $\odot$ ). Las líneas continuas representan los caminos evolutivos de estrellas de 1, 2, 3, 4, 7, 12 y $20 M_{\odot}$ (en orden ascendente). La línea discontinua representa el límite inferior de la Secuencia Principal, también denominada de edad cero (ZAMS). También se muestran las líneas que delimitan la banda de inestabilidad de las Cefeidas. . . . .	29
1.3.	Diagramas $A_v/A_y$ frente a $\phi_v - \phi_y$ para la identificación de los modos de una estrella $\delta$ Scuti. Las curvas cerradas delimitan las regiones donde se deben encontrar los modos con $\ell = 0, 1, 2$ y $3$ . Tomado de Garrido et al. (1990). . . . .	35
2.1.	Temperatura de un elemento ascendente, relativa a la de su entorno. Tomado de Cox y Giuli (1968). . . . .	48
2.2.	Perfil de la velocidad de rotación, normalizada a su valor en la superficie, para un ejemplo típico de estrella rotante (modelo con $M = 1.8M_{\odot}$ ). El valor 1.0 representa la superficie estelar. La línea continua representa el perfil obtenido con rotación diferencial, y la de trazos, el correspondiente a la rotación uniforme. Tomado de Suárez et al. (2006). . . . .	59
2.3.	Componente radial de la aceleración centrífuga para un modelo con rotación diferencial, $J_L$ , (línea continua), y otro con rotación uniforme, $J_G$ , (línea discontinua). Modelo con $1.8M_{\odot}$ , edad 1050 millones de años, y $R = 2.27R_{\odot}$ . Tomado de Suárez et al. (2006). . . . .	60
3.1.	Cuadrado de la frecuencia adimensional $\omega^2$ , en función del índice $\ell$ para las oscilaciones adiabáticas de un polítropo de índice 3. Las pulsaciones radiales se corresponden con $\ell = 0$ . Tomado de Unno et al. (1989). . . . .	72
3.2.	Autofunciones de los modos no radiales con $\ell = 2$ para un polítropo con $N = 3$ , en función de la distancia al centro. Las curvas sólidas corresponden a los modos <b>f</b> y <b>p</b> , normalizadas a uno en la superficie, mientras que las curvas discontinuas representan autofunciones de los modos <b>g</b> , normalizadas en el centro. Tomado de Unno et al. (1989). . . . .	73

3.3.	Frecuencia de Brunt-Väisälä, $N$ (en línea continua), y de Lamb, $L_\ell$ (en líneas discontinuas, etiquetadas con distintos valores de $\ell$ ), en términos de las correspondientes frecuencias, frente al radio relativo $r/R$ para un modelo del Sol. Las líneas horizontales muestran las regiones donde las ondas están atrapadas para un modo $\mathbf{g}$ con frecuencia $\nu = 100 \mu\text{Hz}$ , y para un modo $\mathbf{p}$ con $\ell = 20$ y $\nu = 2000 \mu\text{Hz}$ . Tomado de Christensen-Dalsgaard (1998). . . . .	78
3.4.	Diagrama de propagación para un polítopo de índice 3 con $\ell = 2$ . Se muestran algunas frecuencias mediante líneas continuas horizontales, mientras que los nodos se localizan mediante círculos. Tomado de Unno et al. (1989). . . . .	80
3.5.	Contenido de Hidrógeno, $X$ , frente a la masa $m/M$ para tres modelos de una secuencia evolutiva de una estrella de $2.2M_\odot$ . La línea sólida es para edad 0, la punteada para $0.47 \cdot 10^9$ años, y la discontinua para $0.71 \cdot 10^9$ años. Solamente se muestra el cuarenta por ciento del interior de la estrella. Tomado de Christensen-Dalsgaard (1998). . . . .	81
3.6.	Diagramas de propagación para dos modelos evolucionados de $10 M_\odot$ . Tomado de Unno et al. (1989). . . . .	82
3.7.	“ <i>Avoided crossing</i> ” de frecuencias para una secuencia evolutiva de una estrella de $16 M_\odot$ . Tomado de Unno et al. (1989). . . . .	83
3.8.	Propagación de ondas acústicas, correspondientes a los modos $\ell = 30$ , $\nu = 3 \text{ mHz}$ y $\ell = 100$ , $\nu = 3 \text{ mHz}$ . Las líneas horizontales ilustran el frente de ondas. Tomado de Christensen-Dalsgaard (1998). . . . .	84
3.9.	Localización (a) del punto de retorno interno, $r_t$ , y (b) de la profundidad de penetración $R - r_t$ , en unidades del radio solar $R$ , para modos $\mathbf{p}$ en un modelo solar estándar. Los resultados se muestran como funciones del grado $\ell$ , para tres frecuencias típicas. Tomado de Christensen-Dalsgaard (1998). . . . .	85
3.10.	Frecuencias $\nu$ como funciones de $\ell$ , calculadas para un modelo solar estándar. Se indican algunos valores del orden $n$ . Tomado de Christensen-Dalsgaard (1998). . . . .	87
3.11.	Autofunciones de algunos modos $\mathbf{p}$ seleccionados en un modelo solar con a) $\ell = 0$ , $n = 23$ , $\nu = 3310 \mu\text{Hz}$ ; b) $\ell = 20$ , $n = 17$ , $\nu = 3375 \mu\text{Hz}$ ; c) $\ell = 60$ , $n = 10$ , $\nu = 3234 \mu\text{Hz}$ . Las flechas marcan la localización asintótica de los puntos de retorno $r_t$ , dados por la ecuación (3.114). Tomado de Christensen-Dalsgaard (1998). . . . .	89
3.12.	Autofunciones de algunos modos $\mathbf{g}$ seleccionados en un modelo solar con a) $\ell = 1$ , $n = -5$ , $\nu = 110 \mu\text{Hz}$ ; b) $\ell = 2$ , $n = -10$ , $\nu = 104 \mu\text{Hz}$ ; c) $\ell = 4$ , $n = -18$ , $\nu = 106 \mu\text{Hz}$ . Tomado de Christensen-Dalsgaard (1998). . . . .	90
5.1.	Diferencias entre las frecuencias de oscilación $\nu = \sigma/2\pi$ obtenidas en los casos de rotación uniforme y diferencial, en función del orden radial, $n$ . Téngase en cuenta que, en la gráfica, $\omega$ denota la frecuencia adimensional, que en el texto hemos representado mediante $\sigma$ . Se muestran únicamente las diferencias para los modos con $\ell = 1$ . Tomado de Suárez et al. (2006). . . . .	124

5.2.	Efectos de los coeficientes $C_{ab}^{(2)}/\sigma_a$ y $C_{ab}^{(2)}/\sigma_b$ para la degeneración accidental a segundo orden, como función de la frecuencia $\nu = \sigma/2\pi$ , para las parejas $(\ell_1, \ell_2) = (0, 2)$ ( <i>izquierda</i> ) y $(\ell_1, \ell_2) = (1, 3)$ ( <i>derecha</i> ). Los círculos vacíos y rellenos representan los coeficientes correspondientes a los casos de rotación uniforme y diferencial, respectivamente. Téngase en cuenta que, en la gráfica, $\omega$ denota la frecuencia adimensional, que en el texto hemos representado mediante $\sigma$ . Tomado de Suárez et al. (2006). . . . .	132
7.1.	Diagrama HR de los modelos $i0$ ( $\alpha = 2.0$ ), representados por asteriscos, con sus caminos evolutivos correspondientes, obtenidos sin rotación y con atmósfera. El área sombreada representa la caja de error.	146
7.2.	<i>Izquierda: growth rate</i> de cada modo frente a la frecuencia del mismo, para distintos valores de $\alpha$ . En líneas verticales se muestran las frecuencias observadas. <i>Derecha: Eficiencia convectiva</i> , en función de $\log T$ , de cada modelo. . . . .	147
7.3.	Valor de $\alpha$ utilizado en el cálculo de los modelos, frente al tamaño de la zona convectiva más externa (en unidades de $H_p$ ). La línea representa los puntos con $\alpha = \Delta z/H_p$ . . . . .	149
7.4.	Variación de los límites de los rangos de frecuencias inestables en función de la luminosidad ( <i>arriba a la izquierda</i> ), la masa ( <i>arriba a la derecha</i> ), la temperatura efectiva ( <i>abajo a la izquierda</i> ), y la densidad media ( <i>abajo a la derecha</i> ) de los modelos. Se representan también las dos frecuencias observadas mediante líneas horizontales. Se muestran solamente los resultados para $\alpha = 1.0$ , por claridad de las figuras. . .	150
7.5.	Observables no adiabáticos de los distintos modelos obtenidos para la estrella <b>RV Ari</b> , en función de la constante de pulsación, $Q$ . A la izquierda se muestra $f_T$ y a la derecha el desfase, $\Psi_T$ . Los valores asociados a los modos observados se muestran mediante líneas verticales.	152
7.6.	Igual que la gráfica anterior, pero en este caso se muestra $f_g$ . . . . .	153
7.7.	Frecuencia del modo fundamental radial a lo largo de la evolución de los distintos modelos. <i>Izquierda: modelos calculados con MLT</i> , con $\alpha = 1.0$ . <i>Derecha: modelos calculados con FST</i> . La línea horizontal muestra la frecuencia $f_1$ observada. . . . .	154
7.8.	Observables no adiabáticos para el modo fundamental radial a lo largo de la evolución de los distintos modelos. Las gráficas de la izquierda muestran los valores obtenidos con <b>MLT</b> , $\alpha = 1.0$ , mientras que para las de la derecha se ha utilizado <b>FST</b> . En las gráficas superiores se representa $f_T$ , y en las inferiores, $\Psi_T$ . . . . .	155
7.9.	Cocientes de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para las dos frecuencias. Grupo de modelos $0j$ , obtenidos usando <b>MLT</b> . En orden descendente: $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0$ y $0.5$ . . . . .	157
7.10.	Cociente de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para las dos frecuencias. Grupo de modelos $1j$ , obtenidos usando <b>MLT</b> . En orden descendente: $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0$ y $0.5$ . . . . .	158
7.11.	Cociente de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para las dos frecuencias. Grupo de modelos $2j$ , obtenidos usando <b>MLT</b> . En orden descendente: $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0$ y $0.5$ . . . . .	159

7.12. Cociente de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para las dos frecuencias. Grupo de modelos $3j$ , obtenidos usando <b>MLT</b> . En orden descendente: $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0$ y $0.5$ . . . . .	160
7.13. Cociente de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para las dos frecuencias. Grupo de modelos $4j$ , obtenidos usando <b>MLT</b> . En orden descendente: $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0$ y $0.5$ . . . . .	161
7.14. Cociente de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para las dos frecuencias, usando <b>MLT</b> y $\alpha = 0.5$ en la atmósfera. Modelo central (grupo $0j$ ). <i>Izquierda</i> : Frecuencia $f_1$ , <i>derecha</i> : frecuencia $f_2$ . En orden descendente: $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0, 0.5$ . . . . .	162
7.15. Cocientes de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para todos los modelos obtenidos usando <b>FST</b> . En cada línea se muestra el cociente de amplitudes y la diferencia de fases para $f_1$ , y a continuación, lo mismo para $f_2$ . . . . .	163
7.16. Diagramas fase-amplitud para el modo fundamental radial a lo largo de la evolución del modelo central. A la izquierda se muestran los resultados obtenidos con <b>MLT</b> , y a la derecha, con <b>FST</b> . El rectángulo muestra la caja de error observacional. Frecuencia $f_1$ . . . . .	170
7.17. Igual que la Fig. 7.16, para la frecuencia $f_2$ . . . . .	171
7.18. Rangos de inestabilidad del modelo central de la caja fotométrica calculado con distintas composiciones químicas. Para cada frecuencia se representa el <i>Growth Rate</i> . Las frecuencias observadas se muestran mediante líneas verticales. . . . .	173
7.19. Observables no adiabáticos de los modelos de la tabla 7.6, en función de la constante de pulsación, $Q$ . a) $f_T$ , b) $\Psi_T$ , c) $f_g$ . . . . .	174
7.20. Eficiencia convectiva en función del logaritmo de la temperatura interna para cinco metalicidades distintas. . . . .	175
7.21. Valores del desfase ( <i>arriba a la izquierda</i> ), de $\delta T/T$ ( <i>arriba a la derecha</i> ), de la opacidad ( <i>abajo a la izquierda</i> ) y del gradiente de temperatura ( <i>abajo a la derecha</i> ) en función de la temperatura interna, para los cinco modelos calculados. . . . .	176
7.22. Cociente de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para las dos frecuencias observadas, $f_1$ y $f_2$ , del modelo central, con distintas metalicidades. En orden descendente: $[M/H] = 0.26, 0.11, 0.01, -0.09, -0.24$ . . . . .	177
7.23. Diagrama HR de los modelos obtenidos sin atmósfera y con rotación. Para cada masa se muestran dos caminos evolutivos distintos: uno correspondiente a una velocidad de $v = 52.6$ km/s ( $i = 20^\circ$ ), y otro para $v = 18$ km/s ( $i = 90^\circ$ ). La zona sombreada representa la caja de error. Para la convección se ha utilizado $\alpha = 0.5$ . . . . .	178
7.24. Diferencia de frecuencias $ \sigma - \sigma' $ para los cinco modelos de la caja fotométrica calculados con $v = 18$ km/s frente a $\sigma$ (la frecuencia de los modos calculada sin acoplamiento), para distintos valores de $\ell$ . $\sigma'$ es la frecuencia que se obtiene para cada modo cuando se incluye la degeneración accidental. . . . .	180
7.25. Igual que la gráfica 7.24, pero para los modelos con $v = 52.6$ km/s. . . . .	181

7.26.	Coeficientes de contaminación para los cinco modelos de la caja fotométrica, calculados con $v = 18$ km/s, frente a la frecuencia de los modos. <i>Izquierda:</i> valores obtenidos para las parejas $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . <i>Derecha:</i> valores correspondientes a las parejas $(\ell, \ell') = (1, 3)$ . . . . .	182
7.27.	Igual que la gráfica 7.26, para los modelos con $v = 52.6$ km/s. . . . .	183
7.28.	Diferencia de frecuencias $ \sigma - \sigma' $ para los cinco modelos de la caja fotométrica calculados con $v = 52.6$ km/s frente a $\sigma$ (la frecuencia de los modos calculada sin acoplamiento), para distintos valores de $\ell$ . Se muestra todo el espectro de pulsación. El significado de cada uno de los símbolos es el mismo que para la Fig. 7.24. . . . .	184
7.29.	Coeficientes de contaminación para los cinco modelos de la caja fotométrica, calculados con $v = 52.6$ km/s, frente a la frecuencia de los modos cuando no se tiene en cuenta el acoplamiento, $\sigma$ . Se muestra todo el espectro de pulsación. <i>Izquierda:</i> valores obtenidos para las parejas $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . <i>Derecha:</i> valores correspondientes a las parejas con $(\ell, \ell') = (1, 3)$ . . . . .	185
7.30.	Diagramas fase-amplitud para el filtro <b>u</b> de las parejas que se muestran en la tabla 7.9. Los valores que se obtienen cuando no se tiene en cuenta la rotación se muestran mediante cuadrados, etiquetados según su valor de $\ell$ . $u - y$ y $u/y$ representan, respectivamente, las diferencias $\phi_u - \phi_y$ y los cocientes $A_u/A_y$ . . . . .	188
7.31.	Diagramas fase-amplitud para el filtro <b>u</b> de los modos mostrados en la tabla 7.10. Igual que antes, se muestran los puntos correspondientes a las predicciones sin rotación, representados mediante cuadrados. . . . .	189
7.32.	Diagramas fase-amplitud para el filtro <b>u</b> de los modos mixtos mostrados en la tabla 7.11. Como en las dos Figs. anteriores, se muestran los puntos correspondientes a las predicciones sin rotación, representados mediante cuadrados. . . . .	189
7.33.	Diferencias $ \sigma - \sigma' $ para tres puntos del camino evolutivo obtenido con rotación rígida, en función de la frecuencia de los modos: a) 50 millones de años, $v = 34.0$ km/s; b) 1160 millones de años, $v = 52.4$ km/s; c) 1570 millones de años, prácticamente al final de la secuencia principal, $v = 77.7$ km/s. . . . .	192
7.34.	Evolución de la frecuencia adimensional de algunos modos <b>g</b> (gráficas superiores), <b>f</b> (gráficas centrales) y <b>p</b> (gráficas inferiores) para el modelo calculado con rotación rígida. A la izquierda se muestran las frecuencias calculadas teniendo en cuenta la rotación, pero no el acoplamiento. En las gráficas de la derecha ya se han incluido los efectos de éste. . . . .	193
7.35.	Coeficientes de contaminación para los tres puntos del camino evolutivo anteriores, en función de la frecuencia de los modos. <i>Izquierda:</i> valores obtenidos para las parejas $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . <i>Derecha:</i> lo mismo, pero para las parejas $(\ell, \ell') = (1, 3)$ . En orden descendente: modelos con 50, 1160 y 1570 millones de años. . . . .	194
7.36.	Evolución de los coeficientes de contaminación de los modos <b>g</b> , <b>f</b> y <b>p</b> para el modelo central de la caja fotométrica evolucionado con rotación rígida. La evolución viene caracterizada por la temperatura efectiva. . . . .	195

7.37. Diferencias $ \sigma - \sigma' $ para tres puntos del camino evolutivo obtenido con rotación diferencial, en función de la frecuencia de los modos: a) 50 millones de años, $v = 81.1$ km/s; b) 1160 millones de años, $v = 52.7$ km/s; c) 1570 millones de años, prácticamente al final de la secuencia principal, $v = 35.5$ km/s. . . . .	196
7.38. Evolución de la frecuencia adimensional de algunos modos <b>g</b> (gráficas superiores), <b>f</b> (gráficas centrales) y <b>p</b> (gráficas inferiores) para el modelo calculado con rotación diferencial. A la izquierda se muestran las frecuencias calculadas teniendo en cuenta la rotación, pero no el acoplamiento. En las gráficas de la derecha ya se han incluido los efectos de éste. . . . .	197
7.39. Coeficientes de contaminación para los tres puntos del camino evolutivo anteriores, en función de la frecuencia de los modos. <i>Izquierda</i> : valores obtenidos para las parejas $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . <i>Derecha</i> : lo mismo, pero para las parejas $(\ell, \ell') = (1, 3)$ . En orden descendente: modelos con 50, 1160 y 1570 millones de años. . . . .	198
7.40. Evolución del coeficiente de contaminación de los modos <b>g</b> , <b>f</b> y <b>p</b> para el modelo central de la caja fotométrica evolucionado con rotación diferencial. La evolución viene caracterizada por la temperatura efectiva.	199
7.41. Diagramas de Petersen clásicos para <b>RV Ari</b> . Se representan los tracks del modelo central con distintas metalicidades, desde $[M/H] = -0.50$ hasta $[M/H] = +0.50$ , sin rotación. El círculo representa el valor observado del cociente de frecuencias. El área sombreada corresponde a los valores típicos encontrados para estrellas de Población I. $\Pi_0$ está en días. . . . .	200
7.42. Diagramas de Petersen rotacionales para <b>RV Ari</b> . Se han utilizado tres velocidades de rotación (aproximación de rotación rígida), sin tener en cuenta los efectos de la degeneración por cercanía de los modos. El valor de la metalicidad utilizado ha sido el observado: $[M/H] = 0.01$ . El círculo representa el valor observado para el cociente de frecuencias. Al igual que antes, $\Pi_0$ está en días. . . . .	201
7.43. Diagramas de Petersen clásicos para los tracks de los cinco modelos de la caja fotométrica, obtenidos sin rotación y con la metalicidad observada: $[M/H] = 0.01$ . El círculo representa el valor observado para el cociente de frecuencias. $\Pi_0$ está en días. . . . .	202
7.44. Diagramas fase-amplitud para los filtros <b>u</b> , <b>v</b> y <b>b</b> de las parejas $(-1, 1, 0) - (-4, 3, 0)$ y $(-1, 1, 1) - (-4, 3, 0)$ del modelo central. El rectángulo muestra la caja de error de los índices de color observados.	203
7.45. Diagramas de Petersen rotacionales para <b>RV Ari</b> , $\Omega = 25$ km/s. Se representan los tracks del modelo central con distintas metalicidades, desde $[M/H] = -0.09$ hasta $[M/H] = +0.11$ . El círculo representa el valor observado del cociente de frecuencias. El área sombreada corresponde a los valores típicos encontrados para estrellas de Población I. $\Pi_0$ está en días. . . . .	204
7.46. Igual que la figura 7.45, para los modelos evolucionados con una velocidad de rotación de $\Omega = 35$ km/s. . . . .	205

8.1.	Diagrama HR de los modelos $i2$ ( $\alpha = 0.5$ ), representados por asteriscos, con sus caminos evolutivos correspondientes. El área sombreada representa la caja de error. . . . .	209
8.2.	<i>Izquierda: growth rate</i> de cada modo frente a su frecuencia del mismo, para distintos valores de $\alpha$ . En líneas verticales se muestran las tres frecuencias consideradas. La zona sombreada muestra el intervalo de frecuencias de los modos detectados observacionalmente. <i>Derecha: Eficiencia convectiva</i> , en función de $\log T$ , de cada modelo. . . . .	211
8.3.	Valor de $\alpha$ utilizado en el cálculo de los modelos, frente al tamaño de la zona convectiva más externa (en unidades de $H_p$ ). La línea representa los puntos en los que $\alpha = \Delta z/H_p$ . . . . .	212
8.4.	Variación de los límites de los rangos de frecuencias inestables en función de la luminosidad ( <i>arriba a la izquierda</i> ), la masa ( <i>arriba a la derecha</i> ), la temperatura efectiva ( <i>abajo a la izquierda</i> ), y la densidad media ( <i>abajo a la derecha</i> ) de los modelos. Se representan también las tres frecuencias observadas mediante líneas horizontales. Se muestran solamente los resultados para $\alpha = 1.0$ , por claridad de las figuras. . .	213
8.5.	Observables no adiabáticos de los distintos modelos obtenidos para la estrella <b>29 Cyg</b> , en función de la constante de pulsación, $Q$ . A la izquierda se muestra $f_T$ y a la derecha el desfase, $\Psi_T$ . Los valores asociados a los modos observados se muestran mediante líneas verticales.	214
8.6.	Frecuencia del modo fundamental radial a lo largo de la evolución de los distintos modelos, realizada con $\alpha = 0.5$ . La línea horizontal muestra el valor de la frecuencia $f_1$ observada. . . . .	215
8.7.	Observables no adiabáticos para el modo fundamental radial a lo largo de la evolución de los distintos modelos. Se han obtenido utilizando el <b>MLT</b> con $\alpha = 0.5$ . En la gráfica superior se muestra $f_T$ , y en la inferior, $\Psi_T$ . . . . .	216
8.8.	Cociente de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para las tres frecuencias. Grupo de modelos $0j$ . <i>Izquierda: Frecuencia <math>f_1</math>, centro: frecuencia <math>f_2</math>, derecha: frecuencia <math>f_3</math></i> . En orden descendente: $\alpha = 1.5, 1.0, 0.5$ . . . . .	219
8.9.	Cociente de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para las tres frecuencias. Grupo de modelos $1j$ . <i>Izquierda: Frecuencia <math>f_1</math>, centro: frecuencia <math>f_2</math>, derecha: frecuencia <math>f_3</math></i> . En orden descendente: $\alpha = 1.5, 1.0, 0.5$ . . . . .	220
8.10.	Cociente de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para las tres frecuencias. Grupo de modelos $2j$ . <i>Izquierda: Frecuencia <math>f_1</math>, centro: frecuencia <math>f_2</math>, derecha: frecuencia <math>f_3</math></i> . En orden descendente: $\alpha = 1.5, 1.0, 0.5$ . . . . .	221
8.11.	Cociente de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para las tres frecuencias. Grupo de modelos $3j$ . <i>Izquierda: Frecuencia <math>f_1</math>, centro: frecuencia <math>f_2</math>, derecha: frecuencia <math>f_3</math></i> . En orden descendente: $\alpha = 1.5, 1.0, 0.5$ . . . . .	222
8.12.	Cociente de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para las tres frecuencias. Grupo de modelos $4j$ . <i>Izquierda: Frecuencia <math>f_1</math>, centro: frecuencia <math>f_2</math>, derecha: frecuencia <math>f_3</math></i> . En orden descendente: $\alpha = 1.5, 1.0, 0.5$ . . . . .	223

8.13.	Cociente de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para las tres frecuencias, usando <b>MLT</b> y $\alpha_{\text{atm}} = 0.5$ . Modelos 0j. <i>Izquierda</i> : Frecuencia $f_1$ , <i>centro</i> : frecuencia $f_2$ , <i>derecha</i> : frecuencia $f_3$ . En orden descendente: $\alpha = 1.5, 1.0, 0.5$ . . . . .	226
8.14.	Diagramas fase-amplitud para el modo fundamental radial a lo largo de la evolución del modelo central. A la izquierda se muestran los resultados obtenidos para la frecuencia $f_1$ , y a la derecha, para $f_2$ . El rectángulo muestra la caja de error observacional. . . . .	227
8.15.	Diagrama HR de los modelos obtenidos con rotación, $v = 80$ km/s, con los caminos evolutivos correspondientes. La zona sombreada representa la caja fotométrica estándar. Para la convección se ha utilizado $\alpha = 0.5$ . . . . .	229
8.16.	Diferencia de frecuencias $ \sigma - \sigma' $ para los cinco modelos de la caja fotométrica frente a $\sigma$ (la frecuencia de los modos calculada sin acoplamiento), para distintos valores de $\ell$ . $\sigma'$ es la frecuencia que se obtiene para cada modo cuando se incluye la degeneración accidental. . . . .	230
8.17.	Coefficientes de contaminación para los cinco modelos de la caja fotométrica frente a la frecuencia de los modos. <i>Izquierda</i> : valores obtenidos para las parejas $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . <i>Derecha</i> : valores correspondientes a las parejas con $(\ell, \ell') = (1, 3)$ . . . . .	231
8.18.	Diferencia de frecuencias $ \sigma - \sigma' $ para los cinco modelos de la caja fotométrica frente a $\sigma$ (la frecuencia de los modos calculada sin acoplamiento), para distintos valores de $\ell$ . Se muestra todo el espectro de pulsación. . . . .	233
8.19.	Coefficientes de contaminación para los cinco modelos de la caja fotométrica frente a la frecuencia de los modos. Se muestra todo el espectro de pulsación. <i>Izquierda</i> : valores obtenidos para las parejas $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . <i>Derecha</i> : valores correspondientes a las parejas con $(\ell, \ell') = (1, 3)$ . . . . .	234
8.20.	Diagramas fase-amplitud para el filtro <b>u</b> de las parejas que se muestran en la tabla 8.7. Los valores que se obtienen cuando no se tiene en cuenta la rotación se muestran mediante cuadrados, etiquetados según su valor de $\ell$ . $u - y$ y $u/y$ representan, respectivamente, las diferencias $\phi_u - \phi_y$ y los cocientes $A_u/A_y$ . . . . .	235
8.21.	Diagramas fase-amplitud para el filtro <b>u</b> de los modos acoplados con el mismo $\ell$ . Igual que antes, se muestran los puntos correspondientes a las predicciones sin rotación, representados mediante cuadrados. . . . .	236
8.22.	Diagramas fase-amplitud para el filtro <b>u</b> de los modos mixtos con $\ell = 0$ y $\ell = 2$ , acoplados. Como en las dos Figs. anteriores, se muestran los puntos correspondientes a las predicciones sin rotación, representados mediante cuadrados. . . . .	237
8.23.	Diferencias $ \sigma - \sigma' $ para tres puntos del camino evolutivo obtenido con rotación rígida, en función de la frecuencia de los modos: a) modelo con 50 millones de años, $v = 57.3$ km/s; b) modelo con 1250 millones de años, $v = 82.5$ km/s; c) modelo con 1740 millones de años, prácticamente al final de la secuencia principal, $v = 134.0$ km/s. . . . .	239

8.24. Evolución de la frecuencia adimensional de algunos modos <b>g</b> (gráficas superiores), <b>f</b> (gráficas centrales) y <b>p</b> (gráficas inferiores) para el modelo obtenido con rotación rígida. A la izquierda se muestran las frecuencias calculadas teniendo en cuenta la rotación, pero no el acoplamiento. En las gráficas de la derecha ya se han incluido los efectos de éste. . . . .	240
8.25. Coeficientes de contaminación para los tres puntos anteriores del camino evolutivo anteriores, en función de la frecuencia de los modos. <i>Izquierda:</i> valores obtenidos para las parejas $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . <i>Derecha:</i> lo mismo, pero para las parejas $(\ell, \ell') = (1, 3)$ . En orden descendente: modelos con 50, 1250 y 1740 millones de años. . . . .	241
8.26. Evolución del coeficiente de contaminación de los modos <b>g</b> , <b>f</b> y <b>p</b> para el modelo central de la caja fotométrica evolucionado con rotación rígida. La evolución viene caracterizada por la temperatura efectiva. . . . .	242
8.27. Diferencias $ \sigma - \sigma' $ para tres puntos del camino evolutivo obtenido con rotación diferencial, en función de la frecuencia de los modos: a) modelo con 50 millones de años, $v = 115.6$ km/s; b) modelo con 1250 millones de años, $v = 82.7$ km/s; c) modelo con 1550 millones de años, prácticamente al final de la secuencia principal, $v = 67.1$ km/s. . . . .	243
8.28. Evolución de la frecuencia adimensional de algunos modos <b>g</b> (gráficas superiores), <b>f</b> (gráficas centrales) y <b>p</b> (gráficas inferiores) para el modelo calculado con rotación diferencial. En las Figs. de la izquierda no se ha incluido la degeneración accidental, mientras que en las de la derecha, sí. . . . .	244
8.29. Coeficientes de contaminación para los tres puntos del camino evolutivo anteriores, en función de la frecuencia de los modos. <i>Izquierda:</i> valores obtenidos para las parejas $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . <i>Derecha:</i> lo mismo, pero para las parejas $(\ell, \ell') = (1, 3)$ . En orden descendente: modelos con 50, 1250 y 1550 millones de años. . . . .	245
8.30. Evolución del coeficiente de contaminación de los modos <b>g</b> , <b>f</b> y <b>g</b> para el modelo central de la caja fotométrica evolucionado con rotación diferencial. La evolución viene caracterizada por la temperatura efectiva. . . . .	246
8.31. $\Pi_{4/3}$ para los tracks de los cinco modelos de la caja fotométrica, obtenidos sin rotación y con la metalicidad observada: $[M/H]=-0.44$ . El círculo representa el valor observado para el cociente de frecuencias. Los periodos están dados en días. . . . .	247
8.32. $\Pi_{4/3}$ para <b>29 Cyg</b> . Se representan los tracks del modelo central para dos metalicidades distintas, sin rotación. El círculo representa el valor observado del cociente para esta estrella. Los periodos están dados en días. . . . .	248
8.33. $\Pi_{4/3}(\Omega)$ para <b>29 Cyg</b> . Se han utilizado los cinco modelos de la caja fotométrica con una única velocidad de rotación: $v = 80$ km/s, usando la aproximación de rotación rígida. El valor de la metalicidad utilizado ha sido $[M/H]=-0.44$ . El círculo representa el valor observado para el cociente de frecuencias. . . . .	249

8.34.	<i>Growth Rate</i> de cada modo frente a su frecuencia. En líneas verticales se muestran las frecuencias observadas. <i>Izquierda</i> : Modelo con metalicidad subsolar. <i>Derecha</i> : Modelo con metalicidad solar. La zona sombreada muestra la zona de frecuencias detectadas observacionalmente. . . . .	250
8.35.	Cociente de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para las tres frecuencias, usando <b>MLT</b> . Modelos 0 <i>j</i> . <i>Izquierda</i> : Frecuencia $f_1$ , <i>centro</i> : frecuencia $f_2$ , <i>derecha</i> : frecuencia $f_3$ . En orden descendente: $\alpha = 1.5, 1.0, 0.5$ . . . . .	251
8.36.	Cociente de periodos de los modos identificados en la tabla 8.11 frente al logaritmo del correspondiente periodo, en días. Los círculos rellenos representan los valores observacionales. Los asteriscos representan los valores de $\Pi_{2/1}$ frente a $\log \Pi_1$ , los rombos, $\Pi_{3/1}$ frente a $\log \Pi_1$ , y los triángulos, los valores de $\Pi_{3/2}$ frente a $\log \Pi_2$ . . . . .	252
9.1.	Diagrama HR de los modelos <i>i0</i> ( $\alpha = 2.0$ ), representados por asteriscos, con sus caminos evolutivos correspondientes, obtenidos sin rotación y con atmósfera. El rectángulo representa la caja de error. . . . .	257
9.2.	<i>Izquierda</i> : <i>growth rate</i> de cada modo frente a la frecuencia del mismo, para distintos valores de $\alpha$ . En líneas verticales se muestran las dos frecuencias consideradas. La zona sombreada muestra el intervalo de frecuencias de los modos detectados observacionalmente. <i>Derecha</i> : Eficiencia convectiva, en función de $\log T$ , de cada modelo. . . . .	258
9.3.	Valor de $\alpha$ utilizado en el cálculo de los modelos, frente al tamaño de la zona convectiva más externa (en unidades de $H_p$ ). La línea representa los puntos en los que $\alpha = \Delta z/H_p$ . . . . .	260
9.4.	Observables no adiabáticos de los distintos modelos obtenidos para la estrella <b>HD 205</b> , en función de la constante de pulsación, $Q$ . A la izquierda se muestra $f_T$ y a la derecha el desfase, $\Psi_T$ . Los valores asociados a los modos observados se muestran mediante líneas verticales. . . . .	262
9.5.	Frecuencia del modo fundamental radial a lo largo de la evolución de los distintos modelos. <i>Izquierda</i> : modelos calculados con <b>MLT</b> y $\alpha_{\text{MLT}} = 1.0$ . <i>Derecha</i> : modelos calculados con <b>FST</b> . Las líneas horizontales muestran las frecuencias $f_1$ y $f_2$ observadas. . . . .	263
9.6.	Observables no adiabáticos para el modo fundamental radial a lo largo de la evolución, para los distintos modelos. Las gráficas de la izquierda muestran los valores obtenidos con <b>MLT</b> y $\alpha_{\text{MLT}} = 1.0$ , mientras que para las de la derecha se ha utilizado <b>FST</b> . En las gráficas superiores se representa $f_T$ , y en las inferiores $\Psi_T$ . . . . .	263
9.7.	Cociente de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para las dos frecuencias. Grupo de modelos 0 <i>j</i> , obtenidos usando <b>MLT</b> . En orden descendente: $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0$ y $0.5$ . . . . .	266
9.8.	Cociente de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para las dos frecuencias. Grupo de modelos 1 <i>j</i> obtenidos usando <b>MLT</b> . En orden descendente: $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0$ y $0.5$ . . . . .	267
9.9.	Cociente de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para las dos frecuencias. Grupo de modelos 2 <i>j</i> obtenidos usando <b>MLT</b> . En orden descendente: $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0$ y $0.5$ . . . . .	268

9.10. Cociente de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para las dos frecuencias, usando <b>MLT</b> y $\alpha = 0.5$ en la atmósfera. Modelos 0j. <i>Izquierda</i> : Frecuencia $f_1$ , <i>derecha</i> : frecuencia $f_2$ . En orden descendente: $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0, 0.5$ . . . . .	269
9.11. Cociente de amplitudes $A_{u,v,b,y}/A_y$ y diferencias de fase $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$ para todos los modelos obtenidos usando <b>FST</b> . En cada línea se muestra el cociente de amplitudes y la diferencia de fases para $f_1$ , y a continuación, lo mismo para $f_2$ . . . . .	270
9.12. Diagramas fase-amplitud para el modo fundamental radial a lo largo de la evolución del modelo central. A la izquierda se muestran los resultados obtenidos con <b>MLT</b> , y a la derecha, con <b>FST</b> . El rectángulo muestra la caja de error observacional. Frecuencia $f_2$ . . . . .	273
9.13. Diagrama HR de los modelos obtenidos sin atmósfera, y con rotación. La zona sombreada representa la caja de error. Para la convección se ha utilizado $\alpha_{\text{MLT}} = 1.0$ . . . . .	275
9.14. Diferencia de frecuencias $ \sigma - \sigma' $ para los cinco modelos de la caja fotométrica frente a $\sigma$ (la frecuencia de los modos calculada sin acoplamiento), para distintos valores de $\ell$ . $\sigma'$ es la frecuencia que se obtiene para cada modo cuando se incluye la degeneración accidental. . . . .	277
9.15. Coeficientes de contaminación para los cinco modelos de la caja fotométrica frente a la frecuencia de los modos. <i>Izquierda</i> : valores obtenidos para las parejas con $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . <i>Derecha</i> : valores correspondientes a las parejas con $(\ell, \ell') = (1, 3)$ . . . . .	278
9.16. Diagramas fase-amplitud para el filtro <b>u</b> de las parejas que se muestran en la tabla 9.6. Los valores que se obtienen cuando no se tiene en cuenta la rotación se muestran mediante cuadrados, etiquetados según su valor de $\ell$ . $u - y$ y $u/y$ representan, respectivamente, las diferencias $\phi_u - \phi_y$ y los cocientes $A_u/A_y$ . . . . .	279
9.17. Diagramas fase-amplitud para el filtro <b>u</b> de los modos mixtos mostrados en la tabla 9.7. Igual que antes, se muestran los puntos correspondientes a las predicciones sin rotación, representados mediante cuadrados. . . . .	279
9.18. Diferencias $ \sigma - \sigma' $ para tres puntos del camino evolutivo obtenido con rotación rígida, en función de la frecuencia de los modos: a) modelo con 50 millones de años, $v = 8.4$ km/s; b) modelo con 450 millones de años, $v = 10.7$ km/s; c) modelo con 900 millones de años, en el punto de <i>turn-off</i> , $v = 19.5$ km/s. . . . .	280
9.19. Evolución de la frecuencia adimensional de algunos modos <b>g</b> (gráficas superiores), <b>f</b> (gráficas centrales) y <b>p</b> (gráficas inferiores) para el modelo calculado con rotación rígida. A la izquierda se muestran las frecuencias calculadas teniendo en cuenta la rotación, pero no el acoplamiento. En las gráficas de la derecha ya se han incluido los efectos de éste. . . . .	281
9.20. Coeficientes de contaminación para los tres puntos del camino evolutivo anteriores, en función de la frecuencia de los modos. <i>Izquierda</i> : valores obtenidos para las parejas $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . <i>Derecha</i> : lo mismo, pero para las parejas $(\ell, \ell') = (1, 3)$ . En orden descendente: modelos con 50, 450 y 900 millones de años. . . . .	282

9.21. Evolución de los coeficientes de contaminación de los modos <b>g</b> , <b>f</b> y <b>p</b> para el modelo central de la caja fotométrica evolucionado con rotación rígida. La evolución viene caracterizada por la temperatura efectiva. . . . .	283
9.22. Diferencias $ \sigma - \sigma' $ para tres puntos del camino evolutivo obtenido con rotación diferencial, en función de la frecuencia de los modos: a) modelo con 50 millones de años, $v = 45.9$ km/s; b) modelo con 450 millones de años, $v = 36.3$ km/s; c) modelo con 900 millones de años, en el punto de <i>turn-off</i> , $v = 19.8$ km/s. . . . .	284
9.23. Evolución de la frecuencia adimensional de algunos modos <b>g</b> (gráficas superiores), <b>f</b> (gráficas centrales) y <b>p</b> (gráficas inferiores) para el modelo calculado con rotación diferencial. A la izquierda se muestran las frecuencias calculadas teniendo en cuenta la rotación, pero no el acoplamiento. En las gráficas de la derecha ya se han incluido los efectos de éste. . . . .	285
9.24. Coeficientes de contaminación para los tres puntos del camino evolutivo anteriores, en función de la frecuencia de los modos. <i>Izquierda</i> : valores obtenidos para las parejas $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . <i>Derecha</i> : lo mismo, pero para las parejas $(\ell, \ell') = (1, 3)$ . En orden descendente: modelos con 50, 450 y 900 millones de años. . . . .	286
9.25. Evolución de los coeficientes de contaminación de los modos <b>g</b> , <b>f</b> y <b>p</b> para el modelo central de la caja fotométrica evolucionado con rotación diferencial. La evolución viene caracterizada por la temperatura efectiva. . . . .	287

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Breve historia de la astrosismología

La existencia de estrellas de brillo variable es conocida desde hace siglos. Algunas de las primeras en ser observadas fueron varias supernovas, como la del año 1006, la de la Nebulosa del Cangrejo de 1054, la de Tycho de 1572, o la del 1604, estudiada por Kepler. Otras, como Mira o Algol, cuya variabilidad es apreciable a simple vista, se conocían ya a mediados del siglo XVII. La construcción de grandes telescopios a finales del siglo XVIII por Herschel permitió el avance en la detección de estos objetos, aunque muchos de ellos fueron descubiertos de forma fortuita en el transcurso de otras investigaciones.

En 1844 el astrónomo alemán Argelander lanzó una llamada, publicada en el *Schumacher's Yearbook* de ese año, dirigida a los astrónomos aficionados, con el fin de intensificar las observaciones en busca de este tipo de estrellas, lo que constituyó un decisivo avance de la astrosismología. En dicho comunicado se describe el conocimiento existente hasta la fecha sobre variabilidad estelar, así como el método observacional (método de Argelander) que permitía a cualquier interesado estimar los cambios de brillo. El desarrollo de las técnicas fotográficas llevado a cabo por la Sección de Estrellas Variables de la Asociación Astronómica Británica, y su utilización de forma sistemática a partir de 1890 por parte del Observatorio del Harvard College en Cambridge (Massachusetts, EE.UU), ayudado desde su otro observatorio en Arequipa (Perú), contribuyeron en gran medida al incremento del número de estrellas variables conocidas. Estas búsquedas sistemáticas se concentraron principalmente sobre regiones densas de la Vía Láctea y las Nubes de Magallanes, con lo que su número ascendía ya a varios miles a principios del siglo XX.

La rápida evolución en la detección de este tipo de estrellas puede apreciarse claramente en su nomenclatura. El propio Argelander, iniciador también del catálogo **BD** (Bonner Durchmusterung), no creyó posible la existencia de más de 9 variables por constelación, por lo que las nombró con mayúsculas a partir de la R, seguido del nombre de la constelación (el uso de letras minúsculas o mayúsculas anteriores a la R se reservaba generalmente para designar otros aspectos). Pronto se tuvo que empezar a emplear letras dobles (RR a RZ, SS a SZ, etc.), incluso anteriores a la R (AA a AZ, hasta QQ a QZ), lo que daba lugar a 334 posibilidades por constelación. Nijland trató de introducir un sistema más simple, designando a cada estrella variable en una constelación dada, mediante una V más un número de orden seguido del nombre de la misma. A pesar de la utilidad de esta idea, el arraigo de la nomenclatura antigua

hizo que su implantación se produjera sólo en aquellos casos en los que había más de 334 variables, pasando a designarse con V335, V336, etc., más el nombre de la constelación, con lo que el problema quedaba resuelto para el futuro.

El uso de los fotomultiplicadores por parte de la Asociación Americana de Estrellas Variables a partir de 1911, y más recientemente, de los detectores tipo CCD, han supuesto un gran avance en la búsqueda de este tipo de estrellas. Dichos estudios han ido evolucionando en medios técnicos y humanos hasta nuestros días, llegando a conocerse 28345 objetos de este tipo en 1992, sólo en nuestra galaxia (General Catalogue of Variable Stars; Kholopov et al., 1992). Con los recientes resultados del satélite astrométrico HIPPARCOS, que ha observado una muestra de más de cien mil estrellas, se ha conseguido incrementar su número en unos 3000 objetos más (van Leeuwen et al., 1997).

Hay que distinguir entre variables en general y pulsantes. En un principio no se conocía el origen de la variabilidad, por lo que se las englobaba a todas en conjunto, haciendo una mención aparte a las supernovas, al ser un fenómeno claramente diferente y visible únicamente por un período limitado de tiempo. Más tarde, se consiguieron diferenciar las variables pulsantes, que son en sí las que estudia la astrosismología, de las eruptivas y las eclipsantes (siguiendo la clasificación de Richter et al., 1985). Brevemente diremos que las primeras se caracterizan por presentar variaciones periódicas de luminosidad y velocidad radial, causadas por expansiones y contracciones de la estructura estelar debidas a algún mecanismo de excitación interno. Este origen de la variabilidad es lo que las diferencia claramente de las eclipsantes, que sufren ocultaciones, o las eruptivas, en las que tiene lugar generalmente una transferencia de masa desde alguna compañera cercana. Asimismo, al tratarse de un fenómeno intrínseco a la estrella, sus pulsaciones muestran características que son reflejo de su estructura interna, radicando en este punto su interés.

Dentro de las pulsantes, las Cefeidas han ocupado siempre un lugar destacado, tanto por motivos históricos como por su gran amplitud de oscilación. Esto hizo que los primeros estudios teóricos tuvieran como principal objetivo explicar la causa de su variabilidad, lo que condujo a Lord Kelvin, en 1863, y a Ritter, en 1879, a desarrollar la teoría de las oscilaciones estelares. En concreto, este último llevó a cabo una discusión teórica sobre las pulsaciones radiales en una estrella homogénea. Sin embargo, no fue hasta años más tarde cuando Shapley (1914), basándose en el análisis de diversas observaciones, dedujo que la hipótesis de la pulsación era la única posible, en contra de la de binariedad, supuesta también hasta ese momento. Algunas de las razones alegadas fueron los cambios de tipo espectral y de color simultáneos a los de luminosidad, no explicables por esta última, así como que el radio estimado de la órbita debía ser menor que el de las componentes. Tras la sugerencia de Shapley, algunos años más tarde, Eddington (1918, 1919) perfiló la base matemática de la teoría de las oscilaciones radiales y adiabáticas bajo el efecto de la fuerza gravitatoria y del gradiente de presión. A estos trabajos les siguieron los de Pekeris (1938) y Cowling (1941), en los que consiguieron la solución analítica exacta de las oscilaciones no radiales adiabáticas con modelos homogéneos y politrópicos, respectivamente.

Faltaba comprender la causa primera de la pulsación. Las reacciones nucleares en el interior estelar fueron el principal candidato hasta que se demostró que el amortiguamiento radiativo de las capas superiores impedía la generación de una amplitud de oscilación como la observada ( $\sim 0.5 - 1$  mag en las Cefeidas). Por

tanto, el mecanismo excitador debía encontrarse en las capas externas de la estrella. Zhevakin (1953) propuso el mecanismo  $\kappa$ , producido por cambios de la opacidad en la región de la segunda ionización del helio, como el responsable de la inestabilidad pulsacional de las Cefeidas. Más tarde, se comprobó que este mecanismo define una franja en el diagrama HR que afecta no sólo a éstas, sino a otras muchas estrellas pulsantes, como por ejemplo, las  $\delta$  Scuti ( $\delta$  Sct).

Por último, la conocida obra de Ledoux y Walraven (1958) compiló todo el conocimiento previo, llegando a ser una pieza básica, junto al ya más reciente trabajo de Unno et al. (1989), en el estudio de las oscilaciones estelares.

## 1.2. La astrosismología en la actualidad

El estudio de los modos propios de oscilación de las estrellas, con el fin de obtener información de su estructura interna, constituye el objetivo primordial de la *sismología estelar* o *astrosismología*. Estos modos son ondas estacionarias que se propagan a través de cavidades resonantes, por lo que sus propiedades reflejan fielmente las características del interior estelar. Los observables típicos, las variaciones de luminosidad y velocidad radial, no son más que el efecto manifiesto de los cambios periódicos que tienen lugar en la configuración de equilibrio, debidos a perturbaciones ejercidas por algún mecanismo excitador, como el ya mencionado mecanismo  $\kappa$ . En los últimos años se han desarrollado técnicas sobre nuevos observables, como la variación de la anchura equivalente de las líneas de Balmer (Kjeldsen et al., 1995), o la evolución temporal del perfil de las líneas espectrales con la oscilación (Aerts, 1996; Schrijvers et al., 1997; Kennelly et al., 1998). Con esta información, se trata entonces de confrontar la frecuencia de los modos propios, obtenidos a partir de modelos estelares apropiados para cada objeto, con las observadas. Además, como veremos más adelante (ver Cap. 3), cada modo de oscilación se caracteriza por una terna de valores  $(n, \ell, m)$  que han de coincidir también con las predichas teóricamente.

La astrosismología es una de las ramas de la astrofísica más jóvenes, y potencialmente, más poderosas de las que disponemos hoy en día para completar nuestro conocimiento de la estructura y evolución estelar, ya que, aparte de sondear directamente el interior de las estrellas, puede ser aplicada a objetos en diferentes etapas evolutivas. En contrapartida, requiere largas campañas de observación, involucrando cooperaciones entre instituciones y telescopios de diferentes continentes con el fin de obtener resultados de calidad que eviten las interrupciones debidas a la alternancia día-noche. Asimismo, estos largos períodos observacionales, de varias semanas típicamente, permiten la resolución de modos de oscilación próximos en frecuencia. Actualmente se encuentran en funcionamiento varias de estas redes observacionales, como STEPHI (Michel et al., 1995), DSN (Breger et al., 1998), STACC (Frandsen et al., 1996) o WET (Winget, 1993).

A pesar de que las primeras estrellas pulsantes estudiadas fueron las Cefeidas y las RR Lyrae, hoy en día no se comprende el estudio de la astrosismología si no se comienza por el Sol, cuyo carácter pulsacional fue reconocido en la década de los setenta. Esta rama concreta, conocida con el nombre de *heliosismología*, ha contribuido enormemente al conocimiento del interior solar, lo que ha llevado a los astrofísicos a sugerir aplicaciones parecidas en las estrellas pulsantes multiperíodi-

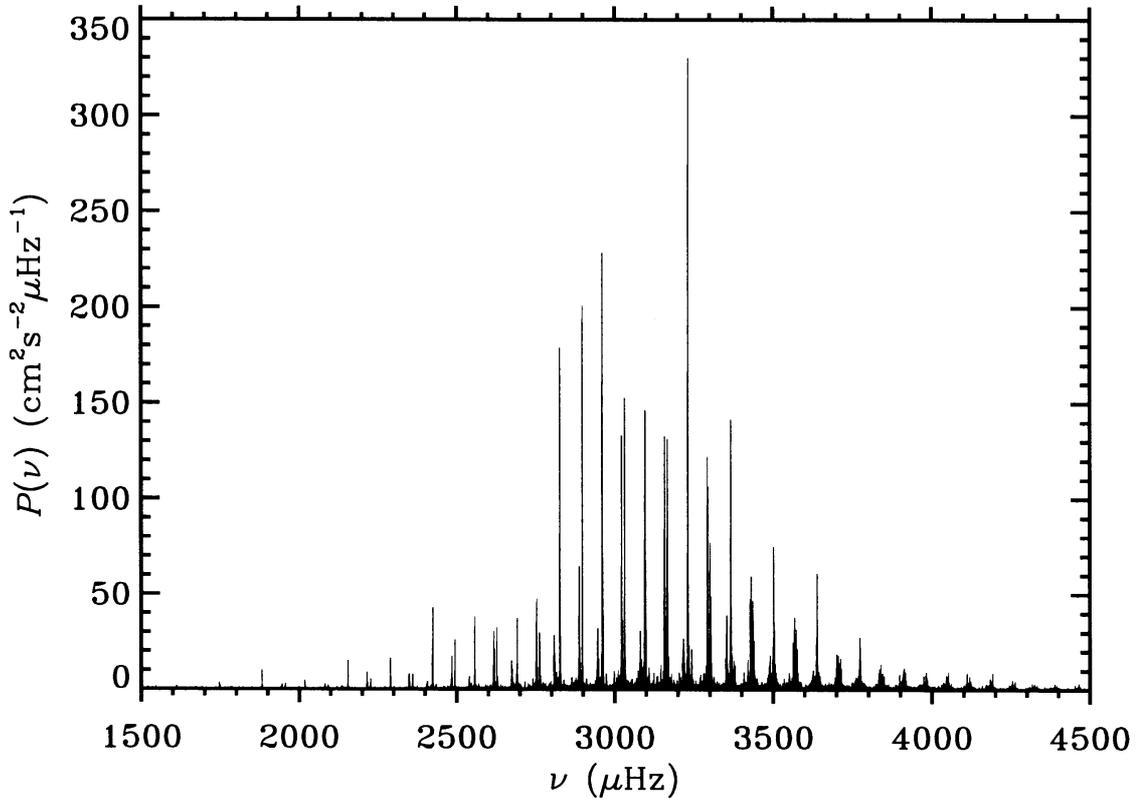


Figura 1.1: Espectro de potencias de las oscilaciones solares, obtenidas de observaciones Doppler en luz integrada sobre todo el disco solar. La ordenada está normalizada para mostrar la potencia de la velocidad por unidad de frecuencia. Los datos abarcan aproximadamente cuatro meses. Tomado de Christensen-Dalsgaard (1998).

cas conocidas. De hecho, parte del desarrollo de la teoría de las oscilaciones y de los métodos de análisis usados en la actualidad son fruto de la evolución de la sismología solar. Así, estos esfuerzos han sido dirigidos sobre objetos como las enanas blancas, los osciladores rápidos de tipo Ap, y en nuestro caso, las  $\delta$  Scuti, de las que hablaremos más extensamente en la Sec. 1.3. Otro nuevo conjunto de estrellas susceptibles de ser estudiadas son aquellas en las que se presume que su espectro de oscilación pueda ser semejante al del Sol.

### 1.2.1. Breves apuntes sobre heliosismología

El descubrimiento de las oscilaciones con periodos cercanos a los cinco minutos en el Sol se debe a Leighton et al. (1962), los cuales observaron que la superficie solar estaba compuesta por elementos con movimientos verticales, que ellos interpretaron como debidos a excitaciones locales en la base de la fotosfera, consecuencia de la sobrepenetración de los gránulos convectivos. Posteriores observaciones confirmaron la existencia de estas oscilaciones, aunque se abandonó la hipótesis de la excitación por gránulos, siendo reemplazada por la idea de que se trataban de modos propios de oscilación. Ulrich (1970) sugirió esta posibilidad al contrastar las observaciones realizadas hasta la fecha con las expectativas teóricas en un diagrama de diagnóstico (frecuencia temporal frente a longitud de onda espacial) de las oscilaciones. De-

safortunadamente, la baja resolución, tanto temporal como espacial de los datos, impidió el total convencimiento del resto de la comunidad científica. No fue hasta años más tarde, cuando los datos de mayor resolución proporcionados por Deubner (1975, 1977) y, posteriormente, por Rhodes et al. (1977), demostraron la semejanza entre los espectros teóricos realizados por Ando y Osaki (1975) y los observacionales, confirmando su origen como procedente de pulsaciones globales del Sol. Uno de los primeros resultados a destacar, conseguidos a partir de esta comparación, fue el aumento en un 50% de la profundidad de la capa convectiva en el modelo solar de la época (Gough, 1977).

La fuerza recuperadora en el caso de las oscilaciones solares es la presión (más concretamente, las diferencias de presión que producen las propias perturbaciones), por lo que estos modos son también denominados modos  $\mathbf{p}$  (ver Sec. 3.4.3). Estos, observados por Deubner, correspondían a escalas espaciales pequeñas en comparación con el tamaño del disco solar (grado  $\ell$  elevado). Poco tiempo después, con observaciones del disco solar integrado (Brookes et al., 1978; Claverie et al., 1979; Grec et al., 1980) se detectaron modos  $\mathbf{p}$  de  $\ell$  bajo, y más tarde (Duvall y Harvey, 1983) se obtuvieron los de grado  $\ell$  intermedio. Paralelamente a esta fase de descubrimiento de nuevos modos (actualmente se conocen unos  $10^7$  en un rango de frecuencias entre 1000 y 5000  $\mu\text{Hz}$ , con amplitudes de oscilación superiores en algunos casos a 10 cm/s), se empezó a hacer uso de toda esta información con el objetivo de obtener nuevos resultados sobre el interior solar: la profundidad de la capa convectiva (Berthomieu et al., 1980; Christensen-Dalsgaard et al., 1991), la velocidad del sonido en el interior solar por métodos de inversión (Christensen-Dalsgaard et al., 1985), o la medida del desdoblamiento rotacional de los modos y su aplicación a la determinación de la dependencia radial (Duvall y Harvey, 1984) y latitudinal (Schou et al., 1992) de la rotación angular, son buena muestra de ello. Estos resultados han permitido, a su vez, un avance sustancial en la teoría de la estructura y evolución tanto del Sol como, indirectamente, de las estrellas en general.

Nótese que las frecuencias de los modos  $\mathbf{p}$  de oscilación en el Sol son prácticamente equidistantes entre sí para el mismo valor de  $\ell$  y diferente  $n$ . Esto es una consecuencia del régimen asintótico en el que se encuentran.

Los resultados mencionados han sido conseguidos, en buena parte, gracias a la consecución de observaciones que han permitido obtener series ininterrumpidas de datos, más largas y precisas, mediante medidas del desplazamiento Doppler en la superficie solar y de la irradiancia. Así, se han concebido con este objetivo tanto campañas de observación en el Polo Sur (Grec et al., 1980), como redes observacionales con estaciones múltiples (BiSON, IRIS, GONG, TON; Palle, 1997) o misiones espaciales (SMM, PHOBOS, SOHO; Toutain, 1997). Estos avances en los procedimientos observacionales han permitido una mejora significativa en el conocimiento de los aspectos teóricos mencionados anteriormente.

## 1.2.2. Resultados en otras estrellas

Dejando aparte el caso solar, las enanas blancas pulsantes son, sin duda, los objetos de los que más resultados se han obtenido por medio de las técnicas de la astrosismología (Vauclair, 1997). El descubrimiento de las pulsaciones en estas estrellas por Landolt (1968) ha hecho de ellas unos objetos atrayentes. En efecto, la gran cantidad de modos detectados (más de cien en algunos casos), su gran amplitud de

oscilación (desde 0.3 mag, aproximadamente, hasta el límite de detección) y su corto periodo (100-2000 s), las hacen propicias para su estudio. Tanto es así que proyectos como WET (Whole Earth Telescope; Winget, 1993), que usa hasta doce telescopios con aperturas de 0.4 a 3.6 metros, bien distribuidos en longitud por el mundo, han sido dedicados exclusivamente al estudio de estas estrellas. A semejanza del caso solar, existen también equidistancias, aunque en este caso aparecen en los periodos, ya que son éstos los que cumplen la teoría asintótica. Como resultados interesantes conseguidos (Kawaler, 1993), caben destacar: la medida de los desdoblamientos rotacionales de las frecuencias, de la que se obtiene una estimación del periodo de rotación de la estrella (del orden de unos pocos días); una limitación máxima al campo magnético presente; medidas precisas de la masa estelar de hasta  $0.01 M_{\odot}$ ; y además, información acerca de la estratificación química en las capas externas. La precisión obtenida y un seguimiento continuado en el tiempo han permitido descubrir que los periodos tienden a disminuir, hecho éste que, sin embargo, no se ha conseguido reproducir todavía con los modelos (Kawaler et al., 1986). Nótese que, a diferencia de lo que ocurre en el Sol, la fuerza recuperadora de los modos observados en las enanas blancas es la gravedad, por lo que se les denomina modos **g** (ver Sec. 3.4.4).

Otros objetos peculiares de la Secuencia Principal (en adelante, **MS**, del inglés Main Sequence), como las estrellas *roAp* (rapid oscillating Ap), han sido también motivo de estudio (Kurtz, 1990). Sus extrañas sobreabundancias en tierras raras (Eu, Ho, Sr, entre otros), con espectros electromagnéticos modulados por la rotación, al igual que su campo magnético, las hacen interesantes. Las amplitudes de oscilación son inferiores a 8 mmag, con periodos de 4 a 15 minutos. La teoría más utilizada hasta el momento para explicar su comportamiento es la del modelo de rotor oblicuo (Babcock, 1949; Stibbs, 1950), en el que el eje de rotación y el del campo magnético están separados por un ángulo dado. El estudio de las oscilaciones ha permitido obtener el valor de este ángulo, confirmado posteriormente por medidas independientes del campo magnético (Kurtz et al., 1990). Al igual que en las enanas blancas, se ha observado una variación temporal de los periodos, aunque posiblemente asociada a un ciclo magnético como el solar (Kurtz et al., 1994, 1997). A pesar del parecido de las características de sus modos con los **p** solares, las peculiaridades de estas estrellas complican su modelado.

Se han realizado varios intentos de encontrar comportamientos oscilatorios en estrellas parecidas al Sol (tipo espectral F-G; Belmonte et al., 1990a,b), lo que choca con el inconveniente de su pequeñísima amplitud. En el caso solar, ésta es de unas  $3 \mu\text{mag}$  en luminosidad, y de 10 cm/s en velocidad. Sin embargo, afortunadamente, se estima que sobre objetos de mayor luminosidad, afectados por el mismo mecanismo de excitación (el cual es debido a la convección turbulenta, no al mecanismo  $\kappa$ ), los niveles de amplitud han de ser mayores (Houdek et al., 1995). Con el fin de minimizar el ruido, se han organizado campañas observacionales con grandes telescopios, llegándose a niveles de ruido de hasta  $7 \mu\text{mag}$  (nivel de detección de  $25 \mu\text{mag}$ ) en estrellas de M67 (Gilliland et al., 1993), encontrándose indicios no definitivos de presencia de modos en el espectro. Los últimos trabajos sobre  $\eta$  Bootis (Carrier et al., 2005), en los que se han llevado a cabo medidas de la velocidad radial de alta precisión, han permitido la identificación de 32 frecuencias entre 0.4 y  $1.0 \mu\text{Hz}$ . De hecho, se han encontrado las grandes y pequeñas diferencias entre los picos, con valores de  $\Delta\nu = 39.9\mu\text{Hz}$  y  $\delta\nu = 3.95\mu\text{Hz}$ , respectivamente. Asimismo, se

ha intentado aplicar técnicas de desplazamiento Doppler a tres candidatos:  $\alpha$  Cen A, Proción y  $\beta$  Hyi. Los resultados conseguidos hasta la fecha son tremendamente interesantes. Por ejemplo, en la primera estrella se han identificado 28 modos **p** en el rango entre 1.8 y 2.9 mHz (Bouchy y Carrier, 2002). Se espera la obtención de mejores resultados con la puesta en marcha de misiones espaciales como **COROT** (Baglin y The COROT Team, 1998), donde 4 ó 5 candidatos de este tipo (más otros secundarios existentes en el mismo campo de visión) serán escogidos para ser observados mediante fotometría durante unos 150 días cada uno, evitando los efectos del ruido atmosférico.

Por último, cabe destacar el desarrollo en estos últimos años de campañas observacionales sobre otras estrellas pulsantes de la MS, como las estrellas de tipo  $\gamma$  Doradus ( $\gamma$  Dor), que ofrecen periodos de pulsación muy largos, del orden de días, y cuyo mecanismo de excitación parece deberse al bloqueo del flujo en la base de la zona convectiva externa (Dupret et al., 2005b). De la misma manera, tenemos a las  $\beta$  Cephei (Dziembowski y Jerzykiewicz, 1996), que son estrellas pulsantes calientes de la MS, cuyo mecanismo de excitación es semejante al  $\kappa$ , pero la opacidad es, en este caso, generada por líneas de hierro. Las oscilaciones de ambos tipos de pulsantes parecen corresponderse con modos **g**. Ya más recientemente, se ha descubierto un nuevo tipo de estrellas pulsantes: las subenanas calientes EC 14026. Los espectros de amplitudes observados parecen prometedores, con decenas de modos detectados de periodos muy cortos (del orden de minutos) en la zonda de modos **p** (Koen et al., 1998).

### 1.3. Las $\delta$ Scuti

Tal y como comentábamos anteriormente, la banda de inestabilidad de las Cefeidas comprende la zona del diagrama HR en la que el mecanismo  $\kappa$  de excitación, efectivo en la región de la segunda ionización del helio, es capaz de generar las pulsaciones. En esta banda se encuentran, de mayor a menor luminosidad: las Cefeidas; las RR Lyrae en la rama horizontal de las gigantes; las  $\delta$  Scuti,  $\gamma$  Doradus y roAp cortando a la Secuencia Principal; y en la fase de enanas blancas, las ZZ Ceti. El interés que presenta el estudio de las  $\delta$  Scuti en la sismología estelar radica en su cercanía a la MS y en su carencia de peculiaridades como campos magnéticos intensos, abundancias químicas anómalas o velocidades de rotación demasiado elevadas. Las  $\delta$  Scuti se encuentran en un estado evolutivo muy temprano en el que comienzan a abandonar la MS, quemando hidrógeno en un núcleo convectivo mediante el ciclo CNO, o empezando su combustión en una capa, antes de entrar plenamente en la fase de subgigante. Esto permite que la física interna de estas estrellas se pueda modelar adecuadamente. Un muestreo de diferentes estrellas en distintas fases evolutivas, hasta la Post-MS, con espectros de amplitudes estudiados por la astrosismología, podría dar idea de los cambios que van sufriendo en su estructura interna.

#### 1.3.1. Características de las $\delta$ Scuti

Estos objetos recibieron tal nombre a partir de la estrella arquetipo  $\delta$  Scuti, cuyo comportamiento oscilatorio fue descubierto por Campbell y Wright (1900). En la tabla 1.1 se muestran sus principales características.

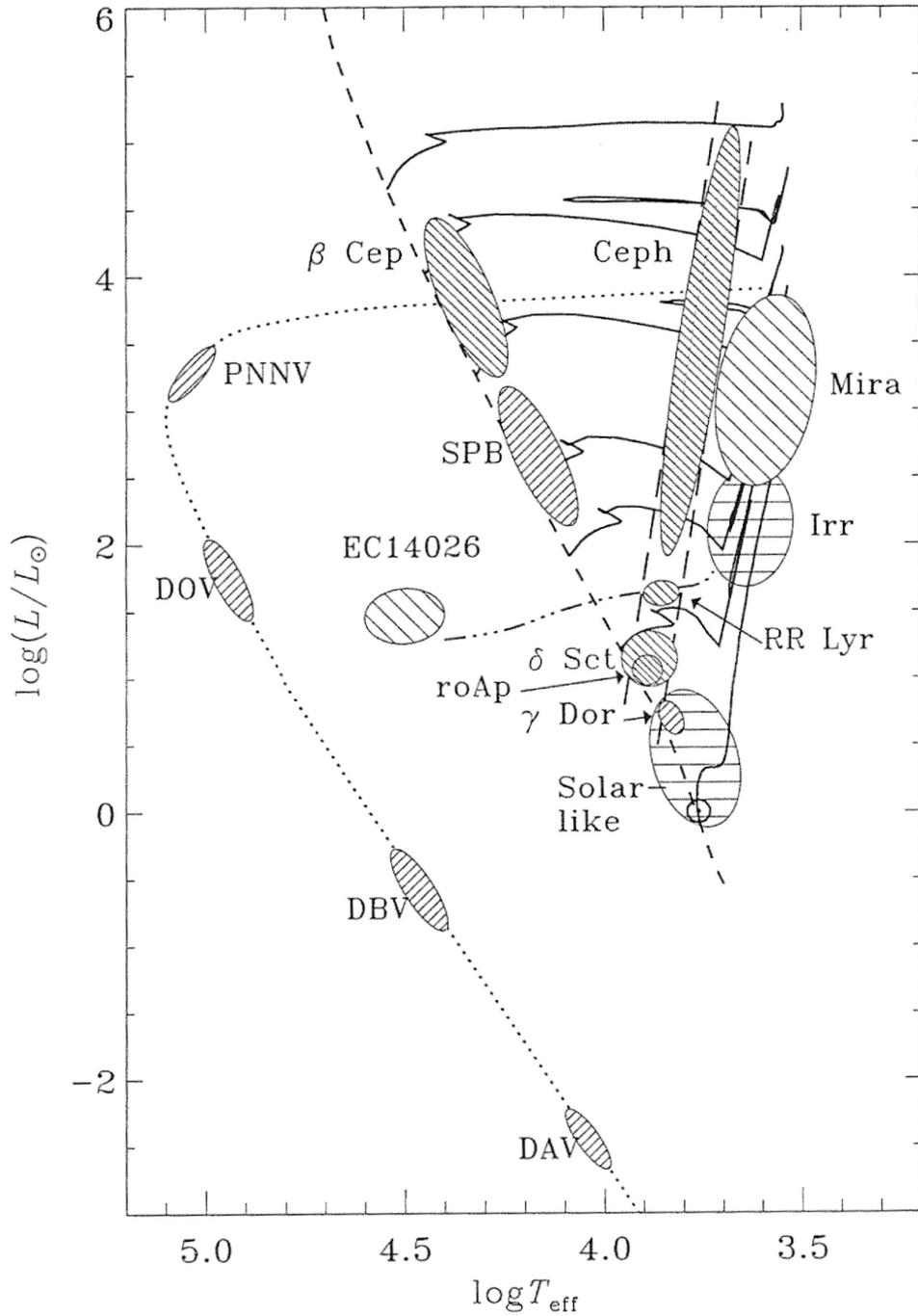


Figura 1.2: Diagrama de Hertzsprung-Russel (HR) donde se representan los diversos tipos conocidos de estrellas variables y la posición del Sol ( $\odot$ ). Las líneas continuas representan los caminos evolutivos de estrellas de 1, 2, 3, 4, 7, 12 y 20  $M_{\odot}$  (en orden ascendente). La línea discontinua representa el límite inferior de la Secuencia Principal, también denominada de edad cero (ZAMS). También se muestran las líneas que delimitan la banda de inestabilidad de las Cefeidas.

Tipo espectral:	A2-F0
Clase de luminosidad:	IV-V
Amplitudes de oscilación:	desde varias décimas de magnitud hasta el límite instrumental actual ( $\approx 0.1$ mmag). Valor típico de la amplitud de oscilación, pico a pico, en el filtro V de Johnson: $\Delta V \approx 20$ mmag.
Periodo de oscilación:	$P < 0.3$ días (30 min - 5 h)
Masa:	$1.5 - 2.5 M_{\odot}$
$T_{ef}$ :	6500 – 8500 K
$M_V$ :	$0.0 < M_V < 3.0$
Luminosidad:	$5 < L/L_{\odot} < 80$

Tabla 1.1: Principales características de las estrellas  $\delta$  Scuti.

Estrellas variables	Pulsantes	Cefeidas	Alta amplitud: $\Delta V > 0.3$ mag (Cefeidas enanas, AI Vel, RR)
		RRLyrae	
		roAp	
		$\gamma$ Doradus	
		$\beta$ Cephei	
		ZZ Ceti	
		$\delta$ Scuti $\Rightarrow$	Baja amplitud: $\Delta V < 0.3$ mag
	Eclipsantes		
	Eruptivas		

Tabla 1.2: Clasificación de las estrellas variables hasta llegar a las  $\delta$  Scuti.

Generalmente se trata de estrellas de Población I ( $[Fe/H] \geq -0.3$  y pequeña velocidad de dispersión), salvo un pequeño grupo pobre en metales y con alta velocidad de dispersión, cuyo principal ejemplo es SX Phe, y que se considera actualmente como un subgrupo de Población II (Baglin et al., 1980).

### 1.3.2. Historia

Históricamente, las  $\delta$  Scuti han sido clasificadas de varias formas, en diferentes épocas. Adjudicadas inicialmente al grupo de las  $\beta$  CMa, pasaron a considerarse del tipo RR Lyrae, debido a su semejanza en el periodo de los modos. Smith (1955) separó de éstas un subconjunto de estrellas de periodo y luminosidad menores que los habituales, llamándolas “Cefeidas enanas”, por su comportamiento parecido al de las Cefeidas clásicas. Esto fue ratificado al comprobarse que pertenecían a poblaciones distintas. A veces se les denomina también estrellas AI Vel (Bessell, 1969) o variables RR (Kukarkin, 1969). Eggen (1956a,b) detectó un grupo de variables de Población I de periodo muy corto (“*ultra short periodic variables*”), con periodos y luminosidades aún menores que los de las Cefeidas enanas, que él denominó  $\delta$  Scuti, al estar formado

por:  $\delta$  Scuti, DQ Cep, CC And,  $\delta$  Del y  $\rho$  Pup. Las Cefeidas enanas y las  $\delta$  Scuti se diferenciaban en la mayor amplitud de aquéllas ( $\Delta V > 0.3$  mag), con escasos modos de oscilación (1 ó 2), además radiales, frente al carácter multiperiodico y probablemente no radial, debido a la gran proximidad entre picos (Shobbrook y Stobie, 1974), que presentaban estas últimas. Las investigaciones se sucedieron con el fin de establecer si estas diferencias se debían a un distinto estado evolutivo de ambos grupos (McNamara y Feltz, 1978; Wolff, 1983; McNamara, 1985). De hecho, se intentó incluso encuadrar a las Cefeidas enanas dentro de una rama sub-horizontal mediante modelos de evolución, con resultados fallidos (Fernley et al., 1987). Hoy en día existe un consenso general en que todas ellas son del mismo tipo (Baglin et al., 1973; Breger, 1979, 1980), unas de alta amplitud (**HADS**, del inglés High-Amplitude  $\delta$  Scuti), y otras, más numerosas, de baja amplitud. Se cree que la razón de que haya menos  $\delta$  Scuti de alta amplitud estriba en que se encuentran en una fase tardía de la Secuencia Principal, y por tanto, su evolución es más rápida, aunque por ahora no se ha podido comprobar observacionalmente, ya que no se han hallado estrellas de este tipo en cúmulos abiertos (Petersen y Christensen-Dalsgaard, 1996). En la tabla 1.2 se muestra un esquema de clasificación de las estrellas variables que clarifica la situación actual de las  $\delta$  Scuti.

### 1.3.3. Resultados estadísticos

Desde las 5 estrellas  $\delta$  Scuti catalogadas por Eggen en 1956, no hubo ningún otro objeto añadido hasta 1966, fecha a partir de la cual, y hasta la actualidad, el número de miembros de este grupo ha aumentado considerablemente gracias a la realización de búsquedas sistemáticas (Danziger y Dickens, 1967; Millis, 1967; Jorgensen et al., 1971; Breger, 1966, 1969, 1972, 1979). Todas las estrellas encontradas hasta noviembre de 1993 han sido compiladas y catalogadas en un excelente trabajo de Rodríguez et al. (1994) con una muestra final de 298 objetos. Estos estudios han demostrado que las  $\delta$  Scuti son estrellas bastante comunes, encontrándose que su porcentaje en la banda de inestabilidad de los cúmulos es aproximadamente igual que en las estrellas de campo ( $\approx 1/3$ ; Wolff, 1983). Algunos de los resultados observacionales más destacados son los siguientes, siendo  $\Delta V$  la amplitud del modo dominante:

- **El número de estrellas  $\delta$  Scuti aumenta sustancialmente para amplitudes  $\Delta V$  bajas**, lo que apoya la suposición de que la clasificación de una estrella como variable o no, es un efecto de selección causado por la capacidad instrumental del momento.
- **La amplitud  $\Delta V$  disminuye exponencialmente con el aumento de la velocidad proyectada de rotación de la estrella,  $v \sin i$** . Para estrellas  $\delta$  Scuti se encuentra  $\langle v \sin i \rangle \sim 100$  km/s, mientras que para las de alta amplitud se tiene  $\langle v \sin i \rangle < 20$  km/s.
- **Las  $\delta$  Scuti de baja amplitud, más cercanas a la MS, presentan complejos espectros de frecuencias, mientras que las de alta amplitud, más luminosas y supuestamente más evolucionadas, pulsan generalmente en 1 ó 2 modos**. Este hecho, ya apuntado por Breger (1979, 1991),

es probablemente debido a la mayor presencia de modos no radiales en el primer tipo, los cuales se encuentran desdoblados por efecto de la rotación. Sin embargo, existen casos que no cumplen esto, como el de la estrella de alta amplitud AI Vel, en la que recientemente se han detectado 5 modos de oscilación (Walraven et al., 1992). Esto apunta a que el hecho remarcado al principio de este punto puede tratarse de un sesgo observacional debido al umbral actual de detección instrumental, ya que los modos de alta amplitud de esta estrella eran sólo dos (ver por ejemplo lo que comentamos sobre la estrella Altair en la Sec. 1.3.5).

- **El periodo de las pulsaciones tiende a aumentar en osciladores de mayor amplitud.**

### 1.3.4. Mecanismo de excitación

Desde que Zhevakin (1953) sugiriera el mecanismo  $\kappa$  como agente excitador en las Cefeidas, la localización en el diagrama HR de la región donde este mecanismo es eficiente ha sido el objetivo de muchos autores. Esta región, o banda de inestabilidad, se puede determinar tanto teóricamente (Petersen, 1976; Stellingwerf, 1979; Breger et al., 1998) como observacionalmente (Breger, 1979, 1995) (ver Fig. 1.2). Estos límites observacionales vienen dados por una franja comprendida entre las dos líneas (8800 K en ZAMS, 8400 K a  $M_V = 0.65$ ) y (7500 K en ZAMS, 6950 K a  $M_V = 1.7$ ), donde ZAMS son las siglas de *Zero-Age Main Sequence*, o Secuencia Principal de Edad Cero. A éstas se las denomina como *borde azul* y *borde rojo*, respectivamente. Chevalier (1971) ya encontró, usando algunos modelos representativos de estas estrellas, que el modo fundamental radial y el primer sobretono radial podían estar excitados eficientemente ante la acción del mecanismo  $\kappa$ , que se desarrolla en la región de ionización del helio de las  $\delta$  Scuti. Posteriormente se encontró el mismo resultado para modos no radiales, o sea, de  $\ell > 0$  (Dziembowski, 1977; Lee, 1985). Nótese que, junto a los mecanismos de excitación, existen otros de amortiguación o saturación que impiden que la amplitud de la oscilación se incremente indefinidamente.

Es de destacar que tanto las estrellas Am, ricas en metales, como las roAp, comparten la misma zona en la banda de inestabilidad que las  $\delta$  Scuti, siendo sin embargo su comportamiento completamente diferente. En las Am no se producen oscilaciones (aunque este hecho está actualmente en discusión, Kurtz et al., 1995), debido probablemente al hundimiento del helio (desapareciendo por tanto la región de ionización), mientras que los metales afloran a la superficie debido a un empuje de la presión de la radiación que actúa de forma selectiva, dando lugar a un espectro electromagnético peculiar, rico en líneas metálicas. Asimismo, las roAp muestran unos periodos típicos mucho menores que los de las  $\delta$  Scuti, cuyo origen puede hallarse en la influencia del gran campo magnético existente en estas estrellas.

### 1.3.5. Modos de oscilación

La observación de la variación temporal de los periodos de oscilación de una estrella es un factor potencialmente contrastable con el cambio esperado debido a la evolución estelar. Sin embargo, los últimos avances en esta confrontación teórico-

observacional (Breger et al., 1998) no parecen conducir a resultados definitivos. Los estudios de estos autores se han concentrado principalmente sobre estrellas  $\delta$  Scuti de alta amplitud con pulsación radial, para las que se encontró una variación  $(1/P) dP/dt$  del orden de  $10^{-7}$  años $^{-1}$ , en algunos casos positiva y en otros negativa. Esta es aproximadamente un orden de magnitud mayor que la esperada para la evolución a lo largo de la Secuencia Principal, debida fundamentalmente al cambio en la densidad media. Esta, además, debiera ser siempre positiva hasta llegar a la fase de contracción global (fin de la MS). Según los modelos calculados, varias de estas estrellas se encontraban en esta zona, pero la variación de sus periodos era, sin embargo, negativa. La preferencia por analizar los modos radiales viene dada por la menor dependencia que presentan con distintos fenómenos, como la rotación. Los mismos autores encontraron incluso casos, como el de AI Vel, en el que el primer sobretono radial sufre variaciones, mientras que el fundamental radial permanece constante, cuando ambos debieran comportarse aproximadamente de la misma forma. En pulsadores de Población II, tipo SX Phe, se daban incluso fenómenos de saltos abruptos del orden de  $\Delta P/P \approx 10^{-6}$ . Breger et al. (1998) dedujeron, por tanto, que otros efectos no evolutivos, como interacciones no lineales entre los modos, debían estar enmascarando las variaciones evolutivas.

Un posible medio para aumentar la información que se pueden obtener de estas estrellas es incrementar el número de frecuencias detectadas. Con este objetivo en mente, varias redes internacionales, como las ya mencionadas en la sec 1.2, han tratado de recoger el mayor número posible de horas de observación, con la intención de minimizar el ruido en el espectro de Fourier. Hasta el momento se han encontrado varios objetos con más de una decena de modos observados (BH Psc, Mantegazza et al., 1996), pero ha sido en FG Vir donde se ha detectado un mayor número de ellos, 79 en total, entre 5.7 y 44.3 c/d, con amplitudes superiores a las 0.2 mmag, gracias a las campañas multisite realizadas durante varios años, que suman un total de 926 horas de observación (Breger et al., 2005). Más recientemente, se ha obtenido un número parecido de frecuencias con los datos espaciales del satélite **MOST**, que actualmente están siendo estudiadas con prometedoras perspectivas (Moya et al., en preparación). Siguiendo en esta misma línea, se han desarrollado otras campañas, como STACC (Frandsen, 1998), sobre BN y BV Cnc, dos estrellas  $\delta$  Scuti del cúmulo del Pesebre, que han proporcionado un número aún mayor de horas de observación, así como una mejor información, al disponerse de series tanto fotométricas como espectroscópicas.

Asimismo, recientemente se ha descubierto el carácter pulsacional multiperiodico de una estrella brillante ( $M_v \sim 4$ ), y tradicionalmente constante, Altair (Buzasi et al., 2005), lo que ha permitido su estudio sísmico (Suárez et al., 2005). Este descubrimiento ha supuesto una evolución en nuestra consideración de las estrellas pulsantes en relación a su brillo, ya que la disminución observada con el brillo en el número de estrellas variables de la banda de inestabilidad puede deberse simplemente a un sesgo observacional.

Otro hecho a destacar es el por qué no aparecen todos los modos posibles en la zona del espectro de frecuencias en la que se encuentra la señal. Esto es, si comparamos el espectro teórico con el observacional en dicha zona, vemos que el número de modos detectados es siempre mucho menor que el que debiera hallarse, dando lugar a la creencia en la existencia de *mecanismos de selección*. Incluso en el caso de FG Vir, este hecho es claramente visible, llegándose a detectar tan sólo un 20 % de to-

dos los modos con  $\ell \leq 2$  teóricamente esperados según la teoría lineal de excitación, lo que induce a pensar que el problema no proviene sólo de la ocultación de parte de los modos excitados por el ruido espectral. Además, esta selección observada no se reduce a concentrar la región de modos detectados a una porción más pequeña que la excitada teóricamente (aunque esto no siempre se produce), sino que también actúa a un nivel más localizado, anulando sólo determinados modos situados en ciertas partes del espectro, según una ley hoy por hoy desconocida. Dos de estos mecanismos han sido planteados por Dziembowski y Krolikowska (1990):

- Atrapamiento de los modos: La energía de los modos de oscilación se reparte de distinta manera en el interior de la estrella. Tal y como veremos en las Secs. 3.4.3 y 3.4.4, en los modos **g** la energía se concentra fundamentalmente en el interior, al contrario de lo que ocurre para los modos **p**. El núcleo convectivo de las  $\delta$  Scuti evoluciona creando una cavidad resonante para los modos gravitatorios, cuya oscilación se propaga después como modo **p** en la envoltura externa, dando lugar a lo que se denomina como “*modo mixto*”. Este efecto se acentúa con la evolución. Dziembowski y Krolikowska (1990), a través del estudio de modelos estelares en distintas etapas evolutivas, desde la ZAMS hasta la Post-MS, determinaron que el porcentaje de energía de los modos con  $\ell = 1$  que se desarrolla en la cavidad gravitatoria es pequeño, al contrario de lo que se encuentra para  $\ell = 2$  ó 3, por lo que se dice que los primeros están “atrapados” en la envoltura. Este proceso es potencialmente más efectivo en las estrellas evolucionadas, donde los modos de condición mixta son más abundantes. Esto debiera producir una amplitud en la superficie para los de  $\ell = 1$  mayor, creándose un efecto de selección.
- Resonancia paramétrica: Acoplamientos no lineales (Dziembowski y Krolikowska, 1985) permiten que modos inicialmente inestables crezcan hasta una determinada amplitud, transfiriendo parte de su energía a otros estables que cumplan ciertos requisitos en frecuencia y estructura espacial  $(\ell, m)$ , de forma que sólo un pequeño número de ellos estarían acoplados. El proceso más directo involucra ternas de frecuencias donde un modo **p** es el inestable y otros dos de tipo **g** son los estables. Las frecuencias deben cumplir:  $\omega_p \approx \omega_{g_1} + \omega_{g_2}$ , con  $\omega_{g_1} \approx \omega_{g_2}$ . Estos procesos pueden posteriormente desencadenarse en cascada, haciendo que los modos **g** indirectamente excitados se acoplen a su vez con otros. Esta transferencia de energía limitaría las amplitudes de los modos **p** inestables más aún que la propia saturación del mecanismo  $\kappa$ , haciendo, no obstante, que los **g** acoplados, a pesar del aporte de energía, permanezcan todavía por debajo del umbral de detectabilidad. Este efecto se ve reforzado por la rotación, explicando así las menores amplitudes observadas en estrellas más próximas a la Secuencia Principal, en comparación con las que presentan las más evolucionadas. Los mismos autores (Dziembowski y Krolikowska, 1990) defienden el hecho de que al encontrarse los modos con  $\ell = 1$  atrapados en la envoltura, su interacción con los modos **g** es menor, y por tanto, este efecto de selección no limitaría tanto su amplitud, favoreciendo su detectabilidad.

Asimismo, Shibahashi (1987) propone el amortiguamiento radiativo en las regiones centrales, más eficaz en estrellas evolucionadas, como causa de la desaparición de modos no radiales que se produce en las mismas.

**T = 7552 K, Logg = 3.85, Q = .033 d,  $\alpha = 0.5$**

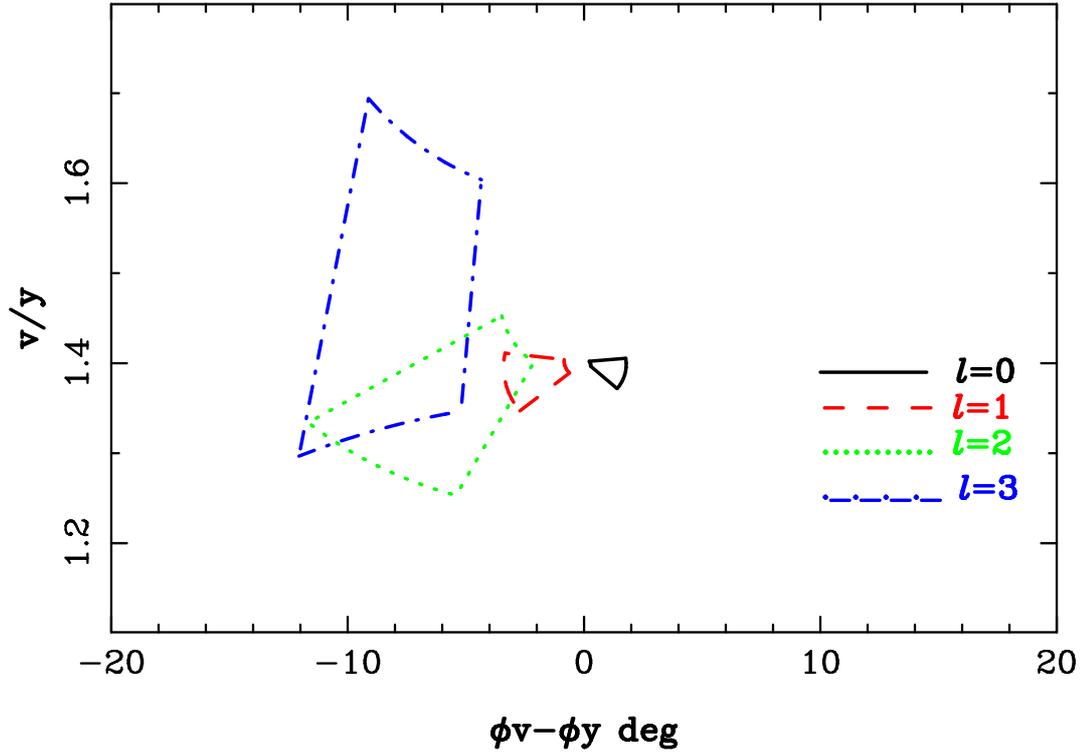


Figura 1.3: Diagramas  $A_v/A_y$  frente a  $\phi_v - \phi_y$  para la identificación de los modos de una estrella  $\delta$  Scuti. Las curvas cerradas delimitan las regiones donde se deben encontrar los modos con  $\ell = 0, 1, 2$  y  $3$ . Tomado de Garrido et al. (1990).

El averiguar qué mecanismos producen la selección observada pasa indiscutiblemente por una identificación previa de los modos  $(n, \ell, m)$ . Desde el punto de vista observacional, este problema ha sido atacado utilizando una gran variedad de medios, empleando tanto observables fotométricos como espectroscópicos.

El método fotométrico (Watson, 1988; Garrido et al., 1990) se basa en parametrizar las variaciones relativas entre luminosidad y color debidas a las pulsaciones, observables a partir de series fotométricas en distintos filtros. Estas variaciones son dependientes del grado angular  $\ell$ , así como de parámetros no adiabáticos y del modelo de atmósfera empleado. Se generan diagramas teóricos del tipo  $A_{col}/A_\lambda$  frente a  $\phi_{col}/\phi_\lambda$ , que ocupan diferentes zonas dependiendo del valor de  $\ell$  (ver Fig. 1.3).  $A_i$  es la amplitud de la oscilación de la magnitud estelar en el filtro  $i$ , y  $\phi_i$  es la fase correspondiente. Sobre estos diagramas se superponen los valores obtenidos a partir de las curvas de color y de luz observadas para cada modo de oscilación, lo que permite su identificación. Sin embargo, es necesaria una elevada precisión, principalmente en la diferencia de fase ( $\pm 5^\circ$  o mejor), para discernir entre diferentes valores de  $\ell$ , teniendo en cuenta además las incertidumbres de los parámetros usados en los diagramas teóricos. Su uso se ha revelado eficaz en los modos radiales ( $\ell = 0$ ) de estrellas  $\delta$  Scuti de alta amplitud (Rodríguez et al., 1996), donde la relación señal-ruido es bastante elevada. No obstante, estudios teóricos más recientes (Moya et al., 2004a,b,c; Grigahcène et al., 2004, 2005; Dupret et al., 2004, 2005b)

han permitido su aplicación a otros modos no radiales (ver, por ejemplo, Dupret et al., 2005a).

El método espectroscópico trata de obtener información espacial (de distintos puntos de la superficie estelar) a través de la variación temporal del perfil de las líneas de absorción, lo que lleva aparejado unos requerimientos instrumentales altos. Esto se ha tratado de conseguir de diferentes maneras:

- Aerts (1996), basándose en el trabajo de Balona (1986), construyó un discriminante en el que se comparan las amplitudes observadas de los tres primeros momentos estadísticos de los perfiles, con las amplitudes teóricas. La cuestión se reduce a encontrar qué identificación  $(\ell, m)$  es la que minimiza el discriminante para cada modo detectado. Esto lleva consigo la determinación de parámetros libres tales como el ángulo de inclinación.
- Telting et al. (1997) comparan distribuciones teóricas y observacionales de la amplitud y la fase de la oscilación para cada modo, obtenidas a partir de las variaciones de la intensidad sobre el perfil de la línea, en cortes de longitud de onda constante. Con esto se pueden determinar los valores de  $\ell$  y de  $m$  de cada uno de ellos.
- Kennelly y Walker (1996), y Kennelly et al. (1998) utilizan el método de las imágenes Doppler-Fourier con el que, tomando sucesivos espectros de la estrella con alta resolución, se transforman las variaciones del perfil espectral en un espacio de Fourier bidimensional, en el que se puede determinar simultáneamente la frecuencia temporal y espacial de los modos. Este método es más sensible a valores de  $\ell$  elevados que el basado en medidas fotométricas, siendo más fácil de detectar unos valores de  $m$  que otros, dependiendo del ángulo de inclinación  $i$  de la estrella.
- Viskum et al. (1998) aplican un método semejante al fotométrico, en el que se usa un diagrama que representa cocientes de amplitudes de oscilación tanto espectroscópicas (anchura equivalente y velocidad radial) como fotométricas. El valor de  $\ell$  se determina según la zona del diagrama en la que se localicen los valores observados.

### 1.3.6. Rotación

Ya hemos destacado que la rotación constituye un fenómeno físico de vital importancia para entender la estructura y evolución de las estrellas. En concreto, las  $\delta$  Sct presentan velocidades de rotación moderadamente elevadas,  $80 < v \sin i < 200$  km/s, por lo que un tratamiento minucioso de los efectos de la rotación es esencial para la sismología de estas estrellas. A pesar de los progresos realizados en el tratamiento de la rotación (Goupil et al., 2000), ésta aún constituye un problema importante en su modelización. Las dificultades que aparecen son numerosas: la determinación de parámetros estelares fundamentales, la complejidad de los espectros de pulsación debido al desdoblamiento de los modos o las incertidumbres concernientes a la redistribución del momento angular son sólo algunos ejemplos. Así pues, se vuelve indispensable la comprensión adecuada de la rotación (Michel et al., 1999),

lo que llevará, no solamente a mejorar el cálculo teórico de las frecuencias de oscilación, sino a la obtención de los parámetros necesarios para la comparación con las observaciones.

En lo referente a los efectos sobre la estimación de la temperatura efectiva y la luminosidad, Michel et al. (1999) expuso que era posible obtener una estimación de los parámetros corregidos por la rotación, trabajo posteriormente ampliado por Pérez Hernández et al. (1999), que incluye el oscurecimiento gravitatorio.

Por otro lado, el equilibrio existente entre la turbulencia rotacional inducida y la circulación meridional da lugar a la mezcla de los elementos químicos y a una redistribución del momento angular (Zahn, 1992), que afecta tanto al perfil de rotación como a la evolución de la estrella. Se espera que las estrellas de masa intermedia no roten uniformemente como un sólido rígido. Zahn (1992) propuso que, como resultado de una fuerte anisotropía en la turbulencia, la estrella ha de presentar capas concéntricas con velocidades de rotación diferentes.

Dado que las  $\delta$  Sct presentan frecuentemente velocidades de rotación en el rango  $100 < v \sin i < 200$  km/s, aparecen numerosas incertidumbres en la identificación de los modos, que se suman a los ya de por sí complejos espectros de oscilación que muestran estas estrellas. Recientemente, se ha encontrado que la rotación altera la estructura interna a través de un equilibrio hidrostático modificado, y lo que es más importante, de la mezcla causada por la circulación y/o inestabilidades inducidas por la rotación (Zahn, 1992; Maeder y Meynet, 2000; Heger et al., 2000). Más aún, el patrón característico de simetría del *split* o desdoblamiento rotacional se rompe.

En el contexto del análisis perturbativo, los efectos de segundo orden inducen fuertes asimetrías en los multipletes (Saio, 1981; Dziembowski y Goode, 1992) y desplazamientos en las frecuencias que no pueden ser despreciados ni siquiera para modos radiales. En este punto, es importante destacar el reciente artículo de Suárez et al. (2006), que utilizaremos extensamente en este trabajo.

## 1.4. Objetivos y metodología

A la luz de lo expuesto en los apartados anteriores, las estrellas  $\delta$  Scuti constituyen un grupo muy interesante desde el punto de vista de la astrosismología. Generalmente, la ausencia de peculiaridades, como campos magnéticos intensos o abundancias químicas anómalas, posibilitan que su modelización sea relativamente sencilla. La comparación de los resultados teóricos con los datos observacionales permite conocer su estructura interna de forma bastante precisa, así como la dependencia de las propiedades astrosismológicas con ésta. Esto permite acotar los rangos de ciertas características físicas, y conocer los límites de aplicabilidad de algunas teorías o tratamientos de fenómenos estelares, como la convección o la interacción de la pulsación con la atmósfera.

Con este objetivo en mente, se han tomado tres estrellas  $\delta$  Scuti (**RV Ari**, **29 Cyg** y **HD 205**), analizadas mediante fotometría Strömngren en el Instituto de Astrofísica de Andalucía. Los modelos estelares en equilibrio se han obtenido a partir del código de evolución **CESAM** (Morel, 1997). Dado que siempre existe un error, inherente al método observacional, en la determinación de la posición de las estrellas en el diagrama HR (mediante la temperatura efectiva y la gravedad), y de la composición química atmosférica, existe una “*caja de error*” en dicho diagrama,

dentro de la cual se puede garantizar que la estrella se encuentra situada con una probabilidad bastante elevada. A esta zona se le denomina *caja fotométrica*. Se han calculado, pues, cinco modelos para cada estrella, uno situado en el centro de dicha caja, más otros cuatro, uno por cada esquina. Estos modelos delimitan el rango posible de masa, temperatura y luminosidad de la estrella observada, que por otra parte es en principio desconocido (ya que no se trata en ningún caso de estrellas binarias).

Por cada uno de los modelos se han tomado varios valores posibles del parámetro  $\alpha$  de la teoría **MLT** (ver Sec. 2.4.2), utilizada ampliamente en el tratamiento de la convección, no sólo en este trabajo, sino en la mayoría de las modelizaciones de estrellas que se lleva a cabo hoy en día. También se ha obtenido un modelo adicional utilizando la **FST** (descrita en la Sec. 2.4.3), con el objeto de comparar los resultados obtenidos con las dos teorías. Asimismo, se ha incluido, en el tratamiento de la atmósfera estelar, la descripción de atmósfera gris, y los modelos de atmósfera de Kurucz (ver Sec. 2.3). Con todo esto se pueden estudiar las variaciones de las propiedades pulsacionales de cada una de las estrellas cuando se modifican algunas de sus características físicas.

El estudio de las propiedades astrosismológicas requiere de la existencia de un código de pulsación. En este trabajo hemos hecho uso de dos diferentes. El primero (Moya et al., 2004a,b) proporciona información de las propiedades de las oscilaciones no adiabáticas, y en concreto, de los observables no adiabáticos, incluyendo los resultados obtenidos a partir de la interacción de la pulsación con la atmósfera. Por un lado, el estudio de la variación de estas variables con las características de los modelos de evolución obtenidos permite determinar, como ya se ha comentado, los límites de validez de las teorías utilizadas en los cálculos de estructura. En segundo lugar, puede mejorarse el conocimiento que actualmente se posee con respecto a los valores que deben tomar ciertos parámetros físicos de las teorías empleadas (el mejor ejemplo es el parámetro libre  $\alpha$  utilizado en las teorías de la convección). Asimismo se ha estudiado el comportamiento de dichos observables a lo largo de la caja fotométrica. Por último, se ha analizado su evolución a lo largo de la vida de uno de los modelos, en concreto el central. Con ello se pretende conocer la dependencia de estos observables con la temperatura efectiva de la estrella, con el objeto de ampliar algunos de los trabajos ya realizados con anterioridad.

Asimismo, la información proporcionada por este código puede ser utilizada en un algoritmo que proporcione los valores teóricos de amplitudes y fases en los distintos filtros de la fotometría Strömgren, comparables de forma directa con los resultados observacionales. Dicho código también ha sido desarrollado en nuestro grupo, por Garrido et al. (1990), lo que nos permite llevar a cabo una identificación de los modos observados. También se ha llevado a cabo en este apartado un estudio de la evolución de los índices de color, de modo que, al analizar todos los datos de forma conjunta, podamos acotar aún más los valores posibles de la temperatura efectiva y de la gravedad (o luminosidad), y como consecuencia de ello, de la masa y de la edad de la estrella.

En el caso de **RV Ari** se han obtenido algunos modelos adicionales con distintas metalicidades, con el objeto de cuantificar en qué medida dependen de esta variable los observables no adiabáticos o la identificación de los modos.

Por otro lado, la rotación juega un papel importante, de forma general, en el modelado e interpretación de este tipo de estrellas (Sec. 1.3.6). Para tener en cuenta

los efectos de ésta disponemos de una serie de herramientas adaptadas para ello: el propio código de evolución **CESAM** y el segundo de nuestros códigos de pulsación, **FILOU** (Suárez, 2002), con el cual podemos calcular las frecuencias propias adiabáticas de nuestros modelos corregidos de los efectos de la rotación, hasta segundo orden. Entre estos efectos se encuentra la degeneración accidental por rotación que se produce en los modos próximos en frecuencia y bajo ciertas reglas de selección. Particularmente, este trabajo de Tesis es pionero en el estudio de algunos parámetros relacionados con dicha degeneración por rotación, que pueden resultar muy interesantes para la mejor comprensión e interpretación de los espectros de oscilación de las  $\delta$  Sct. Además, **FILOU** es el único código a nivel mundial capaz de considerar una rotación diferencial radial en el cálculo de las oscilaciones adiabáticas. Con el mismo, Suárez et al. (2006) estudiaron teóricamente el impacto de la misma sobre el espectro adiabático, concluyendo que el efecto resultante podrá ser medido con el satélite **COROT**. Así pues, en este trabajo utilizamos por primera vez este tipo de herramientas a una muestra de estrellas (las tres descritas anteriormente), y comparamos los resultados con los que se obtienen usando la rotación uniforme clásica.

Para cada uno de los cinco modelos de la caja fotométrica analizados anteriormente se ha cuantificado en qué medida afecta la rotación a los modos individuales (variaciones en la frecuencia, grado de mezcla entre modos, etc). También se ha investigado la evolución de los acoplamientos y de los coeficientes de contaminación a lo largo de la vida del modelo central de la caja fotométrica, usando para ello dos posibles tratamientos del transporte angular en el interior estelar: la *rotación uniforme* y la *rotación diferencial*.

Por otra parte, es conocido (Daszyńska-Daszkiewicz et al., 2002) que la presencia de la rotación puede modificar los diagramas de color, lo que a su vez puede afectar a la identificación de los modos. Se han calculado estos diagramas para algunos pares de modos acoplados, con el objeto de analizar las causas de la morfología de las curvas que aparecen, y de obtener indicios que permitan llevar a cabo una identificación adecuada en estos casos.

Por último, se han utilizado los Diagramas de Petersen en dos de las estrellas (**RV Ari** y **29 Cyg**) con el objeto de mejorar la identificación de los modos, por un lado, y de acotar algunas variables de las mismas (en concreto masa, composición química, y velocidad de rotación).

Con el uso de todas las herramientas presentadas, se han podido obtener conclusiones acerca de las propiedades pulsacionales de estrellas reales, e información sobre su estructura interna, objetivo último de la astrosismología. Con esto hemos pretendido mostrar qué información puede proporcionarnos ésta en el estado de desarrollo actual, así como los límites de validez de ciertas teorías usadas abundantemente en la Física Estelar (como la **MLT** o la **FST** para la convección). Esto impone, por un lado, cotas al conocimiento que podemos obtener del interior estelar, lo que proporciona a su vez un punto de partida muy interesante para investigaciones futuras. Por otro, sirve de base como una posible metodología de trabajo que puede ser aplicada masivamente a la gran cantidad de datos que esperan obtenerse de las misiones espaciales (como por ejemplo, **COROT** o **MOST**).

Con todos estos objetivos en mente, pasamos a presentar detenidamente el trabajo desarrollado, empezando por una breve exposición de la teoría de las oscilaciones estelares en los capítulos inmediatamente posteriores.

## Capítulo 2

# Modelos de Estructura Estelar

Estudiamos en este capítulo las ecuaciones que definen el estado de equilibrio estelar, el cual, una vez perturbado, conduce a las ecuaciones de oscilación, sobre las que se basa todo el trabajo posterior. Dicho estado de equilibrio viene determinado por las ecuaciones de la Hidrodinámica, convenientemente adaptadas a las condiciones que usualmente se encuentran en las estrellas. Estas ecuaciones no bastan por sí mismas para describir el estado de una estrella o su evolución, sino que son necesarias una serie de condiciones de contorno, algunas de las cuales se aplican en la atmósfera estelar. El tratamiento exacto de esta zona es muy complicado, por lo que se llevan a cabo una serie de aproximaciones que permiten su resolución numérica. En este capítulo se describen brevemente también algunos de los modelos actualmente existentes.

Por otra parte, la presencia de la convección en el interior estelar provoca cambios en la estructura interna, y por tanto, en la evolución de las estrellas, afectando asimismo a las propiedades de las oscilaciones, como tendremos ocasión de comprobar más adelante. Es necesario, pues, el estudio de estas zonas convectivas. Sin embargo, la complejidad de las ecuaciones en este caso es tal, que su resolución, tanto analítica como numérica, se torna una tarea tremendamente complicada. Se llevan a cabo, por tanto, aproximaciones que permitan el tratamiento de la convección de forma relativamente sencilla. Dos son las teorías más utilizadas actualmente: la *Mixing-Length Theory* (**MLT**), y la *Full Spectrum Turbulence* (**FST**), que describimos aquí con detalle.

Por último, otro fenómeno que afecta sustancialmente a la estructura y evolución estelar, por un lado, y a las oscilaciones estelares, por otro, es la rotación. En este caso las ecuaciones de la Hidrodinámica utilizadas para calcular el modelo de equilibrio se ven modificadas. En la Sec. 2.5 se presentan dichas ecuaciones, y se explica brevemente una de las aproximaciones utilizadas para su resolución, y que se ha empleado profusamente en la obtención de los modelos estudiados en el presente trabajo, denominada *pseudorotación*. Asimismo, y dado que se supone que no existen pérdidas de masa a lo largo de la evolución de la estrella, se cumple que el momento angular total de la misma ha de conservarse. Se dispone de dos nuevas aproximaciones que, basándose en dicha conservación, proporcionan el perfil de velocidad angular en el interior estelar, las denominadas *rotación uniforme* y *rotación diferencial*, que también se detallan en esta misma sección.

## 2.1. Escalas de tiempo

Los fenómenos físicos que afectan a las estrellas se desarrollan a lo largo de escalas de tiempo muy diferentes entre sí, por lo que para poder establecer la importancia relativa de cada uno de ellos, es necesario analizar dichas escalas temporales.

Se define la *escala de tiempo dinámica* como el tiempo que tardaría una estrella, sometida a una perturbación, en volver a su situación de equilibrio. Es la escala temporal a la cual tienen lugar los fenómenos dinámicos, y es del mismo orden de magnitud que el tiempo que tardaría un cuerpo en caer desde la superficie estelar hasta el centro, por acción de la gravedad:

$$\tau_{\text{ff}} \approx \tau_{\text{dyn}} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \approx \frac{1}{\sqrt{G\bar{\rho}}}, \quad (2.1)$$

donde  $G = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3\text{g}^{-1}\text{s}^{-2}$  es la constante de la gravedad,  $M$  es la masa total de la estrella,  $R$  su radio y  $\bar{\rho}$  su densidad media.

La escala de tiempo fundamental de la oscilación,  $\tau_{\text{osc}}$ , es el tiempo que tardaría una onda acústica en propagarse desde el centro hasta la superficie de la estrella, y también es del orden de  $\tau_{\text{dyn}}$ , ya que las oscilaciones estelares son un fenómeno típicamente dinámico. Esta proporciona, pues, el orden de magnitud del periodo del modo fundamental radial (aquel en el que la estrella se contrae y se expande a la vez en todo su volumen), quedando éste relacionado con la densidad media a través de (2.1), por lo que toma valores muy diferentes según el tipo de estrella. Por ejemplo, para el Sol:  $\tau_{\text{dyn}} \approx 54 \text{ min}$ , para una estrella de neutrones:  $\tau_{\text{dyn}} \approx 0.12 \text{ ms}$ , para una enana blanca:  $\tau_{\text{dyn}} \approx 3.9 \text{ s}$ , y para una gigante roja:  $\tau_{\text{dyn}} \approx 3.9 \text{ años}$ .

La *escala de tiempo de Kelvin-Helmholtz* está relacionada con los procesos de transferencia de calor, y se puede definir como el tiempo que tardaría una estrella en radiar toda su energía gravitatoria. Su valor es:

$$\tau_{\text{KH}} \approx \frac{GM^2}{LR}, \quad (2.2)$$

donde  $L$  es la luminosidad de la estrella. Para el Sol:  $\tau_{\text{KH}} \approx 3.1 \cdot 10^7 \text{ años}$ . Por lo tanto, para los periodos de pulsación típicos de las estrellas con las que trabajaremos, podemos considerar que en su conjunto se encuentran en equilibrio térmico.

Para cada elemento de volumen de la estrella puede definirse el *tiempo térmico de relajación* como aquel que es necesario para que dicho elemento radie su exceso de energía hacia su entorno. Si se supone simetría esférica, esta magnitud variará solamente con el radio, tomando la siguiente expresión (Kippenhahn y Weigert, 1990):

$$\tau_{\text{th}} = \frac{4\pi r^3 \rho T c_p}{L_R}, \quad (2.3)$$

donde  $r$  es el radio de una determinada capa,  $\rho$  es la densidad en ese punto,  $T$  su temperatura,  $c_p$  el calor específico a presión constante, y  $L_R$  la *luminosidad radiativa*, que se define en la ecuación (3.7). Si  $\tau_{\text{th}} \gg \tau_{\text{dyn}}$ , entonces los procesos dinámicos tendrán lugar a escalas de tiempo mucho menores que las necesarias para que el elemento de volumen intercambie de manera significativa energía por radiación. En este caso es válida la aproximación *adiabática*, esto es, aquella en la que puede despreciarse la transferencia de calor. Esto es lo que ocurre en prácticamente todo

el interior estelar. Si se verifica que  $\tau_{\text{th}} \sim \tau_{\text{dyn}}$ , durante una pulsación tendrá lugar un intercambio energético significativo en esa zona, por lo que será necesario un tratamiento *no adiabático*. Esto es lo que ocurre en las capas más externas, y en concreto, en la atmósfera, donde puede ocurrir incluso que  $\tau_{\text{th}} \ll \tau_{\text{dyn}}$ , aproximación que más adelante será utilizada.

Por último, la causa más importante de evolución en las estrellas aisladas es el cambio gradual en su composición química como consecuencia de las reacciones nucleares que tienen lugar en el núcleo. Normalmente, durante la mayor parte de su vida las estrellas se encuentran en equilibrio térmico, compensándose la pérdida de energía luminosa desde su superficie con la producida por las reacciones termonucleares. Se puede definir entonces la *escala de tiempo nuclear* como el tiempo requerido para que una estrella cambie significativamente sus propiedades como consecuencia de éstas. Esta definición es bastante imprecisa, y en cada manual se concreta de una manera distinta. Por ejemplo, para una estrella que obtiene su energía a partir de la “combustión del Hidrógeno” (conversión del  $\text{H}^1$  en  $\text{He}^4$ ) tenemos, en órdenes de magnitud:

$$t_{\text{nuc}} = \left(\frac{1}{10}\right) \frac{0.007Mc^2}{L} \sim 10^{10} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) \left(\frac{L_{\odot}}{L}\right) \text{ años}, \quad (2.4)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Para obtener esta expresión se ha asumido que aproximadamente el 10 % de la masa de la estrella está disponible para la combustión del Hidrógeno. El factor 0.007 es la fracción de masa que se convierte en energía cuando una cierta cantidad de  $\text{H}^1$  se transforma completamente en  $\text{He}^4$ . Para el Sol esta escala de tiempo es del orden de  $10^{10}$  años, mucho mayor que las anteriormente estudiadas (Cox y Giuli, 1968).

## 2.2. Ecuaciones de la Hidrodinámica

La estructura y evolución de las estrellas vienen gobernadas por una serie de ecuaciones que se pueden deducir directamente de la Hidrodinámica, y que dan cuenta de las propiedades físicas de un gas autogravitante. Por tanto, es conveniente comenzar con un breve repaso a las ecuaciones de la misma.

Se asume que el gas se puede tratar como un continuo, de modo que todas sus propiedades se pueden especificar como funciones de la posición  $\mathbf{r}$  y del tiempo  $t$ . Estas incluyen la densidad  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , la presión local  $p(\mathbf{r}, t)$ , así como la velocidad instantánea  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .  $\mathbf{r}$  denota la posición de un punto en el espacio, y por tanto, la descripción es la correspondiente a un observador estacionario. Esto es lo que se conoce como *descripción Euleriana*. Muchas veces, sin embargo, es conveniente usar la denominada *descripción Lagrangiana*, que es la de un observador que se mueve con el fluido. Un cierto elemento de masa se etiquetará entonces con su posición inicial  $\mathbf{r}_0$ , y su movimiento se especificará mediante su posición  $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$  en función del tiempo. Su velocidad:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{\mathbf{r}_0} \quad (2.5)$$

es equivalente a la velocidad Euleriana descrita más arriba.

La derivada temporal de una magnitud (sea escalar o vectorial)  $\phi$ , observada

cuando se sigue su movimiento es:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi. \quad (2.6)$$

La derivada  $d/dt$  que sigue el movimiento es conocida también como *derivada material*, en contraste con  $\partial/\partial t$ , que es la *derivada local* (esto es, tomada en un punto fijo del espacio).

### 2.2.1. Ecuación de continuidad

El hecho de que la masa se conserve en el tiempo se expresa mediante la *ecuación de continuidad*:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0, \quad (2.7)$$

donde  $\rho$  es la densidad. En esta ecuación se equilibra la tasa de cambio de la masa por unidad de volumen en una región del espacio con su flujo a través de la superficie que lo encierra. La versión Lagrangiana es:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.8)$$

### 2.2.2. Ecuación de movimiento

La ecuación de movimiento (o de conservación del momento lineal) se puede escribir:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = \rho\mathbf{f} - \nabla p - \rho\nabla\Phi + \nabla \cdot \mathcal{S}, \quad (2.9)$$

donde  $\mathbf{u}$  es la velocidad del fluido,  $p$  es la presión,  $\rho$  la densidad,  $\Phi$  el potencial gravitatorio,  $\mathbf{f}$  el total de todas las fuerzas electromagnéticas y externas, y  $\mathcal{S}$  es el tensor de viscosidad.

La presión se define de tal manera que la fuerza que se ejerce sobre un elemento de superficie  $d\mathbf{A}$  con vector unitario normal hacia afuera  $\mathbf{n}$  es:  $-\mathbf{p}nd\mathbf{A}$ . De esta forma,  $p$  puede identificarse con la presión termodinámica ordinaria.

La ecuación (2.9) se denomina *ecuación de Navier-Stokes* para un fluido viscoso, y es de gran importancia en Hidrodinámica. Sin embargo, bajo las condiciones que reinan en el interior de las estrellas, generalmente el término de la viscosidad es muy pequeño, por lo que puede despreciarse. Lo mismo ocurre para las fuerzas electromagnéticas y externas, por lo que la ecuación de movimiento quedaría:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla p - \rho\nabla\Phi. \quad (2.10)$$

Cuando la convección está presente, el tratamiento de las oscilaciones estelares se complica enormemente, debido a la separación de la velocidad en dos términos: uno convectivo y otro oscilatorio, cuya interacción mutua es muy compleja. Nos restringiremos al caso en el que no hay convección, aunque las estrellas que estamos considerando, las  $\delta$  Scuti, tienen un núcleo convectivo y una pequeña zona convectiva en las capas más externas. El incluir o no este tratamiento producirá distintos resultados, que serán analizados más adelante.

Así pues, para deducir las ecuaciones oscilatorias utilizaremos la velocidad desprovista de turbulencia, lo que se denota mediante la letra  $\mathbf{v}$ , para distinguirla de la anterior. La ecuación de movimiento quedaría entonces:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi. \quad (2.11)$$

Hay que notar igualmente que en las ecuaciones de continuidad (2.7) y (2.8) hay que sustituir  $\mathbf{u}$  por  $\mathbf{v}$ .

En la obtención de los modelos de equilibrio, se suele suponer que esta velocidad es nula o constante en el tiempo, con lo que la ecuación anterior se simplificaría aún más, dando lugar a la *ecuación de equilibrio hidrostático*:

$$\nabla p = -\rho \nabla \Phi. \quad (2.12)$$

### 2.2.3. Ecuación de Poisson

El sistema que estamos estudiando consiste en un gas autogravitante, por lo que hay que introducir la ecuación de la gravitación. Para ello utilizaremos la *ecuación de Poisson*, que relaciona el campo gravitatorio con la densidad:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (2.13)$$

### 2.2.4. Ecuación de la energía

Por último, se necesita una relación entre la presión y la densidad, dada por la *primera ley de la Termodinámica*:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dE}{dt} + p \frac{dV}{dt}, \quad (2.14)$$

donde  $dq/dt$  es la tasa de pérdida o ganancia de calor,  $E$  es la *energía interna* por unidad de masa y  $V = 1/\rho$  es el *volumen específico*. La ecuación (2.14) expresa el hecho de que la ganancia de calor se invierte en parte en modificar la energía interna y en parte en trabajo de expansión. Utilizando la ecuación de continuidad, (2.14) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dE}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (2.15)$$

Usando identidades termodinámicas, la ecuación de la energía puede expresarse en términos de otras variables más convenientes:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho(\Gamma_3 - 1)} \left( \frac{dp}{dt} - \frac{\Gamma_1 p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) \quad (2.16)$$

$$= c_p \left( \frac{dT}{dt} - \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} \right) \quad (2.17)$$

$$= c_V \left[ \frac{dT}{dt} - (\Gamma_3 - 1) \frac{T}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right], \quad (2.18)$$

donde  $c_p$  y  $c_V$  son los calores específicos por unidad de masa a presión y a volumen constante respectivamente, y los *exponentes adiabáticos* están definidos por:

$$\Gamma_1 \equiv \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_{\text{ad}}, \quad \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \equiv \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_{\text{ad}}, \quad \Gamma_3 - 1 \equiv \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_{\text{ad}}. \quad (2.19)$$

Estas expresiones se discuten con mayor detalle, por ejemplo, en Cox y Giuli (1968).

Es evidente que las relaciones entre  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  y las  $\Gamma_i$  dependen del estado termodinámico del sistema y de la composición del gas. Sin embargo, en muchos casos, se puede utilizar como primera aproximación la ecuación de estado de un gas ideal completamente ionizado, despreciando los efectos de la degeneración y de la presión de la radiación:

$$p = \frac{\kappa_B \rho T}{\mu m_u}, \quad (2.20)$$

donde  $\kappa_B$  es la constante de Boltzmann,  $m_u$  es la unidad de masa atómica y  $\mu$  es el peso molecular medio. Entonces, en este caso:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 5/3. \quad (2.21)$$

La presión de la radiación disminuye el valor de  $\Gamma_1$  por debajo 5/3; este efecto comienza a ser importante para estrellas cuya masa es varias veces la solar.

Consideremos la ganancia de calor con más detalle. La ecuación de la energía se puede escribir:

$$\rho T \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) S = \rho \varepsilon - \nabla \cdot \mathbf{F}_R, \quad (2.22)$$

donde  $S$  es la entropía específica,  $\varepsilon = \varepsilon_N + \varepsilon_V$  es la tasa de generación de energía por unidad de masa,  $\varepsilon_N$  nuclear y  $\varepsilon_V$  por viscosidad, y  $\mathbf{F}_R$  es el flujo de energía radiativa. Como ya se comentó anteriormente, la viscosidad puede ser despreciada prácticamente en todos los casos, salvo que exista convección, situación que queda fuera de nuestras consideraciones. Por tanto, tendremos:  $\varepsilon = \varepsilon_N$ .

En general, la radiación es el único medio de transporte que contribuye al flujo de energía. La conducción suele ser despreciable en prácticamente todos los casos. En las zonas donde existe convección turbulenta, el movimiento del gas proporciona un transporte de energía muy eficiente. Idealmente, el sistema hidrodinámico completo, incluyendo la convección, debe describirse como un todo. En este caso, solamente el flujo radiativo estaría incluido en la ecuación (2.22). Sin embargo, las ecuaciones resultantes son tan complicadas que no se pueden resolver analíticamente, aunque algunos trabajos recientes (Georgobiani et al., 2005) abordan la resolución numérica. El tratamiento que más se suele utilizar consiste en separar los efectos de la convección mediante el promedio de las ecuaciones sobre longitudes mucho mayores que las escalas del movimiento convectivo. En este caso, en la ecuación (2.22) aparece el flujo convectivo como una contribución adicional ( $\mathbf{F} = \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_C$ ), que tendrá que ser determinado a partir de otras cantidades características del sistema. Un ejemplo muy conocido es la *Teoría de la Longitud de Mezcla* (**MLT**, del inglés Mixing-Length Theory). Las aproximaciones realizadas en este proceso son tan grandes que la incorporación de la convección es, con mucho, la causa mayor de incertidumbre en la Hidrodinámica estelar (Cox y Giuli, 1968; Unno et al., 1989), como veremos en la Sec. 2.4.

El cálculo del flujo radiativo tampoco es simple. En las atmósferas estelares el problema completo del transporte radiativo debe resolverse juntamente con las ecuaciones de la Hidrodinámica (Mihalas y Weibel Mihalas, 1999). Este tratamiento, de nuevo, es sumamente complicado. Sin embargo, en la mayor parte del interior estelar es válida la *aproximación de difusión*, que permite simplificar las ecuaciones. En este caso el flujo radiativo viene dado por:

$$\mathbf{F}_R = -\frac{4\pi}{3\kappa\rho}\nabla B = -\frac{4ac_*T^3}{3\kappa\rho}\nabla T \equiv -K\nabla T, \quad (2.23)$$

donde:  $B = (ac/4\pi)T^4$  es la función de Planck integrada,  $\kappa$  es la opacidad,  $c_*$  es la velocidad de la luz y  $a$  la constante de la radiación. Esto proporciona una relación entre el estado del gas y el flujo radiativo, análoga a una ecuación de conducción.

Cuando el recorrido libre medio de un fotón es muy grande, puede despreciarse la contribución de la absorción al calentamiento del gas. Entonces se tiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 4\pi\rho\kappa_a B, \quad (2.24)$$

donde  $\kappa_a$  es la opacidad que proviene de la absorción. Esta es la denominada *ley de enfriamiento de Newton*.

Hemos asumido implícitamente que el coeficiente de absorción y la opacidad son independientes de la frecuencia de la radiación. En la aproximación de difusión, la generalización al caso dependiente de la frecuencia conduce a la *opacidad promediada de Rosseland*. En la atmósfera, donde el medio es ópticamente delgado, esta aproximación ya no es válida, por lo que el tratamiento es mucho más complejo, y lo desarrollaremos por separado (ver Sec. 2.3).

### 2.2.5. Otras ecuaciones

Para terminar de definir el problema hay que añadir varias ecuaciones que relacionen algunas variables entre sí. En primer lugar están las ecuaciones de estado, con las que se calcula la presión y la entropía en función de la densidad y la temperatura, por ejemplo:

$$p = p(\rho, T), \quad (2.25)$$

$$S = S(\rho, T). \quad (2.26)$$

Asimismo, hay que considerar la tasa de generación de energía nuclear:

$$\varepsilon_N = \varepsilon_N(\rho, T), \quad (2.27)$$

y la ecuación de la opacidad:

$$\kappa = \kappa(\rho, T), \quad (2.28)$$

todo ello para una composición química dada.

## 2.3. Atmósfera estelar

Las condiciones de contorno que necesariamente hay que imponer a las ecuaciones anteriores hacen que haya que tener en cuenta las propiedades de la atmósfera estelar.

Durante mucho tiempo se ha considerado en los cálculos de estructura estelar la fotosfera como la última capa, por lo que cualquier observable era reflejo directo de las condiciones de contorno que se eligieran en ese punto. En los casos en los que se reconstruía la atmósfera más allá, ésta era tratada con el mismo conjunto de ecuaciones que las utilizadas en la resolución del interior estelar, lo que no es adecuado.

Más recientemente se han calculado modelos de atmósfera para ser utilizados conjuntamente con las ecuaciones de interior, destacando los de Kurucz (1993). Las principales características de éstos son:

- Utilizan la aproximación de *equilibrio termodinámico local* (**LTE**, del inglés Local Thermodynamics Equilibrium). Esto implica la suposición de que los procesos de colisión son los que gobiernan el estado térmico de la materia.
- La atmósfera tiene estratificación plano-paralela. Esto está justificado por su delgadez, comparada con el radio total de la estrella durante la mayor parte de su vida, y por estar situada en la zona más externa. Esta aproximación lleva a considerar que el flujo radiativo y la luminosidad son constantes y perpendiculares a los planos (es decir, radiales).

Una de las validaciones de la primera suposición es el propio espectro de energía radiada por la estrella, lo que nos lleva a la definición de fotosfera y temperatura efectiva. La *fotosfera* se puede definir, cualitativamente, como la parte visible de una estrella. Al analizar el espectro de energía que se obtiene de esta zona, se comprueba que es muy parecido al que irradiaría un cuerpo negro con una temperatura  $T_{ef}$ , llamada *temperatura efectiva*, lo que lleva a la condición de **LTE**.

Además, si se aplica la ley de Stefan, se obtiene una relación entre la luminosidad de la estrella, el radio en el que se encuentra la fotosfera y la temperatura efectiva:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4, \quad (2.29)$$

donde  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-5}$  cgs.

Se puede suponer, entonces, en buena aproximación, que para una estrella de luminosidad  $L$  y temperatura efectiva  $T_{ef}$ , la fotosfera se encuentra a un radio  $R$  y tiene temperatura  $T = T_{ef}$ . También se suele suponer que el medio es ópticamente grueso desde esta capa hacia el interior y delgado hacia el exterior, y que la aproximación **LTE** es correcta en la atmósfera.

Existen ciertas condiciones en las que la capa convectiva de la estrella penetra hasta la zona atmosférica, por lo que este fenómeno ha de ser tenido en cuenta en los modelos. Los expuestos hasta aquí utilizan la teoría de la Longitud de Mezcla (ver Sec. 2.4.2). Sin embargo, últimamente se han calculado nuevas atmósferas que utilizan la otra teoría ampliamente usada en el estudio de la convección, la **FST** (expuesta brevemente también en la Sec. 2.4.3). Estos modelos (Smalley y Kupka, 1997; Smalley et al., 2002; Heiter et al., 2002), que implementan el tratamiento desarrollado por Canuto et al. (1996), pueden considerarse una mejora de los anteriores, y han sido utilizados en el estudio de las propiedades fotométricas y espectroscópicas de un conjunto de estrellas con temperaturas entre 6000 y 8500 K. Dichos estudios han servido, por ejemplo, para calcular nuevos coeficientes de limb-darkening, utilizados en la comparación de los resultados teóricos con las observaciones obtenidas de la fotometría Strömgren, como se describe más adelante.

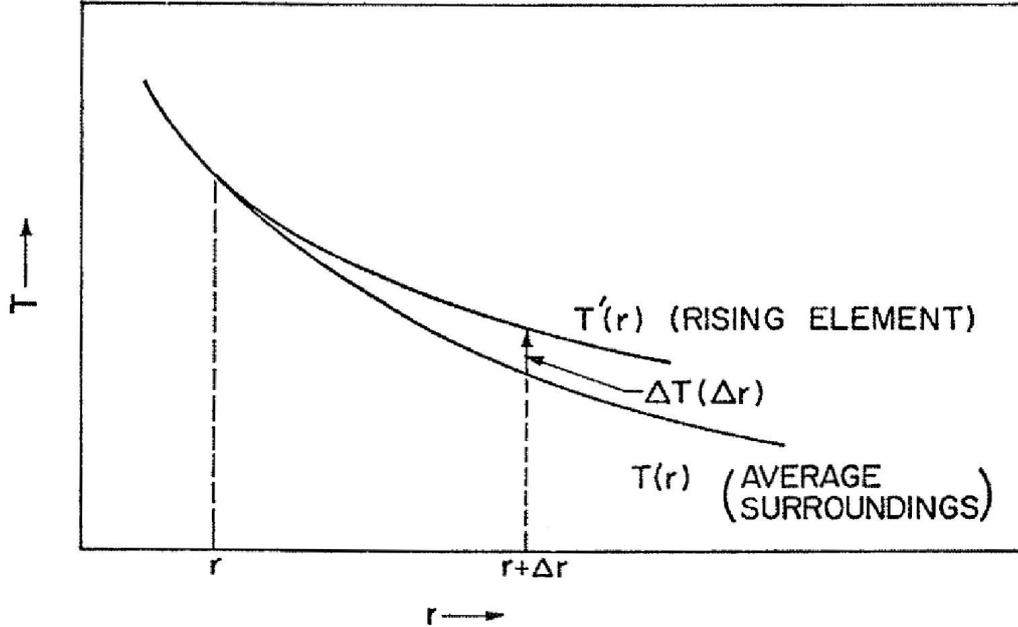


Figura 2.1: Temperatura de un elemento ascendente, relativa a la de su entorno. Tomado de Cox y Giuli (1968).

## 2.4. Convección

Como ya comentamos anteriormente (ver Sec. 2.2), en el caso de que se establezca un transporte energético mediante la convección en alguna parte de la estrella, será necesario resolver el sistema hidrodinámico completo, teniendo en cuenta también los movimientos turbulentos que aparecen. Las ecuaciones resultantes no pueden ser resueltas, por lo que se recurre a aproximaciones. Dos de las más utilizadas son la *Teoría de la Longitud de Mezcla* (**MLT** de aquí en adelante), y la *Full Spectrum Turbulence* (**FST** a partir de ahora). Llevaremos a cabo una breve descripción de ambas, empezando por establecer los criterios que determinan si una capa es estable o inestable convectivamente.

### 2.4.1. Inestabilidad convectiva. Criterio de Schwarzschild

Consideremos un elemento de materia que se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio, situada a una distancia  $r$  del centro de la estrella (figura 2.1). Supongamos, pues, que ha recorrido una cierta distancia  $\Delta r$  (pequeña en comparación con el radio  $r$ ), con lo que su nueva posición será  $r + \Delta r$ . Sea  $T'$  la temperatura de ese elemento de masa, y  $T$  la del entorno que lo rodea, y consideremos además que inicialmente ambas son iguales:  $T(r) = T'(r)$ . Se define el exceso de temperatura del elemento de masa sobre el entorno en el nivel  $r + \Delta r$ :

$$\Delta T(\Delta r) \equiv T'(r + \Delta r) - T(r + \Delta r). \quad (2.30)$$

Desarrollando hasta primer orden en  $\Delta r$ , dicho exceso de temperatura se puede escribir:

$$\Delta T(\Delta r) = \Delta r \left[ \left( \frac{dT'}{dr} \right) - \left( \frac{dT}{dr} \right) \right], \quad (2.31)$$

o:

$$\Delta T(\Delta r) = \Delta r \Delta \nabla T, \quad (2.32)$$

donde, siguiendo la notación de Schwarzschild (Schatzman, 1958):

$$\Delta \nabla T \equiv \left[ \left( -\frac{dT}{dr} \right) - \left( -\frac{dT'}{dr} \right) \right]. \quad (2.33)$$

Considerando que  $T \approx T'$  para todas las distancias entre  $r$  y  $r + \Delta r$ , la ecuación (2.31) también podrá escribirse:

$$\Delta T(\Delta r) = \Delta r T \left[ \left( -\frac{d \ln T}{dr} \right) - \left( -\frac{d \ln T'}{dr} \right) \right]. \quad (2.34)$$

Utilizando la *escala de presión*,  $H_p$ , definida como:

$$\frac{1}{H_p} \equiv -\frac{d \ln P}{dr} = \frac{\rho g}{P}, \quad (2.35)$$

donde la segunda igualdad se obtiene de la ecuación de equilibrio hidrostático, tenemos entonces que el exceso de temperatura será:

$$\Delta T(\Delta r) = \Delta r \frac{T}{H_p} (\nabla - \nabla'), \quad (2.36)$$

donde se definen los gradientes:

$$\nabla \equiv \frac{d \ln T}{d \ln P}, \quad (2.37)$$

$$\nabla' \equiv \frac{d \ln T'}{d \ln P}. \quad (2.38)$$

En el interior profundo de las estrellas, es una buena aproximación utilizar:

$$\nabla' = \nabla_{\text{ad}}, \quad (2.39)$$

donde  $\nabla_{\text{ad}}$  es el gradiente de temperaturas de un elemento de materia que se mueve adiabáticamente, esto es, que no intercambia calor con el entorno:

$$\nabla_{\text{ad}} \equiv \left( \frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{\text{ad}}. \quad (2.40)$$

Con objeto de establecer la condición de inestabilidad convectiva, hará falta definir un nuevo gradiente. Siempre que existe un gradiente de temperaturas, parte de la energía se transportará por radiación. Entonces, asumiendo la denominada *aproximación de difusión*, consistente en suponer que el recorrido libre medio de los fotones es mucho menor que la distancia característica sobre la que se extiende dicho transporte, tenemos que el flujo radiativo viene dado por:

$$F_r = -\frac{4ac T^3}{3 \kappa \rho} \frac{dT}{dr} = \frac{4ac T^4}{3 \kappa \rho} \frac{1}{H_p} \nabla. \quad (2.41)$$

A partir de esta expresión se puede definir un gradiente ficticio, denominado *gradiente radiativo*,  $\nabla_r$ , mediante la relación:

$$F = F_c + F_r \equiv \frac{4acT^4}{3} \frac{1}{\kappa\rho H_p} \nabla_r, \quad (2.42)$$

donde  $F$  es el flujo total,  $F_c$  y  $F_r$  son los flujos convectivo y radiativo, respectivamente,  $c$  es la velocidad de la luz, y  $a$  es la constante de la radiación. Si no se establece la convección, y toda la energía se transporta por radiación, entonces:  $\nabla = \nabla_r$ .

Pasamos entonces a derivar la condición de estabilidad. En el caso de que  $\Delta r > 0$  ( $\Delta r < 0$ ), el elemento de masa seguirá ascendiendo (descendiendo), y por tanto, continuará alejándose de su posición de equilibrio, si su densidad es menor (mayor) que la del entorno. Dado, por tanto, un exceso de densidad:

$$\Delta\rho(r + \Delta r) \equiv \rho'(r + \Delta r) - \rho(r + \Delta r) = \left[ \left( \frac{d\rho'}{dr} \right) - \left( \frac{d\rho}{dr} \right) \right] \Delta r, \quad (2.43)$$

tendremos estabilidad convectiva si se verifica:

$$\frac{d(\Delta\rho)}{dr} > 0, \quad (2.44)$$

o

$$\left( \frac{d\rho'}{dr} \right) > \left( \frac{d\rho}{dr} \right). \quad (2.45)$$

Se considera que cualquier variación de presión del elemento de masa con respecto a los alrededores se equilibra inmediatamente (esto es, estamos suponiendo que  $\tau_{\text{dyn}} \ll \tau_{\text{conv}}$ ), por lo que siempre se tiene equilibrio mecánico:  $P = P'$ . Teniendo esto en cuenta, se puede traducir la condición (2.44) a otra que involucre la temperatura.

En el caso de que las capas sean homogéneas químicamente, y usando la ecuación de estado, esta condición se puede escribir:

$$\frac{d(\Delta T)}{dr} < 0. \quad (2.46)$$

Dado que en el interior estelar  $dT/dr$  es siempre negativo, y  $T$  positivo, tenemos finalmente:

$$\left| \frac{1}{T} \left( \frac{dT'}{dr} \right) \right| > \left| \frac{1}{T} \left( \frac{dT}{dr} \right) \right|, \quad (2.47)$$

lo que se traduce, en términos de gradientes, en:

$$\nabla' > \nabla, \quad (2.48)$$

ecuación que se conoce como *criterio de Schwarzschild*.

Dado que  $\nabla_r$  es el gradiente de temperaturas en el caso de que toda la energía se transporte por radiación, tendremos que en una capa estable frente a la convección se cumplirá que:  $\nabla = \nabla_r$ . Si quiere estudiarse entonces la estabilidad de una zona, la ecuación (2.48) puede escribirse:

$$\nabla' > \nabla_r, \quad (2.49)$$

que es la forma usual del criterio de Schwarzschild.

En el caso de que las capas no sean homogéneas químicamente, la condición es:

$$\nabla' - \frac{\chi_\mu}{\chi_T} \nabla_\mu > \nabla_r, \quad (2.50)$$

donde:

$$\nabla_\mu \equiv \frac{d \ln \mu}{d \ln P}, \quad (2.51)$$

$$\chi_\mu \equiv \left( \frac{\partial \ln P}{\partial \ln \mu} \right)_{\rho, T}, \quad (2.52)$$

$$\chi_T \equiv \left( \frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_{\rho, \mu}. \quad (2.53)$$

A éste se le denomina *criterio de Ledoux*, y se reduce a (2.49) cuando  $\nabla_\mu = 0$ , esto es, cuando la capa es homogénea químicamente.

En caso de que se verifique esta condición, si un cierto elemento de masa sufre un pequeño desplazamiento respecto de su posición de equilibrio, se producirá un movimiento oscilatorio amortiguado que lo restablecerá a su posición original, con lo que la convección no tendrá lugar. En caso contrario, el desplazamiento aumentará con el tiempo, hasta que el elemento llegue a un punto donde termine disolviéndose y mezclándose con su medio circundante, cediéndole el exceso de energía, estableciéndose por tanto un movimiento convectivo.

### 2.4.2. Teoría de la Longitud de Mezcla

Una vez establecido el criterio que determina si un elemento será estable o inestable, pasamos a exponer brevemente una de las teorías más utilizadas hasta hace poco en la descripción de la convección en las estrellas, la *Teoría de la Longitud de Mezcla*, que aquí denotaremos como **MLT**. Seguiremos el tratamiento de Vitense (1953) y Böhm (1958), tal y como se presenta en Cox y Giuli (1968).

Consideremos un elemento de masa situado en una zona inestable convectivamente, que asciende una cierta distancia  $\Delta r$ , antes de mezclarse con su entorno y cederle su exceso de calor. El calor transferido por unidad de área y de tiempo será:

$$F_c(\Delta r) = \frac{1}{2} \rho v c_p \Delta r \left[ \left( -\frac{dT}{dr} \right) - \left( -\frac{dT'}{dr} \right) \right] = \frac{1}{2} \rho v c_p \Delta r \Delta \nabla T, \quad (2.54)$$

donde  $\rho$  es la densidad y  $v$  la velocidad del elemento ascendente, promediadas sobre la distancia  $\Delta r$ , y  $c_p$  es el valor promedio sobre esa misma distancia del calor específico por unidad de masa a presión constante.

El tamaño de la célula convectiva es desconocido, y no se puede establecer de antemano. Por lo tanto, la distancia  $\Delta r$  que recorre el elemento de volumen puede variar entre 0 y un valor máximo, al cual se le da el nombre de *longitud de mezcla*,  $\Lambda$ , que queda como un parámetro libre de la teoría.

Con el objeto de obtener el flujo convectivo total, sería necesario promediar el valor obtenido en (2.54). Esto se puede hacer de varias maneras, y cada autor presenta una forma distinta de llevar a cabo la aproximación. Siguiendo el trabajo de Cox y Giuli (1968), tomamos los valores medios de  $\rho$ ,  $c_p$  y  $\Delta \nabla T$  a lo largo de la distancia  $\Lambda$ , y sustituimos  $\Delta r$  por  $\Lambda$  y la velocidad  $v$  por  $\bar{v}$ , que es el promedio de

la misma sobre toda la distancia vertical  $\Lambda$  y sobre toda la superficie de radio  $r$  que estamos considerando (dado que se supone simetría esférica). Con esto obtenemos la expresión para el flujo que buscamos:

$$F_c = \frac{1}{2} \rho \bar{v} c_p \Lambda \Delta \nabla T. \quad (2.55)$$

Usando la ecuación (2.36), tenemos:

$$\nabla - \nabla' = \frac{H_p}{T} \Delta \nabla T = \frac{P}{\rho g T} \Delta \nabla T, \quad (2.56)$$

de donde podemos escribir el promedio del flujo como:

$$F_c = \frac{1}{2} \rho \bar{v} c_p T \frac{\Lambda}{H_p} (\nabla - \nabla'). \quad (2.57)$$

Ahora hay que encontrar un valor para la velocidad  $\bar{v}$ . Para ello haremos uso de algunas consideraciones dinámicas. Sea  $\Delta\rho$  el exceso de densidad de un elemento de materia sobre su entorno en un punto dado. La fuerza neta que actúa sobre el mismo vendrá dada por la ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (2.58)$$

donde  $g$  es la aceleración local de la gravedad. La densidad puede escribirse como:

$$\rho = \rho_0 (1 + \Delta\rho/\rho_0), \quad (2.59)$$

donde el índice "0" denota el valor en equilibrio (esto es, cuando no existe ninguna fuerza actuando sobre el elemento de masa que estamos considerando). Por tanto:

$$\frac{\partial^2 r_0}{\partial t^2} = -g_0 - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_0 = 0. \quad (2.60)$$

Desarrollando  $\rho$  hasta primer orden en  $\Delta\rho/\rho_0$ , y haciendo uso de la ecuación de movimiento en el estado de equilibrio, tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} &= -g_0 - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_0 \left[ 1 - \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right] \\ &= -g_0 - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_0 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_0 \\ &= -g_0 \Delta\rho/\rho_0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Quitando los subíndices, nos queda para la fuerza neta por unidad de volumen:

$$f_B = -g \Delta\rho. \quad (2.62)$$

Si suponemos que el elemento de masa empieza a moverse con velocidad cero en el punto de radio  $r$  y es acelerado durante una distancia  $\Delta r$ , punto en el que se mezcla con su entorno y se disuelve, que además el exceso de densidad es despreciable inicialmente ( $\Delta\rho(r) = 0$ ), y que éste aumenta linealmente con  $\Delta r$  hasta  $r + \Delta r$ ,

donde toma el valor  $\Delta\rho(\Delta r)$ , tendremos que la fuerza neta por unidad de volumen en  $r + \Delta r$  será:

$$f_B(\Delta r) = -g\Delta\rho(\Delta r), \quad (2.63)$$

donde se ha despreciado la variación de la gravedad a lo largo de la distancia  $\Delta r$ . El trabajo por unidad de volumen realizado para mover este elemento de masa será:

$$W(\Delta r) = \int_0^{\Delta r} f_B((\Delta r)')d(\Delta r)' = -\frac{1}{2}g\Delta\rho(\Delta r)\Delta r. \quad (2.64)$$

Ahora hay que promediar  $W(\Delta r)$  sobre todos los posibles valores de  $\Delta r$ . Para ello se sustituye  $\Delta r$  por  $\Lambda$  en la expresión anterior, y se multiplica por un factor numérico, que se elige de forma arbitraria como  $1/4$ , con lo que se obtiene:

$$\overline{W}(\Lambda) = \frac{1}{4}W(\Lambda) = -\frac{1}{8}g\Delta\rho(\Lambda)\Lambda. \quad (2.65)$$

Si no hubiera fuerzas disipativas (fricción) entre el elemento convectivo y su entorno, ni pérdidas de calor, ni transferencia de energía cinética al gas circundante, entonces todo este trabajo se transformaría en energía cinética. El promedio de dicha energía cinética por unidad de volumen sería:

$$\overline{1/2\rho v^2} = \overline{W}(\Lambda). \quad (2.66)$$

Sin embargo, en la práctica sí hay pérdida de energía, por lo que se considera, de nuevo de forma algo arbitraria, que aproximadamente la mitad del trabajo se transforma en energía cinética, con lo que queda:

$$\overline{\frac{1}{2}\rho v^2} \approx \frac{1}{2}\rho\bar{v}^2 = \frac{1}{2}\overline{W}(\Lambda) = -\frac{1}{16}g\Delta\rho(\Lambda)\Lambda. \quad (2.67)$$

De aquí se obtiene que el valor promedio de la velocidad del elemento convectivo es:

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{8}g\Lambda\frac{\Delta\rho(\Lambda)}{\rho}. \quad (2.68)$$

Relacionando  $\Delta\rho$  con  $\Delta T$  a través de la ecuación de estado del material estelar, dicha velocidad media queda:

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{8}gQ\Lambda\frac{\Delta T(\Lambda)}{T}, \quad (2.69)$$

donde:

$$Q = \frac{4 - 3\beta}{\beta} - \left( \frac{\partial \ln \mu}{\partial \ln T} \right)_P, \quad (2.70)$$

y  $\beta$  es el cociente entre la presión del gas y la total (la del gas más la de la radiación):

$$\beta \equiv \frac{P_g}{P}. \quad (2.71)$$

Considerando que en el nivel  $\Delta r = 0$  el elemento de volumen comienza con la misma temperatura que el entorno, esto es, que  $\Delta T(r) = 0$ , tendremos:

$$\Delta T(\Lambda) = \Lambda\Delta\nabla T = \Lambda\frac{T}{H_p}(\nabla - \nabla'), \quad (2.72)$$

con lo que el valor promedio de la velocidad quedará:

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{8}gQ\frac{\Lambda^2}{T}\Delta\nabla T, \quad (2.73)$$

o

$$\bar{v} = (2\sqrt{2})^{-1}g^{1/2}Q^{1/2}(\Lambda/T^{1/2})(\Delta\nabla T)^{1/2} \quad (2.74)$$

$$= (2\sqrt{2})^{-1}gQ^{1/2}(\rho/P)^{1/2}\Lambda(\nabla - \nabla'), \quad (2.75)$$

que puede escribirse en términos de la velocidad del sonido:

$$c_s = \sqrt{(\partial P/\partial\rho)_{\text{ad}}} = \sqrt{\Gamma_1 P/\rho}, \quad (2.76)$$

como:

$$\frac{\bar{v}}{c_s} = \frac{(\Lambda/H_p)Q^{1/2}}{2\sqrt{2}\Gamma_1^{1/2}} \left(\frac{H_p}{T}\right)^{1/2} (\Delta\nabla T)^{1/2} = \frac{(\Lambda/H_p)Q^{1/2}}{2\sqrt{2}\Gamma_1^{1/2}} (\nabla - \nabla')^{1/2}. \quad (2.77)$$

Una vez conocido el valor medio de la velocidad, puede calcularse el flujo convectivo:

$$F_c = (4\sqrt{2})^{-1}g^{1/2}Q^{1/2}(\rho/T^{1/2})c_p\Lambda^2(\Delta\nabla T)^{3/2} \quad (2.78)$$

$$= (Q^{1/2}/(4\sqrt{2}\Gamma_1^{1/2}))(\Lambda/H_p)^2\rho c_s c_p T (H_p/T)^{3/2}(\Delta\nabla T)^{3/2} \quad (2.79)$$

$$= (Q^{1/2}/(4\sqrt{2}\Gamma_1^{1/2}))(\Lambda/H_p)^2\rho c_s c_p T (\nabla - \nabla')^{3/2} \quad (2.80)$$

$$= (4\sqrt{2})^{-1}c_p Q^{1/2}\rho^{5/2}g^2 T P^{-3/2}\Lambda^2(\nabla - \nabla')^{3/2}, \quad (2.81)$$

con lo que el flujo total puede obtenerse:

$$F(r) = F_r + F_c = \frac{4acT^4g}{3\kappa P}\nabla + \left(\frac{Q^{1/2}}{4\sqrt{2}\Gamma_1^{1/2}}\right)\left(\frac{\Lambda}{H_p}\right)^2\rho c_s c_p T (\nabla - \nabla')^{3/2}, \quad (2.82)$$

de donde se deriva una relación entre los gradientes (ver ecuación 2.42 para la definición de gradiente radiativo):

$$\nabla_r = \nabla + \frac{(Q^{1/2}/4\sqrt{2}\Gamma_1^{1/2})(\Lambda/H_p)^2\rho c_s c_p T}{4acT^4g/3\kappa P}(\nabla - \nabla')^{3/2} \quad (2.83)$$

$$= \nabla + \frac{3c_p\kappa Q^{1/2}\rho^{5/2}g\Lambda^2}{16\sqrt{2}acP^{1/2}T^3}(\nabla - \nabla')^{3/2}. \quad (2.84)$$

Una variable muy importante en el estudio de la convección en las estrellas es la *eficiencia convectiva*, que determina la cantidad de energía que es transportada por la convección frente a la radiación:

$$\Gamma = \frac{\text{Exceso de calor del elemento de volumen justo antes de mezclarse}}{\text{Energía radiada durante el tiempo de vida de la célula convectiva}} = \quad (2.85)$$

$$= \frac{c_p}{12\sqrt{12}ac} \frac{\kappa g Q^{1/2}\rho^{5/2}\Lambda^2}{P^{1/2}T^3} (\nabla - \nabla')^{1/2}, \quad (2.86)$$

de donde se tiene:

$$\nabla_r = \nabla + \frac{9}{4}\Gamma(\nabla - \nabla'). \quad (2.87)$$

La relación entre cada uno de los flujos (radiativo y convectivo) frente al total es:

$$\frac{F_r}{F} = \frac{\nabla}{\nabla_r}, \quad (2.88)$$

$$\frac{F_c}{F} = \frac{\nabla_r - \nabla}{\nabla_r}. \quad (2.89)$$

En el caso de que la convección no sea eficiente, se verifica:  $\Gamma \rightarrow 0$  y  $\nabla \rightarrow \nabla_r$ . En caso contrario:  $\Gamma \rightarrow \infty$  y  $\nabla, \nabla' \rightarrow \nabla_{\text{ad}}$ , con lo que se tendrá:

$$\frac{F_c}{F} \approx \frac{\nabla_r - \nabla_{\text{ad}}}{\nabla_r}. \quad (2.90)$$

Con el objeto de modelizar convenientemente las zonas convectivas, suele hacerse uso de una variable, definida como:

$$\alpha \equiv \frac{\Lambda}{H_p}, \quad (2.91)$$

y que da cuenta de la extensión de la zona donde se integran las propiedades medias, medida en unidades de la escala de presión. Nótese que la longitud de mezcla es un parámetro libre de la teoría, por lo que el valor de  $\alpha$  también lo será.

En la práctica, cuando se introduce este valor de  $\alpha$  en un código de estructura estelar, se obtiene una zona convectiva con un tamaño,  $\Delta z$ , distinto a  $\Lambda$ . Para que la teoría de la Longitud de Mezcla tenga sentido, será necesario que el valor de  $\Delta z/H_p$  sea mayor que  $\alpha$ , ya que se ha de promediar sobre distancias ( $\Lambda$ ) menores que el tamaño de la capa convectiva ( $\Delta z$ ). Esto nos impone un límite al valor de  $\alpha$  que se puede considerar.

### 2.4.3. Teoría de Canuto-Goldmann-Mazzitelli

Esta teoría, denominada *Full Spectrum Turbulence* (**FST**), y denotada también por **CGM**, en honor a sus creadores, es una mejora de la **MLT** descrita en la sección anterior.

Canuto y Mazzitelli (1991) y Canuto et al. (1996) pretendieron resolver dos limitaciones fundamentales que aparecen en la **MLT**:

1. Por una parte, la **MLT** trata el espectro de energías de las células convectivas como si todas ellas tuvieran un único tamaño. De hecho, si se parte de las ecuaciones de la Hidrodinámica y se asume que el espectro de energías es una función delta (solamente se tiene una célula), entonces se recuperan las expresiones de la **MLT** para el flujo convectivo. Por otro lado, cuando se resuelve el modelo completo con valores arbitrarios de la viscosidad, se encuentra que en un medio viscoso el número de células convectivas que contribuyen al flujo convectivo es pequeño (esto es, se tiene un rango estrecho de tamaños), mientras que si la viscosidad es baja, entonces la distribución de tamaños se vuelve bastante ancha. De aquí dedujeron los autores que el modelo de una célula propuesto por la **MLT** es razonablemente aproximado en el caso de un fluido viscoso, pero constituye una aproximación bastante pobre en el caso de los interiores estelares, caracterizados, por tanto, por un ancho espectro de células de todos los tamaños.

2. La **MLT** no proporciona un valor de la longitud de mezcla,  $\Lambda$ . De hecho, demuestran que en el límite de incompresibilidad ( $c_s \rightarrow \infty$ ) y elevada eficiencia convectiva, las ecuaciones que describen el flujo turbulento no proporcionan una unidad de longitud natural. La hipótesis de que la turbulencia es incompresible se usa habitualmente debido a que proporciona una simplificación importante de las ecuaciones, aunque no es físicamente realista. Con el objeto de mantener la sencillez matemática, pero a la vez poder tener en cuenta la compresibilidad, se utiliza un tratamiento mixto: se trata la turbulencia de forma incompresible, pero se utiliza la expresión  $\Lambda = \alpha H_p$ , lo que indica que las células convectivas deben tener menor tamaño cerca del borde superior de la zona convectiva, mientras que deben ser más grandes conforme aumenta la profundidad.

Sin embargo, al introducir este parámetro en la teoría, se pierde capacidad de predicción, siendo ésta una de las mayores causas de incertidumbre en el estudio de los interiores estelares. Por otra parte, suele elegirse su valor de manera que ajuste los modelos solares con las observaciones, lo que tiene el inconveniente, por un lado, de estar incluyendo sobre este parámetro las incertidumbres debidas, no sólo a la convección, sino también a otros aspectos de la física estelar peor conocidos (opacidades, difusión, ...). Por otro lado, este valor no se puede extrapolar a otras estrellas, por lo que sigue siendo desconocido en los cálculos de estructura.

Partiendo entonces de las ecuaciones de Navier-Stokes y de la temperatura, los autores obtienen una serie de expresiones que proporcionan información sobre el flujo convectivo, la distribución de tamaños de las células convectivas y la tasa a la cual se inyecta energía al sistema para que se mantenga la turbulencia. Utilizando algunas aproximaciones desarrolladas hasta la fecha, como el modelo **DIA** (Direct Interaction Approximation; Kraichnan, 1964; Leslie, 1973), el **EDQNM** (Eddy Damped Quasi-Normal Markovian; Orszag, 1977), o el **RNG** (Renormalization Group; Yakhot y Orszag, 1986), logran obtener las ecuaciones básicas de la turbulencia que determinan el espectro de energías,  $E(k)$ , el cual sigue la ley de Kolmogorov:  $E(k) \propto k^{-5/3}$ .

En este contexto, se encuentra que la **MLT** es un caso particular de esta teoría más general, de manera que la tasa a la cual se inyecta energía al sistema se obtiene en el límite de viscosidad cero, mientras que, como habíamos comentado, la distribución de energía de las células convectivas era una función delta como consecuencia de tomar una viscosidad grande. Así pues, se presenta una doble inconsistencia: estas dos funciones aparecen como límites con valores opuestos de la viscosidad, y además, al ser ésta muy pequeña en los interiores estelares, el espectro de energías de la **MLT** es totalmente inadecuado.

Por otra parte, con la nueva descripción se obtiene un flujo convectivo que es aproximadamente un orden de magnitud mayor que la de la **MLT**, como sugerían resultados anteriores (Cabot et al., 1990; Chan y Sofia, 1989).

Con respecto a la longitud de mezcla, no proporcionada por la **MLT**, son posibles dos tratamientos diferentes. Se puede tener en cuenta la compresibilidad del medio tomando  $\Lambda = \alpha H_p$ . Sin embargo, también es posible considerar:  $\Lambda = z$ , donde  $z$  es la distancia desde el punto considerado hasta el borde superior de la zona convectiva.

El primer tratamiento proporciona una presión turbulenta pequeña, de modo que se puede despreciar. Se tienen entonces los modelos solares tomando  $\alpha = 0.69$ , valor considerado a partir de entonces en numerosos cálculos de estructura, al menos para estrellas de la secuencia principal. El segundo tratamiento tiene la ventaja de que no introduce parámetros ajustables en la teoría, aunque predice estrellas algo más frías que las obtenidas mediante **MLT**. Esto lleva a que en los cálculos de estrellas pertenecientes a cúmulos globulares se obtienen modelos más masivos, y por tanto, algo más jóvenes.

En el presente trabajo se utiliza esta teoría con el primer tratamiento, tomando  $\alpha = 0.69$ , con el objeto de comparar los resultados sismológicos obtenidos con estas dos teorías.

## 2.5. Rotación

Los modelos estelares que se obtienen a través de las ecuaciones descritas en las secciones anteriores no incluyen la rotación. En el caso de que ésta se tenga en cuenta, ya no se puede suponer que la velocidad  $\mathbf{v}$  del estado de equilibrio sea nula o constante. Esto tiene una influencia directa en la ecuación de conservación de momento (2.11). Si tenemos una estrella que rota con un perfil de velocidad angular  $\mathbf{\Omega}(r, \theta)$  (el sistema de referencia se elige de modo que el eje  $z$  ( $\theta = 0$ ) coincida con el de rotación), en el interior estelar habrá un campo de velocidades dado por:

$$\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} = r\Omega \sin \theta \mathbf{e}_\phi, \quad (2.92)$$

con lo que la ecuación de conservación del momento lineal quedará entonces:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) = -\nabla \Phi - \frac{\nabla p}{\rho}, \quad (2.93)$$

donde  $2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}$  es el *término de Coriolis*, y  $\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})$  el *centrífugo*.

Generalmente se considera que la velocidad angular tiene dependencia radial y latitudinal. Sin embargo, supondremos de aquí en adelante que sólo depende del radio, lo que se puede conseguir promediando sobre la latitud:  $\mathbf{\Omega}(r) = \langle \mathbf{\Omega}(r, \theta) \rangle$  (Christensen-Dalsgaard, 1998). Dado que el eje de rotación coincide con  $\theta = 0$ , la velocidad angular se escribirá simplemente:  $\mathbf{\Omega} = \Omega(r) \mathbf{e}_z$ . Por otra parte, la dependencia radial del perfil de la rotación se puede escribir como:

$$\Omega(r) = \bar{\Omega}[1 + \eta(r)], \quad (2.94)$$

donde  $\bar{\Omega}$  representa el valor medio de  $\Omega(r)$ . En el caso de rotación uniforme:  $\Omega = \bar{\Omega}$  y  $\eta(r) = 0$ . Entonces, la parte correspondiente a la aceleración de Coriolis se anula, con lo que la ecuación de equilibrio hidrostático se escribe en este caso:

$$\nabla p = -\rho \nabla \Phi + \rho \mathcal{A}_c, \quad (2.95)$$

donde  $p$  es la presión,  $\rho$  la densidad,  $\Phi$  el potencial gravitatorio y  $\mathcal{A}_c$  representa la aceleración centrífuga:

$$\mathcal{A}_c = -\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} = r\bar{\Omega}^2 \sin \theta \mathbf{e}_s, \quad (2.96)$$

siendo  $\mathbf{e}_z$  y  $\mathbf{e}_s = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta$  los vectores unitarios del sistema de coordenadas cilíndricas  $(s, \phi, z)$ . Utilizando los polinomios de Legendre de orden 0 (A.18) y 2 (A.20), se podría escribir la aceleración centrífuga:

$$\mathcal{A}_c = \mathcal{A}_r(r)[1 - P_2(\cos \theta)]\mathbf{e}_r + \mathcal{A}_\theta(r)\frac{dP_2}{d\theta}\mathbf{e}_\theta, \quad (2.97)$$

donde:

$$\mathcal{A}_r(r) = \frac{2}{3}r\Omega^2(r), \quad \mathcal{A}_\theta(r) = -\frac{1}{3}r\Omega^2(r). \quad (2.98)$$

El efecto de la fuerza centrífuga se puede dividir entonces en dos partes: por un lado existe una componente esféricamente simétrica que modifica el valor de la gravedad, y por otro, nos encontramos con una componente tangencial que produce una distorsión no esférica de la estrella. Esta, por tanto, presenta forma de esferoide achatado (Tassoul, 1978). La aproximación de *pseudorotación* (Soufi et al., 1998) consiste en despreciar esta segunda contribución, considerando únicamente la parte radial, con lo que la ecuación de equilibrio hidrostático quedaría:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g_e, \quad (2.99)$$

donde  $g_e$  es la denominada *gravedad efectiva* (Kippenhahn y Weigert, 1990):

$$g_e \equiv g - \frac{2}{3}r\Omega^2. \quad (2.100)$$

Los efectos de la parte no esférica se introducen posteriormente a través de una perturbación de las ecuaciones de oscilación (ver Sec. 5.1).

Todavía queda por determinar la dependencia de la velocidad angular con el radio,  $\Omega(r)$ . Para ello se utilizan dos aproximaciones, la *rotación uniforme* y la *rotación diferencial*, que pasamos a explicar brevemente.

### 2.5.1. Rotación uniforme

En los casos en los que la estrella se encuentra aislada, esto es, no forma parte de un sistema binario, y que además no se modifica su masa a lo largo de la evolución, su momento angular total se conservará a lo largo del tiempo. Este se define como:

$$J_\Omega(t) = \frac{2}{3} \int_0^{M_*} r(t, m)^2 \Omega(t, m) dm, \quad (2.101)$$

donde  $\Omega(t, m)$  es la velocidad angular local en el instante  $t$  para la capa asociada a una masa  $m$ , y  $M_*$  es la masa total de la estrella. La ecuación de conservación se escribirá:

$$J_\Omega(t) \equiv J_\Omega = cte. \quad (2.102)$$

En la aproximación de *rotación uniforme* se supone que el transporte de momento angular en el interior estelar se realiza de forma instantánea, con lo que la velocidad angular será la misma en todos los puntos de la estrella:

$$\Omega(t, m) \equiv \Omega(t). \quad (2.103)$$

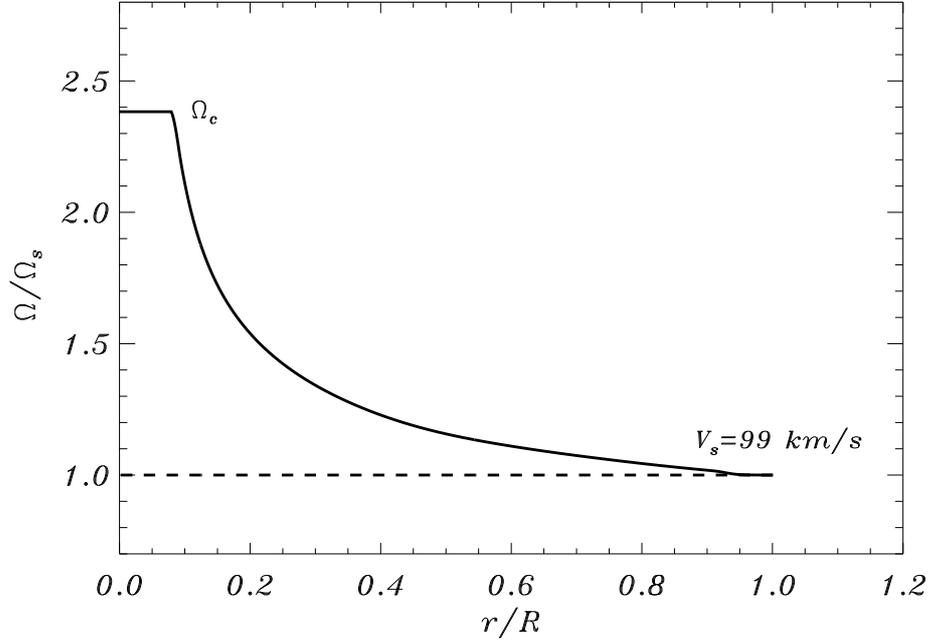


Figura 2.2: Perfil de la velocidad de rotación, normalizada a su valor en la superficie, para un ejemplo típico de estrella rotante (modelo con  $M = 1.8M_{\odot}$ ). El valor 1.0 representa la superficie estelar. La línea continua representa el perfil obtenido con rotación diferencial, y la de trazos, el correspondiente a la rotación uniforme. Tomado de Suárez et al. (2006).

En este caso, el momento angular verificará:

$$J_{\Omega} = \frac{2}{3}\Omega(t) \int_0^{M_*} r(t, m)^2 dm. \quad (2.104)$$

Nótese que el radio de la estrella se modificará a lo largo de la evolución, con lo que también lo hará su velocidad angular, dado que el momento angular total ha de conservarse. Existe otra aproximación, que simplifica aún más los cálculos, aunque es algo menos realista, la denominada *rotación rígida*. En este caso, se supone que la velocidad angular se mantiene constante a lo largo de la evolución, con lo que el momento angular global de la estrella no se conservará. Las diferencias encontradas en la estructura interna de los modelos calculados con estos dos tratamientos no son en general demasiado grandes, por lo que en el presente trabajo utilizaremos esta segunda aproximación.

### 2.5.2. Rotación diferencial

En este caso se considera que el momento angular de cada capa de la estrella se conserva localmente. Consideremos en primer lugar la variación local del momento de inercia por unidad de masa:

$$\Delta \frac{dI}{dm}. \quad (2.105)$$

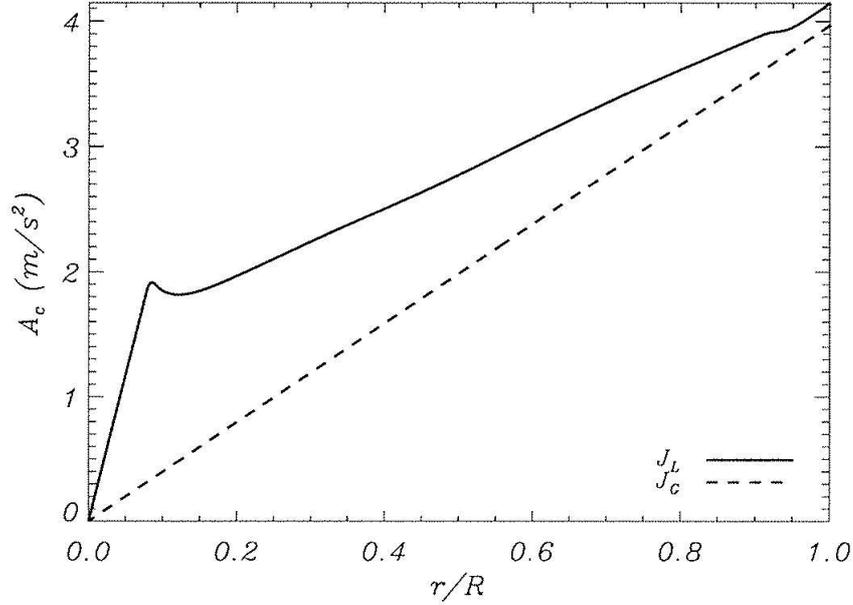


Figura 2.3: Componente radial de la aceleración centrífuga para un modelo con rotación diferencial,  $J_L$ , (línea continua), y otro con rotación uniforme,  $J_G$ , (línea discontinua). Modelo con  $1.8M_\odot$ , edad 1050 millones de años, y  $R = 2.27R_\odot$ . Tomado de Suárez et al. (2006).

El momento de inercia de un elemento de volumen esféricamente simétrico  $dV = r \sin \theta dr d\theta d\phi$  situado en el punto  $(r, \theta, \phi)$  viene dado por:

$$dI = \sin \theta \rho r^2 dr d\theta d\phi, \quad (2.106)$$

con lo que el momento de inercia por unidad de masa será:

$$\frac{dI}{dm} = \frac{1}{2} r^2 \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{2}{3} r^2. \quad (2.107)$$

Si ahora suponemos que el momento angular se conserva localmente para esta capa, tendremos:

$$\frac{2}{3} r_1^2 \Omega_1 = \frac{2}{3} r_2^2 \Omega_2, \quad (2.108)$$

donde los índices 1 y 2 representan los instantes  $t_1$  y  $t_2$ , respectivamente. Téngase en cuenta que en este caso se sigue conservando el momento angular total de la estrella, ya que la conservación local implica conservación global (siempre que no haya pérdida de masa).

A modo de comparación, en la figura 2.3 se muestra la componente radial de la aceleración centrífuga en función del radio relativo, para un modelo calculado con los dos tratamientos: rotación uniforme ( $J_G$ ), y rotación diferencial ( $J_L$ ). Hay que tener en cuenta que en este último caso se considera que el núcleo convectivo gira de forma rígida (Suárez et al., 2006), por lo que la distancia radial  $r = 0.1R$  corresponde a un máximo local que es el límite de dicho núcleo. La transición entre la rotación rígida de éste y la diferencial de las capas radiativas inmediatamente

superiores provoca una modificación de la densidad local en estas regiones. Dicha transición puede observarse en la figura 2.2, donde se muestra el perfil de rotación de un modelo correspondiente a una estrella de  $1.8M_{\odot}$  (Suárez et al., 2006). Se aprecia que el núcleo convectivo rota de forma rígida con velocidad angular constante  $\Omega_c$ , mientras que ésta disminuye gradualmente en la envoltura radiativa. A lo largo de la evolución, el núcleo se encoge, por lo que gira más rápido, aumentando el valor de  $\Omega_c$ . Esto implica que la velocidad superficial  $\Omega_s$  ha de disminuir para que se conserve el momento angular total de la estrella.

# Capítulo 3

## Oscilaciones Adiabáticas

En este capítulo se expone un breve resumen de las propiedades de las oscilaciones adiabáticas. No se tendrán en cuenta los efectos de la rotación, que serán considerados en el capítulo 5. Se parte, en la Sec. 3.1, de una breve descripción del estado de equilibrio estelar. Introduciendo en dicho equilibrio una perturbación pequeña, y desarrollando las ecuaciones hasta primer orden, se llega a las ecuaciones generales de las oscilaciones lineales, tal y como se muestra en la Sec. 3.2. La aproximación adiabática se presenta en la Sec. 3.3. Se estudia asimismo el tratamiento numérico de las ecuaciones y el problema de las condiciones de contorno que hay que utilizar en su resolución. Finalmente, en la Sec. 3.4 se describen brevemente las principales características de las oscilaciones adiabáticas, poniendo como principal ejemplo el caso del Sol, ya que es el más simple y el mejor conocido.

### 3.1. Estado de equilibrio estelar

La estructura de equilibrio se asume estática, de modo que pueden despreciarse todas las derivadas temporales. Además se considera que no hay velocidades. En este caso, la ecuación de continuidad (2.8) se satisface trivialmente. La ecuación de movimiento (2.10) se reduce a la de equilibrio hidrostático:

$$\nabla p_0 = -\rho_0 \nabla \Phi_0, \quad (3.1)$$

donde las cantidades en equilibrio se denotan por el subíndice “0”. La ecuación de Poisson (2.13) permanece inalterada:

$$\nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \rho_0. \quad (3.2)$$

Finalmente, la ecuación de la energía queda:

$$0 = \frac{dq}{dt} = \varepsilon_0 - \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{F}_0. \quad (3.3)$$

El ejemplo más simple de equilibrio es aquel en el que existe simetría esférica. En este caso las variables dependen únicamente de la distancia  $r$  al centro de la estrella. Aquí  $\mathbf{g}_0 = -g_0 \mathbf{a}_r$ , donde  $\mathbf{a}_r$  es un vector unitario dirigido radialmente hacia afuera. La ecuación (3.1) queda entonces:

$$\frac{dp_0}{dr} = -g_0 \rho_0. \quad (3.4)$$

También puede integrarse la ecuación de Poisson, para obtener:

$$g_0 = \frac{G}{r^2} \int_0^r 4\pi\rho_0 r'^2 dr' = \frac{Gm_0}{r^2}, \quad (3.5)$$

donde  $m_0(r)$  es la masa contenida en una esfera de radio  $r$ .

El flujo está dirigido radialmente hacia afuera,  $\mathbf{F} = F_{r,0}\mathbf{a}_r$ , de modo que la ecuación de la energía queda:

$$\rho_0\varepsilon_0 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 F_{r,0}) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dL_0}{dr}, \quad (3.6)$$

donde:

$$L_0 = 4\pi r^2 F_{r,0} \quad (3.7)$$

es el flujo total de energía a través de una esfera de radio  $r$ . Por tanto:

$$\frac{dL_0}{dr} = 4\pi r^2 \rho_0 \varepsilon_0. \quad (3.8)$$

Finalmente, la expresión (2.23) de difusión para el flujo se puede escribir:

$$\frac{dT_0}{dr} = -\frac{3\kappa_0\rho_0}{4ac_*} \frac{1}{T_0^3} \frac{L_0}{4\pi r^2} \quad (3.9)$$

Las ecuaciones (3.4), (3.5), (3.8) y (3.9), constituyen las usuales expresiones para la estructura estelar.

La ecuación (3.9) solamente es válida en las zonas radiativas de la estrella, esto es, en las capas en las que no haya convección. La presencia o no de ésta se establece mediante el “*criterio de Schwarzschild*” (ver Sec. 2.4.1). Cuando estemos en una zona convectiva, en lugar de resolver la última ecuación, se obtendrán los parámetros de la estrella a partir de la teoría **MLT**. En ésta, como ya se ha comentado, hay que incluir el flujo de energía convectiva:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_C$ , con lo que la luminosidad queda:

$$L = 4\pi r^2 (F_R + F_C) \quad (3.10)$$

Se denomina estado de equilibrio de una estrella a la solución de las ecuaciones anteriores junto con las de estado, de la opacidad y de la tasa de generación de energía nuclear.

Como condiciones de contorno se impondrá la regularidad en el centro y la continuidad de la capa externa con la capa inferior de la atmósfera.

## 3.2. Ecuaciones de oscilación

En esta sección derivaremos las ecuaciones básicas de las oscilaciones lineales. Para ello consideraremos el estado de equilibrio no perturbado de una estrella, y sobre él impondremos las perturbaciones. En la teoría lineal se asume que éstas son lo suficientemente pequeñas como para considerar solamente los términos de primer orden, despreciándose los superiores.

### 3.2.1. Análisis perturbativo

Hay dos formas distintas de expresar las perturbaciones: la *Euleriana* y la *Lagrangiana*. Supongamos una cantidad física  $f$  (escalar or vectorial), que en el estado de equilibrio, en un punto fijo del espacio  $\mathbf{r}$ , toma el valor  $f_0(\mathbf{r})$ . Supongamos que esta cantidad, en el estado perturbado, en el mismo punto, toma el valor  $f(\mathbf{r}, t)$ , que dependerá generalmente del tiempo. Se define entonces la *perturbación Euleriana* de la magnitud  $f$  en el punto  $\mathbf{r}$  como:

$$f'(\mathbf{r}, t) \equiv f(\mathbf{r}, t) - f_0(\mathbf{r}). \quad (3.11)$$

Esta es la descripción correspondiente a un observador estacionario, esto es, que no se mueve con el fluido.

Supongamos ahora otro observador que se mueve con un cierto elemento del fluido, y que observa cómo varía el valor de la magnitud  $f$  a lo largo de su movimiento. Dicho elemento de fluido estaría en el instante inicial en una posición que denotaremos por  $\mathbf{r}_0$ . Se define la perturbación Lagrangiana de la magnitud  $f$  como:

$$\delta f(\mathbf{r}_0, t) \equiv f(\mathbf{r}, t) - f_0(\mathbf{r}_0), \quad (3.12)$$

donde ahora  $\mathbf{r}$  representa el vector de posición del elemento de fluido, que será en general función del tiempo. Cada elemento vendrá “etiquetado” entonces por su posición inicial,  $\mathbf{r}_0$ .

Estas dos cantidades pueden relacionarse entre sí. Definamos en primer lugar el desplazamiento del elemento perturbado:

$$\boldsymbol{\xi} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_0. \quad (3.13)$$

Si consideramos que es pequeño, podemos desarrollar la magnitud  $f$  hasta primer orden, tenemos la relación entre ambos tipos de perturbaciones:

$$\delta f(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) - f_0(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) = f(\mathbf{r}, t) - f_0(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla f_0(\mathbf{r}) = f'(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla f_0(\mathbf{r}), \quad (3.14)$$

equivalente a la existente entre las derivadas local y material.

Las variaciones temporales son:

$$\frac{d\delta f(\mathbf{r}, t)}{dt}, \quad \frac{\partial f'(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

donde:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad (3.15)$$

y:

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (3.16)$$

En el caso general en el que la velocidad del estado de equilibrio no es nula, como ocurre, por ejemplo, en las estrellas rotantes, la relación entre la perturbación Lagrangiana y Euleriana de la velocidad es:

$$\mathbf{v}' = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0. \quad (3.17)$$

Cuando no hay movimiento en el estado de equilibrio ( $\mathbf{v}_0 \neq 0$ ), tenemos simplemente:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' = \delta\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} \quad (3.18)$$

A continuación se perturban las ecuaciones (2.7), (2.11), (2.13), (2.22) y (2.23), quedándonos con el primer orden. A partir de ahora las magnitudes en equilibrio se denotarán sin subíndice, ya que no hay posibilidad de confusión.

■ **Conservación de la masa:**

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.19)$$

■ **Conservación del momento:**

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p' + \rho \nabla \Phi' + \rho' \nabla \Phi = 0 \quad (3.20)$$

■ **Ecuación de la energía:**

$$\rho T \frac{\partial}{\partial t} (S' + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla S) = (\rho \varepsilon_N)' - \nabla \cdot \mathbf{F}' \quad (3.21)$$

■ **Ecuación de Poisson:**

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho' \quad (3.22)$$

■ **Ecuación de transporte radiativo:**

$$\mathbf{F}' = -K \nabla T' - K' \nabla T \quad (3.23)$$

El sistema (3.19)-(3.23) forma un conjunto de ecuaciones diferenciales homogéneas en derivadas parciales, con respecto a  $t$  y  $\mathbf{r}$ , para las variables perturbadas  $\rho', p', T', \dots$ , y la velocidad  $\mathbf{v}$ . Los coeficientes de estas ecuaciones incluyen solamente cantidades en equilibrio como  $\rho, p, \dots$ , que son funciones únicamente de la coordenada radial  $r$ , ya que estamos suponiendo simetría esférica en el estado no perturbado (estrellas no rotantes y sin campos magnéticos):

$$\rho = \rho(r), \quad \Phi = \Phi(r), \dots$$

Por lo tanto, podemos separar la dependencia temporal de la espacial y expresarla en una forma proporcional a  $e^{i\sigma_k t}$ , donde  $\sigma_k$  depende de cada solución particular. Así, la solución general de cada una de las variables  $\mathbf{X}$  del sistema de ecuaciones sería de la forma:

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} A_k \mathbf{X}_k e^{i\sigma_k t} \right\}. \quad (3.24)$$

Teniendo en cuenta que  $\boldsymbol{\xi} \propto e^{i\sigma t}$  para cada uno de los modos de oscilación, se verificará que:  $\mathbf{v} = i\sigma \boldsymbol{\xi}$ . Incluyendo esto en la ecuación de continuidad (3.19), tenemos:

$$\rho' + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{\xi}) = \delta\rho + \rho \nabla \cdot \delta\mathbf{r} = 0, \quad (3.25)$$

y considerando la relación entre las perturbaciones Lagrangiana y Euleriana nos queda finalmente:

$$\delta\rho/\rho + \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0. \quad (3.26)$$

La ecuación de movimiento (3.20) podrá escribirse:

$$-\sigma^2 \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{\rho} \nabla p' + \nabla \Phi' + \frac{\rho'}{\rho} \nabla \Phi = 0 \quad (3.27)$$

Debido a la simetría esférica del estado de equilibrio, podemos dividir el movimiento en dos componentes, una radial y otra horizontal (perpendicular a la dirección radial), con lo que los desplazamientos total y horizontal serán:

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_r, \xi_\theta, \xi_\phi), \quad \boldsymbol{\xi}_\perp = (0, \xi_\theta, \xi_\phi) \quad (3.28)$$

Asimismo, se puede definir:

$$\nabla_\perp = \frac{1}{r} \left( 0, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad (3.29)$$

cuyo cuadrado es:

$$\nabla_\perp^2 = \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]. \quad (3.30)$$

Con esta descomposición, se puede dividir la ecuación de movimiento (3.27) en dos componentes, una horizontal y otra radial:

$$-\sigma^2 \xi_r + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{\partial \Phi'}{\partial r} + \frac{\rho'}{\rho} \frac{d\Phi}{dr} = 0, \quad (3.31)$$

$$-\sigma^2 \boldsymbol{\xi}_\perp + \nabla \left( \frac{p'}{\rho} + \Phi' \right) = 0. \quad (3.32)$$

Eliminando  $\boldsymbol{\xi}_\perp$  de la ecuación de continuidad (3.25), y usando (3.32), tenemos:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \xi_r) + \frac{1}{\sigma^2} \nabla_\perp^2 \left( \frac{p'}{\rho} + \Phi' \right) = 0. \quad (3.33)$$

De forma similar, la ecuación de Poisson (3.22) quedaría:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial r} \right) + \nabla_\perp^2 \Phi' = 4\pi G \rho'. \quad (3.34)$$

Partiendo de la relación termodinámica:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\delta p}{p} - \nabla_{\text{ad}} \frac{\rho T}{p} \delta S, \quad (3.35)$$

donde  $\Gamma_1$  y  $\nabla_{\text{ad}}$  se definieron en las ecuaciones (2.19) y (2.40), respectivamente, y utilizando la relación entre  $p'$  y  $\delta p$ , se tiene:

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{p'}{p} - A \xi_r - \nabla_{\text{ad}} \frac{\rho T}{p} \delta S, \quad (3.36)$$

donde  $A$  se denomina *discriminante de Schwarzschild*, y establece la estabilidad ( $A < 0$ ) o inestabilidad ( $A > 0$ ) convectiva:

$$A = -\frac{N^2}{g} = \frac{d \ln \rho}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} = -\frac{V}{r} [v_T(\nabla_{\text{ad}} - \nabla) + \nabla_\mu], \quad (3.37)$$

donde los gradientes  $\nabla$  y  $\nabla_\mu$  se definieron en las ecuaciones (2.37) y (2.51), respectivamente, y la magnitud termodinámica  $v_T$  se define como:

$$v_T = - \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p. \quad (3.38)$$

Asimismo, se ha definido la *frecuencia de Brünt-Väisälä*:

$$N^2 = -g \left( \frac{d \ln \rho}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} \right) = \frac{gV}{r} [v_T(\nabla_{\text{ad}} - \nabla) + \nabla_\mu], \quad (3.39)$$

donde  $V$  es el *invariante homólogo*:

$$V(r) = -\frac{d \ln p}{d \ln r} = \frac{GM_r \rho}{rp}. \quad (3.40)$$

Usando todas las expresiones anteriores, las ecuaciones perturbadas quedan finalmente:

$$g \nabla_{\text{ad}} \frac{\rho T}{p} \delta S = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\rho g}{\Gamma_1 p} \right) p' - (\sigma^2 + gA) \xi_r + \frac{\partial \Phi'}{\partial r}, \quad (3.41)$$

$$\nabla_{\text{ad}} \frac{\rho T}{p} \delta S = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \xi_r) + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} \xi_r + \left( \frac{\rho}{\Gamma_1 p} + \frac{\nabla_\perp^2}{\sigma^2} \right) \frac{p'}{\rho} + \frac{1}{\sigma^2} \nabla_\perp^2 \Phi', \quad (3.42)$$

$$-4\pi G \nabla_{\text{ad}} \frac{\rho^2 T}{p} \delta S = \nabla^2 \Phi' - 4\pi G \rho \left( \frac{p'}{\Gamma_1 p} - A \xi_r \right). \quad (3.43)$$

Por otra parte, la perturbación del flujo viene dada por:

$$\begin{aligned} F'_r &= -K \frac{\partial T'}{\partial r} - K' \frac{dT'}{dr}, \\ \mathbf{F}'_\perp &= -K \nabla_\perp T'. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación de la energía (3.21), obtenemos:

$$i\sigma \rho T \delta S = (\rho \varepsilon_N)' - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F'_r) + \nabla_\perp^2 (KT'). \quad (3.45)$$

Finalmente completaremos el sistema de ecuaciones con la relación termodinámica:

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{\delta p}{p} + \frac{\delta S}{c_p}. \quad (3.46)$$

El sistema (3.41)-(3.46) está compuesto por las ecuaciones básicas para las oscilaciones lineales no adiabáticas y no radiales, y constituye un problema de autovalores,  $\sigma$ , cuyas autofunciones son  $\xi_r$ ,  $p'$ ,  $\Phi'$ ,  $T'$ ,  $\delta S$  y  $F'_r$ .

### 3.2.2. Ecuaciones de oscilación en las direcciones radial y angular

En las ecuaciones anteriores, las variables radial y angulares están separadas, por lo que podemos resolverlas independientemente para cada dirección, utilizando los armónicos esféricos. Éstos se definen en la Sec. A.3, donde se muestran asimismo sus propiedades más importantes.

Entonces las funciones se pueden expresar de la siguiente forma:

$$p'(t, r, \theta, \phi) = p'(r)Y_\ell^m(\theta, \phi)e^{i\sigma t}. \quad (3.47)$$

A partir de ahora, los símbolos  $p'$ ,  $T'$ , etc., denotarán la parte radial de las variables, esto es,  $p'(r)$ ,  $T'(r)$ , etc., mientras no haya lugar a confusión.

La expresión correspondiente para el vector desplazamiento  $\xi$  es:

$$\xi = \left[ \xi_r(r), \xi_h(r) \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\xi_h(r)}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{i\sigma t}, \quad (3.48)$$

donde  $\xi_h$  se puede obtener de la ecuación (3.32):

$$\xi_h = \frac{1}{\sigma^2 r} \left( \frac{p'}{\rho} + \Phi' \right). \quad (3.49)$$

Usando esta separación de variables, nos queda un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$g \nabla_{\text{ad}} \frac{\rho T}{p} \delta S = \frac{1}{\rho} \frac{dp'}{dr} + \frac{g}{\rho c^2} p' + (N^2 - \sigma^2) \xi_r + \frac{d\Phi'}{dr}, \quad (3.50)$$

$$\nabla_{\text{ad}} \frac{\rho T}{p} \delta S = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \xi_r) + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} \xi_r + \left( 1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} \right) \frac{p'}{\rho c^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2} \Phi', \quad (3.51)$$

$$-4\pi G \nabla_{\text{ad}} \frac{\rho^2 T}{p} \delta S = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi' - 4\pi G \rho \left( \frac{p'}{\rho c^2} + \frac{N^2}{g} \xi_r \right), \quad (3.52)$$

$$K \frac{dT'}{dr} = -F'_r - K' \frac{dT}{dr}, \quad (3.53)$$

$$i\sigma \rho T \delta S = (\rho \varepsilon_N)' - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 F'_r) + -\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} K T'. \quad (3.54)$$

donde  $c$  es la velocidad del sonido definida en (2.76), y  $L_\ell$  es la *frecuencia de Lamb*:

$$L_\ell^2 = \frac{\ell(\ell+1)c^2}{r^2}. \quad (3.55)$$

Las expresiones (3.50)-(3.54) constituyen las ecuaciones básicas de las oscilaciones no adiabáticas y no radiales, equivalente al sistema (3.41) - (3.46).

Como se puede observar, estas ecuaciones son independientes de  $m$ , esto es, cada solución tiene una degeneración  $2\ell + 1$  en  $m$ . Esto es debido a la independencia de las soluciones con las posibles orientaciones de los ejes de coordenadas, ya que hemos supuesto que el sistema no rota ni tiene campos magnéticos, por lo que su simetría es completamente esférica en el estado de equilibrio. Si la estrella rotara o tuviera

campos magnéticos, entonces la simetría se rompería y se privilegiaría una dirección del espacio. En este caso desaparecería la degeneración de los estados de oscilación.

Por otro lado, puede comprobarse que existe una solución trivial de las ecuaciones. En ésta, la frecuencia  $\sigma$  y todas las variables escalares son cero ( $\sigma, p', T', \rho', \Phi' = 0$ ), pero el vector velocidad  $\mathbf{v}$  no lo es. A partir de las ecuaciones se obtiene una solución de flujo estacionario que satisface:

$$\begin{aligned} v_r &= 0 \\ \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp} &= 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

esto es, el movimiento horizontal de cualquier elemento de volumen está confinado a una superficie esférica. La solución de la ecuación (3.56) está dada por:

$$\mathbf{v}_{\perp} = \nabla_{\perp} \times (Q \mathbf{e}_r),$$

donde  $\mathbf{e}_r$  es un vector unitario en la dirección radial y  $Q$  es cualquier escalar. Desarrollando  $Q$  en términos de armónicos esféricos:

$$Q = \sum_{\ell, m} Q_{\ell}^m(r) Y_{\ell}^m(\theta, \phi),$$

tenemos para cada componente del movimiento horizontal:

$$\mathbf{v}_{\ell}^m = \left( \frac{Q_{\ell}^m}{r} \right) \left( 0, \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, -\frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y_{\ell}^m(\theta, \phi). \quad (3.57)$$

Esta forma de la solución es el denominado *modo toroidal*, mientras que los modos ordinarios con  $\sigma \neq 0$  son los llamados *modos esferoidales*. Los primeros constituyen movimientos estacionarios no oscilatorios, y por tanto no son de interés en el caso de estrellas esféricas sin campos magnéticos ni rotación. En el caso en que aparezca algunas de estas situaciones, estos modos pasan a ser oscilatorios, siendo necesario tenerlos en cuenta, como veremos en el Cap. 5.

## 3.3. Aproximación adiabática

### 3.3.1. Oscilaciones adiabáticas

Como ya pusimos de manifiesto en la Sec. 2.1, en la mayor parte del volumen de la estrella el tiempo de relajación térmico es mucho mayor que el dinámico y, por tanto, que los periodos de pulsación, por lo que es válida la aproximación adiabática. Lo que ocurre desde el punto de vista termodinámico es que durante una oscilación la entropía de un elemento de volumen no tiene tiempo suficiente para variar significativamente, o sea:

$$\delta S / c_p \approx 0. \quad (3.58)$$

Con esta aproximación, las ecuaciones dinámicas se desacoplan de las térmicas, reduciéndose el sistema a:

$$\frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2} \Phi' = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \xi_r) - \frac{g}{c^2} \xi_r + \left( 1 - \frac{L_{\ell}^2}{\sigma^2} \right) \frac{p'}{\rho c^2}, \quad (3.59)$$

$$-\frac{d\Phi'}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{dp'}{dr} + \frac{g}{\rho c^2} p' + (N^2 - \sigma^2) \xi_r, \quad (3.60)$$

$$4\pi G \rho \left( \frac{p'}{\rho c^2} + \frac{N^2}{g} \xi_r \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi'. \quad (3.61)$$

Este sistema es equivalente a cuatro ecuaciones de primer orden, al ser la última de segundo orden.

En esta aproximación, las relaciones termodinámicas (3.35) y (3.46) se simplifican bastante:

$$\delta\rho = \frac{\delta p}{c^2}, \quad (3.62)$$

$$\frac{\delta T}{T} = (\Gamma_3 - 1) \frac{\delta\rho}{\rho}, \quad (3.63)$$

por lo que el número de variables a resolver se reduce a cuatro:  $\xi_r$ ,  $p'$ ,  $\Phi'$  y  $d\Phi'/dr$ .

### 3.3.2. Condiciones de contorno

Necesitamos ahora cuatro condiciones de contorno. Éstas son discutidas con bastante profundidad en Unno et al. (1989) y Cox (1980).

El centro de la estrella,  $r = 0$ , es un punto singular de las ecuaciones. Entonces, como es usual en teoría de ecuaciones diferenciales, son posibles soluciones tanto regulares como singulares en ese punto. Dos de las condiciones sirven para seleccionar las soluciones regulares. Desarrollando las ecuaciones puede demostrarse que cerca de  $r = 0$ ,  $\xi_r$  se comporta como  $r^{\ell-1}$ , mientras que  $p'$  y  $\Phi'$  lo hacen como  $r^\ell$ . En el caso especial de las oscilaciones radiales, sin embargo, se tiene que:  $\xi_r \sim r$  (en efecto, es obvio a partir de consideraciones geométricas, que para oscilaciones esféricamente simétricas el desplazamiento debe anularse en el centro). A partir de estos desarrollos se pueden obtener dos relaciones entre las soluciones cerca de  $r = 0$ :

$$\frac{d\Phi'}{dr} - \frac{\ell\Phi'}{r} = 0, \quad \text{para } r \sim 0 \quad (3.64)$$

$$\xi_r - \frac{\ell}{\sigma^2 r} \left( \frac{p'}{\rho} + \Phi' \right) = 0, \quad \text{para } r \sim 0 \quad (3.65)$$

En particular, se puede demostrar que para  $\ell > 0$ :

$$\xi_r \simeq \ell\xi_h, \quad \text{para } r \rightarrow 0. \quad (3.66)$$

Por otro lado, se puede deducir una condición en la superficie simplemente imponiendo continuidad de  $\Phi'$  y de su derivada en  $r = R$ . Fuera de la estrella, la perturbación de la densidad desaparece, y puede resolverse la ecuación de Poisson analíticamente. La solución que se anula en el infinito es:

$$\Phi' = Ar^{-\ell-1}, \quad (3.67)$$

donde  $A$  es una constante. Por lo tanto,  $\Phi'$  debe satisfacer:

$$\frac{d\Phi'}{dr} + \frac{\ell+1}{r}\Phi' = 0 \quad \text{para } r = R. \quad (3.68)$$

La segunda ecuación depende del tratamiento de la atmósfera estelar, y en consecuencia puede ser complicada. En general, si se considera que la estrella tiene una superficie bien definida en  $r = R$ , es físicamente razonable suponer que la presión sea constante sobre ella. Entonces la perturbación Lagrangiana se anulará:

$$\delta p = p' + \xi_r \frac{dp}{dr} \simeq 0 \quad \text{para } r = R. \quad (3.69)$$

Un análisis más detallado del comportamiento de la atmósfera proporciona resultados muy similares, excepto para altas frecuencias.

A partir de (3.69), puede estimarse el cociente entre las componentes radial y horizontal del desplazamiento en la superficie. La amplitud del desplazamiento horizontal viene dado por (3.49). Sin embargo, en la mayoría de los casos, la perturbación en el potencial gravitatorio es muy pequeña. Entonces, de (3.69) se obtiene:

$$\frac{\xi_h(R)}{\xi_r(R)} = \frac{g_s}{R\sigma^2} \equiv \omega^{-2}, \quad (3.70)$$

donde  $g_s$  es la gravedad en la superficie, y  $\omega$  es una frecuencia adimensional definida por:

$$\omega^2 = \frac{R^3}{GM}\sigma^2. \quad (3.71)$$

Por tanto, el valor en la superficie de  $\xi_r/\xi_h$  en esta aproximación, depende únicamente de la frecuencia. Para el caso de las oscilaciones de cinco minutos del Sol,  $\omega^2 \sim 1000$ , y entonces el movimiento es fundamentalmente vertical, excepto cuando  $\ell$  toma valores elevados.

### 3.3.3. Oscilaciones radiales adiabáticas

Las oscilaciones radiales son un caso particular de las anteriores, en el que  $\ell = 0$ . La ecuación (3.59) se reduce a:

$$\frac{p'}{\rho c^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 \xi_r) + \frac{g}{c^2} \xi_r. \quad (3.72)$$

Sustituyendo esta ecuación en la (3.61), con  $\ell = 0$ , tenemos:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) + 4\pi G \left[ \rho \frac{d}{dr}(r^2 \xi_r) + r^2 \xi_r \frac{d\rho}{dr} \right] = 0. \quad (3.73)$$

Usando esta ecuación y la (3.60), junto con algunas relaciones de la estructura de equilibrio de la estrella, se obtiene finalmente la ecuación diferencial estándar para las oscilaciones radiales (Ledoux y Walraven, 1958):

$$\frac{d}{dr} \left[ \Gamma_1 p r^4 \frac{d}{dr} \left( \frac{\xi_r}{r} \right) \right] + \left\{ \sigma^2 \rho r^4 + r^3 \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4)p] \right\} \left( \frac{\xi_r}{r} \right) = 0. \quad (3.74)$$

Esta ecuación, junto con las condiciones de contorno (3.65), con  $\ell = 0$ , y (3.69), forman un problema de autovalores del tipo *Sturm-Liouville*, con autovalor  $\sigma^2$ .

El modo con el autovalor más pequeño se denomina *modo fundamental*,  $\mathbf{F}$ , y su autofunción no tiene nodos en el intervalo  $0 \leq r \leq R$ . El modo con  $n$  nodos se denomina sobretono  $n$ -ésimo,  $\mathbf{nH}$ . Las autofrecuencias aumentan con el número de nodos de las autofunciones, como se puede observar en la Fig. 3.1.

### 3.3.4. Propiedades generales de las autofrecuencias y autofunciones

En la Fig. 3.1 se muestran algunos autovalores para un polítopo con índice 3 y  $\Gamma_1 = 5/3$ . Concretamente, se representa el logaritmo de  $\omega^2$  frente a  $\ell$ . Se observan

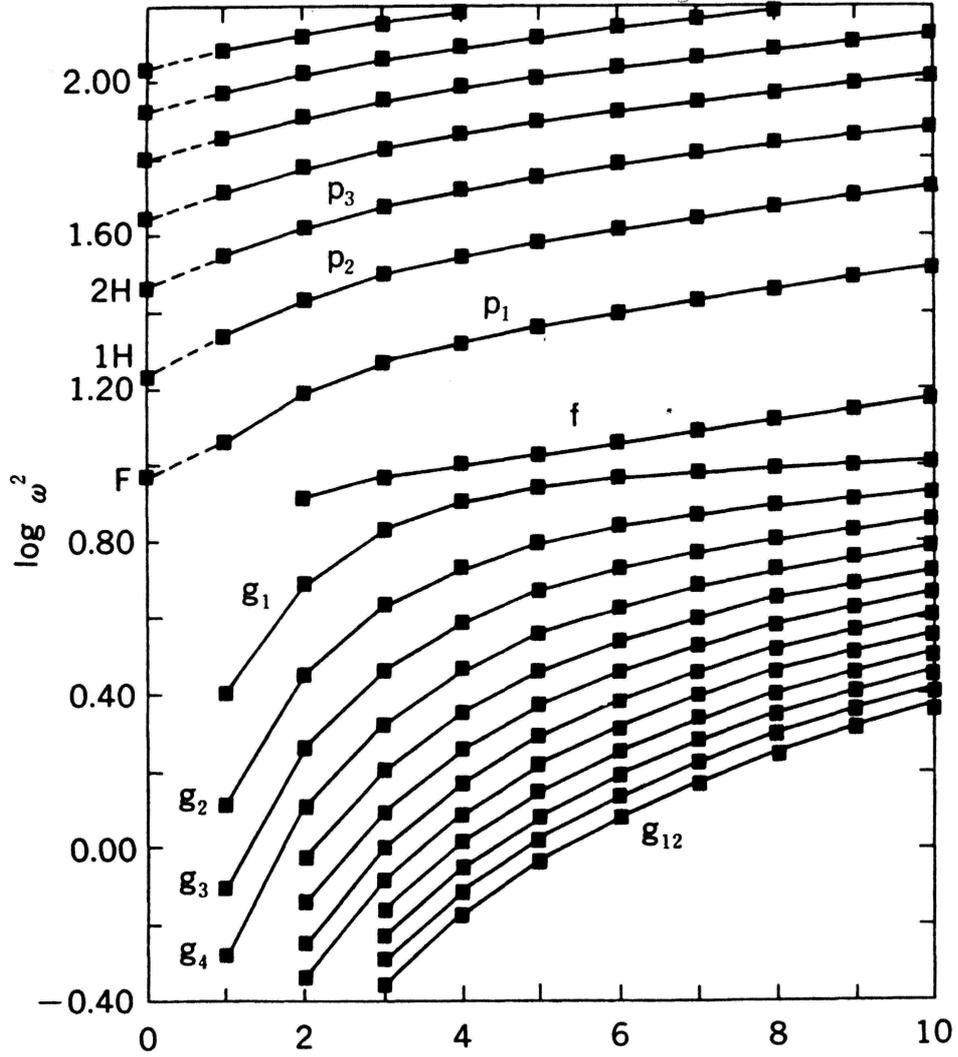


Figura 3.1: Cuadrado de la frecuencia adimensional  $\omega^2$ , en función del índice  $\ell$  para las oscilaciones adiabáticas de un polítropo de índice 3. Las pulsaciones radiales se corresponden con  $\ell = 0$ . Tomado de Unno et al. (1989).

dos secuencias de autovalores. Una de ellas tiende a infinito conforme aumenta  $n$ :

$$\sigma_n^2 \rightarrow \infty \quad \text{para} \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{modos } \mathbf{p}), \quad (3.75)$$

y la otra tiende a cero:

$$\sigma_n^2 \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{modos } \mathbf{g}). \quad (3.76)$$

También se observa que para un cierto orden radial  $n$ , la frecuencia aumenta con  $\ell$ .

En la Fig. 3.2 se muestran las autofunciones para el desplazamiento radial, normalizado en la superficie para los modos  $\mathbf{p}$ , y en el centro para los modos  $\mathbf{g}$ . Es evidente que la amplitud relativa de los primeros es grande solamente en la parte más externa de la estrella, mientras que la de los segundos lo es en la zona más interna. El modo  $\mathbf{f}$ , que no tiene nodos en la variación radial de la autofunción, tiene carácter intermedio entre el modo  $\mathbf{p}_1$  y el  $\mathbf{g}_1$ .

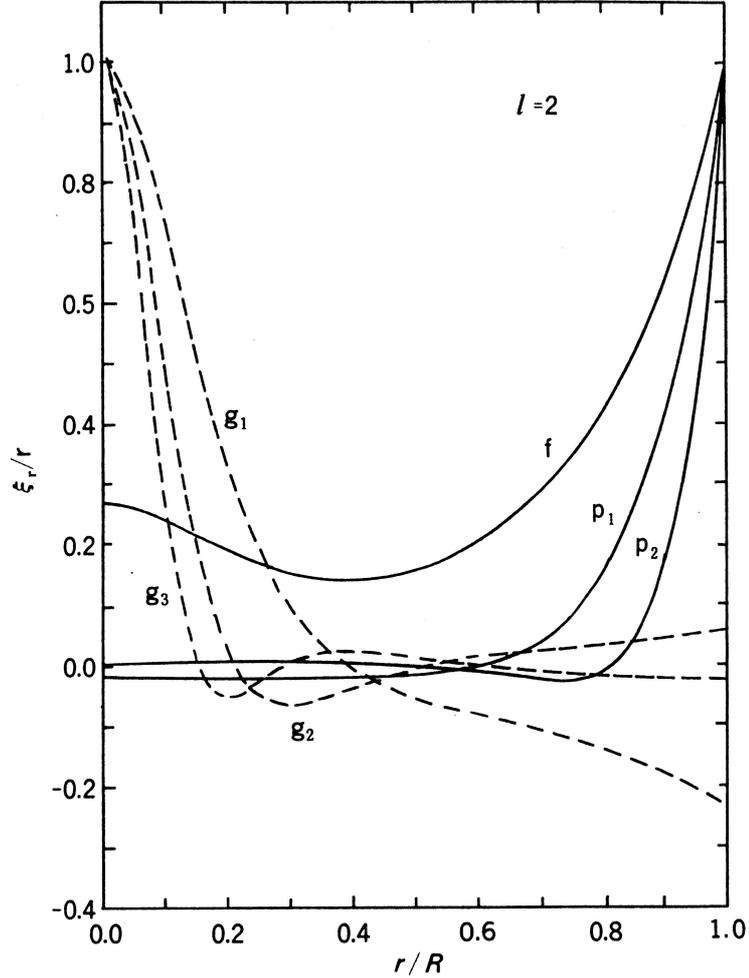


Figura 3.2: Autofunciones de los modos no radiales con  $\ell = 2$  para un politropo con  $N = 3$ , en función de la distancia al centro. Las curvas sólidas corresponden a los modos  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{p}$ , normalizadas a uno en la superficie, mientras que las curvas discontinuas representan autofunciones de los modos  $\mathbf{g}$ , normalizadas en el centro. Tomado de Unno et al. (1989).

Para el modo  $\mathbf{f}$  con  $\ell = 1$ , se tiene que  $\sigma = 0$ , por lo que dicha solución se corresponde con un desplazamiento global de toda la estrella. Por tanto, ésta es solamente una solución formal, y no tiene correspondencia física. Más adelante, en la Sec. 3.4, profundizaremos en las propiedades de este modo.

### 3.3.5. Tratamiento numérico de las ecuaciones

Un problema que se encuentra en estas ecuaciones es que sus coeficientes varían de forma muy drástica de unas partes de la estrella a otras. Esto es un grave inconveniente a la hora de resolverlas numéricamente. Para solucionar este problema, se utiliza en el código de pulsación la reformulación adimensional propuesta por Dziembowski (1971), tal y como aparece en Unno et al. (1989) y en Moya et al. (2004b), en la que todos los coeficientes son del orden de la unidad. Las variables

adimensionales se definen:

$$y_1 = \frac{\xi_r}{r}, \quad (3.77)$$

$$y_2 = \frac{1}{gr} \left( \frac{p'}{\rho} + \Phi' \right), \quad (3.78)$$

$$y_3 = \frac{1}{gr} \Phi', \quad (3.79)$$

$$y_4 = \frac{1}{g} \frac{d\Phi'}{dr}. \quad (3.80)$$

Las variables  $\xi_r$ ,  $p'$ ,  $\Phi'$  y  $d\Phi'/dr$  se escriben en función de las nuevas:

$$\xi_r = ry_1, \quad (3.81)$$

$$p' = \rho gr(y_2 - y_3), \quad (3.82)$$

$$\Phi' = gr y_3, \quad (3.83)$$

$$\frac{d\Phi'}{dr} = g y_4. \quad (3.84)$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en (3.59)-(3.61), tenemos:

$$r \frac{dy_1}{dr} = \left( \frac{gr}{c^2} - 3 \right) y_1 + \frac{gr}{c^2} \left( \frac{L_\ell^2}{c^2} - 1 \right) y_2 + \frac{gr}{c^2} y_3, \quad (3.85)$$

$$r \frac{dy_2}{dr} = - (N^2 - \sigma^2) \frac{r}{g} y_1 - \left[ \frac{gr}{c^2} + \frac{d \ln(\rho g)}{d \ln r} + 1 \right] y_2 + \left( \frac{gr}{c^2} + \frac{d \ln \rho}{d \ln r} \right) y_3, \quad (3.86)$$

$$r \frac{dy_4}{dr} = 4\pi G \frac{N^2 \rho r^2}{g^2} y_1 + 4\pi G \frac{\rho r^2}{c^2} y_2 + \left[ \ell(\ell + 1) - 4\pi G \frac{\rho r^2}{c^2} \right] y_3 - \left[ \frac{d \ln(gr)}{d \ln r} + 1 \right] y_4. \quad (3.87)$$

La combinación de las ecuaciones (3.79) y (3.80) da la cuarta ecuación que buscamos:

$$r \frac{dy_3}{dr} = - \frac{d \ln(gr)}{d \ln r} y_3 + y_4. \quad (3.88)$$

Por último, podemos utilizar el radio relativo:  $x = r/R$ , con lo que nos queda:

$$x \frac{dy_1}{dx} = (V_g - 3) y_1 + \left[ \frac{\ell(\ell + 1)}{c_1 \omega^2} - V_g \right] y_2 + V_g y_3, \quad (3.89)$$

$$x \frac{dy_2}{dx} = (c_1 \omega^2 - A^*) y_1 + (A^* - U + a) y_2 - A^* y_3, \quad (3.90)$$

$$x \frac{dy_3}{dx} = (1 - U) y_3 + y_4, \quad (3.91)$$

$$x \frac{dy_4}{dx} = U A^* y_1 + U V_g y_2 + [\ell(\ell + 1) - U V_g] y_3 - U y_4, \quad (3.92)$$

donde:

$$V_g = \frac{V}{\Gamma_1} = - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{d \ln r} = \frac{gr}{c^2}, \quad U = \frac{d \ln M_r}{d \ln r} = \frac{4\pi \rho r^3}{M_r}, \quad (3.93)$$

$$c_1 = \frac{x^3 M}{M_r}, \quad A^* = -rA = \frac{M_r}{g},$$

y  $\omega^2$  es el cuadrado de la frecuencia adimensional.

Como la atmósfera es altamente no adiabática, la solución adiabática debe terminar en la superficie donde las aproximaciones ya no sean válidas, y allí se impondrá la continuidad de  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  e  $y_4$  con las soluciones de la atmósfera.

Las condiciones de contorno, para el caso adiabático, en el centro, (3.64) y (3.65) quedan:

$$c_1\omega^2 y_1 - \ell y_2 = 0, \quad (3.94)$$

$$\ell y_3 - y_4 = 0. \quad (3.95)$$

Asimismo, podemos plantear también las condiciones de contorno en la superficie. Los autovalores de la matriz de coeficientes de las ecuaciones, cuando  $r \rightarrow R$ , son:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\ell \\ \lambda_2 = \ell + 1 \\ \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} [(V_g + A^* - 2) \pm \gamma^{1/2}] \end{cases} \quad (3.96)$$

donde:

$$\gamma = (A^* - V_g + 4)^2 + 4 \left[ \frac{\ell(\ell + 1)}{\omega^2} - V_g \right] (\omega^2 - A^*). \quad (3.97)$$

La densidad de energía cinética para las soluciones asociadas a  $\lambda_{\pm}$ , en  $r \rightarrow R$ , se comporta como:

$$\epsilon_k \propto x^{\pm\sqrt{\gamma}}, \quad (3.98)$$

por lo que las oscilaciones cerca de la superficie serán evanescentes u ondas progresivas dependiendo del signo de  $\gamma$ . Las raíces de  $\gamma = 0$  nos dan dos frecuencias,  $\omega_{c_1}$  y  $\omega_{c_2}$ , que representan las *frecuencias críticas* de propagación de las ondas gravitatorias y acústicas, respectivamente ( $\omega_{c_1} < \omega_{c_2}$ ).

En el caso en que  $\omega_{c_1} < \omega < \omega_{c_2}$ , se tiene que  $\gamma > 0$ , y la oscilación asociada con  $\lambda = \lambda_{\pm}$  es evanescente, por lo que se reflejará y se podrán formar ondas estacionarias. En esta situación las condiciones de contorno son:

$$(\ell + 1)y_3 + y_4 = 0, \quad (3.99)$$

$$\frac{\lambda_- - b_{11}}{b_{12}} y_1 - y_2 - \left[ \frac{\alpha_1(\lambda_- - b_{11})}{b_{12}} - \alpha_2 \right] y_3 = 0, \quad (3.100)$$

donde:

$$\begin{aligned} b_{11} &= V_g - 3, & b_{12} &= \frac{\ell(\ell + 1)}{\omega^2} - V_g, & b_{13} &= V_g, \\ b_{21} &= \omega^2 - A^*, & b_{22} &= 1 + A^*, & b_{23} &= -A^*, \\ \alpha_1 &= \frac{b_{12}b_{23} - b_{13}(b_{22} + \ell)}{(b_{11} + \ell)(b_{22} + \ell) - b_{12}b_{21}}, & \alpha_2 &= \frac{b_{21}b_{13} - b_{23}(b_{11} + \ell)}{(b_{11} + \ell)(b_{22} + \ell) - b_{12}b_{21}}. \end{aligned}$$

En los casos en los que  $\omega < \omega_{c_1}$  ó  $\omega > \omega_{c_2}$ , se tiene que  $\gamma < 0$ , y la onda no se refleja totalmente en la superficie, por lo que se propaga y por tanto va perdiendo energía. Ésta es la llamada *onda progresiva*.

Así, el sistema adiabático (3.89)-(3.92), junto con las cuatro condiciones de contorno descritas, forman un problema hermitico de autovalores, por lo que tanto el autovalor  $\omega^2$  como las autofunciones son reales. Esto quiere decir que  $\omega$  es, o bien puramente real, y entonces se dice que tenemos un modo *dinamicamente estable*,

o bien es imaginario puro, dando lugar a un modo *dinámicamente inestable*. En el primer caso la dependencia de las autofunciones con los ángulos y el tiempo es de la forma  $\cos(m\phi + \omega t + \delta_0)$ , donde  $\delta_0$  es la fase inicial. Por tanto, estamos ante un oscilador sin amortiguar. En el segundo caso, la amplitud del movimiento oscilatorio crecerá o disminuirá exponencialmente. Si disminuyera con el tiempo, la oscilación terminaría desapareciendo. En caso contrario, estaríamos ante una explosión violenta. De todos modos, a nosotros nos interesan únicamente los modos dinámicamente estables.

### 3.4. Naturaleza física de los modos de oscilación

Las ondas acústicas y de gravedad, responsables de las oscilaciones, se pueden propagar radialmente solamente en regiones restringidas, dependiendo de las propiedades de la oscilación. Tenemos, pues, ondas estacionarias que se forman por reflexión en los límites de las regiones de propagación. En otras palabras, las oscilaciones quedan atrapadas en estas zonas. El estudio de cómo sucede esto es de fundamental importancia en la teoría de las oscilaciones no radiales. Para poder llevar a cabo este estudio, se llevan a cabo algunas aproximaciones, siendo la más importante la denominada *aproximación de Cowling*.

#### 3.4.1. La aproximación de Cowling

Ésta es muy útil porque, añadida a la adiabática, simplifica enormemente las ecuaciones de oscilación, facilitando el estudio de sus propiedades generales. Consiste ésta en despreciar la perturbación Euleriana del potencial gravitatorio. Para ver su justificación, vamos a considerar la solución integral de la ecuación de Poisson:

$$\Phi' = G \int_V \frac{\rho'(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV. \quad (3.101)$$

Ésta puede separarse como:

$$\Phi'(r) = \frac{4\pi G}{2\ell + 1} \left[ \frac{1}{r^{\ell+1}} \int_0^r \rho'(r') r'^{\ell+2} dr' + r^\ell \int_r^R \frac{\rho'(r')}{r'^{\ell-1}} dr' \right]. \quad (3.102)$$

A partir de esta ecuación se sigue que  $|\Phi'|$  es pequeña comparada con  $\rho'$  bajo las siguientes circunstancias:

- Cuando  $\ell$  es grande.
- Cuando el orden radial  $|n|$  es grande.

En el primer caso,  $(r'/r)^{\ell+2}$  (que aparece en la primera integral) es pequeño cuando  $r' < r$ , mientras que  $(r/r')^{\ell-1}$  (segunda integral) es pequeño cuando  $r' > r$ . Además,  $\Phi'$  se reduce en un factor  $2\ell + 1$ . En el segundo caso,  $\Phi'$  contiene una integral sobre funciones oscilatorias que varían muy rápidamente con  $r$ , y por tanto su valor disminuye apreciablemente debido a las cancelaciones que tienen lugar. Por tanto, parece razonable despreciar  $\Phi'$ .

Esto se conoce como *aproximación de Cowling*, y reduce el orden del sistema de ecuaciones de cuatro a dos, con la consiguiente disminución del número de condiciones de contorno. La validez de esta aproximación ha sido comprobada numéricamente para órdenes altos, aunque habría que tener cuidado para otros casos, como por ejemplo para el modo  $\mathbf{f}$  con  $\ell = 1$ .

### 3.4.2. Modos “atrapados”

Las ecuaciones en la aproximación de Cowling pueden escribirse como:

$$\frac{d\xi_r}{dr} = -\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\Gamma_1} H_p^{-1}\right) \xi_r + \frac{1}{\rho c^2} \left(\frac{L_\ell^2}{\sigma^2} - 1\right) p', \quad (3.103)$$

$$\frac{dp'}{dr} = \rho(\sigma^2 - N^2) \xi_r - \frac{1}{\Gamma_1} H_p^{-1} p', \quad (3.104)$$

donde:

$$H_p^{-1} = -\frac{d \ln p}{dr} = \frac{p}{\rho g} \quad (3.105)$$

es el *factor de escala de presiones*, esto es, la distancia a la cual la presión cambia en un factor  $e$ . Para oscilaciones de órdenes radiales altos, las autofunciones varían mucho más rápidamente que las cantidades en equilibrio. Entonces el lado de la izquierda de, por ejemplo, la ecuación (3.103) es mucho mayor que el primer término de la derecha, que contiene derivadas de las cantidades en equilibrio. Como primera aproximación, bastante burda, podemos simplemente despreciar estos términos, con lo que las ecuaciones se reducen a:

$$\frac{d\xi_r}{dr} = \frac{1}{\rho c^2} \left(\frac{L_\ell^2}{\sigma^2} - 1\right) p', \quad (3.106)$$

$$\frac{dp'}{dr} = \rho(\sigma^2 - N^2) \xi_r, \quad (3.107)$$

que pueden combinarse en una única ecuación diferencial de segundo orden para  $\xi_r$ . Despreciando de nuevo las derivadas de las cantidades en equilibrio, obtenemos:

$$\frac{d^2 \xi_r}{dr^2} = \frac{\sigma^2}{c^2} \left(1 - \frac{N^2}{\sigma^2}\right) \left(\frac{L_\ell^2}{\sigma^2} - 1\right) \xi_r. \quad (3.108)$$

Este resultado consituye la aproximación más burda a las ecuaciones de oscilaciones no radiales. En efecto, las hipótesis aceptadas son cuestionables. En particular, la escala de presiones es pequeña cerca de la superficie (nótese que  $H_p$  es proporcional a la temperatura), y entonces las derivadas de la presión y la densidad no podrían despreciarse. De forma similar, el término  $2/r$  es muy grande cerca del centro. De todos modos, la ecuación es adecuada para describir las propiedades globales de los modos de oscilación, y en efecto proporciona una determinación razonablemente exacta de las frecuencias.

A partir de la ecuación (3.108), es evidente que las frecuencias de Lamb y de Brunt-Väisälä juegan un papel muy importante en la derterminación del comportamiento de las oscilaciones. En la Fig. 3.3 se representan estas frecuencias para el modelo solar estándar.  $L_\ell$  tiende a infinito conforme  $r$  tiende a cero, y disminuye de forma monótona hacia la superficie, debido a la disminución de  $c$  y al aumento de  $r$ .

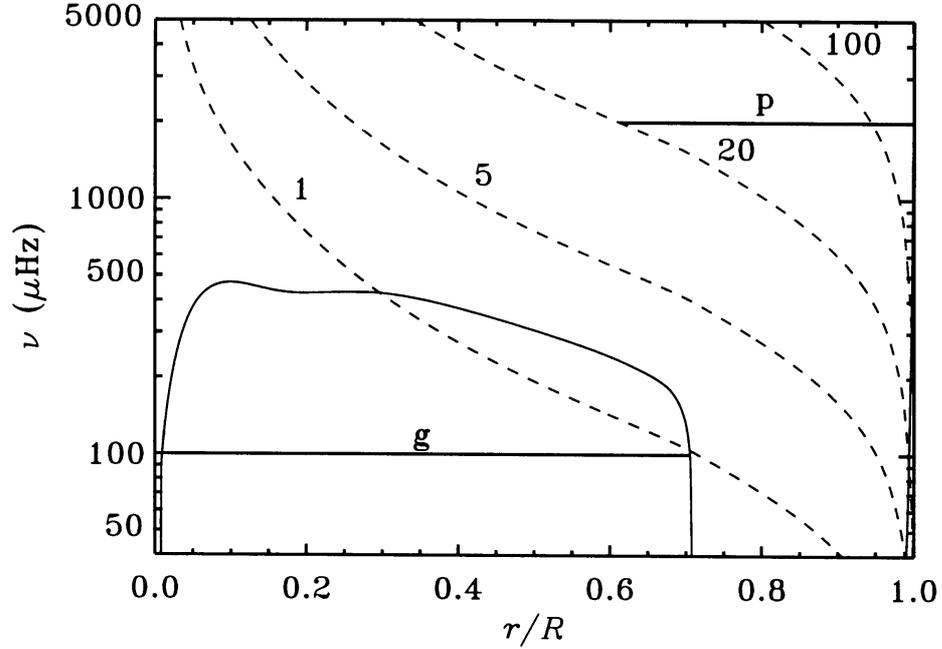


Figura 3.3: Frecuencia de Brunt-Väisälä,  $N$  (en línea continua), y de Lamb,  $L_\ell$  (en líneas discontinuas, etiquetadas con distintos valores de  $\ell$ ), en términos de las correspondientes frecuencias, frente al radio relativo  $r/R$  para un modelo del Sol. Las líneas horizontales muestran las regiones donde las ondas están atrapadas para un modo **g** con frecuencia  $\nu = 100 \mu\text{Hz}$ , y para un modo **p** con  $\ell = 20$  y  $\nu = 2000 \mu\text{Hz}$ . Tomado de Christensen-Dalsgaard (1998).

Como se ha discutido ya,  $N^2$  es negativo ( $A$  es positivo) en las zonas convectivas (aunque generalmente tiene valor absoluto pequeño), y positivo ( $A$  es negativo) en las zonas estables frente a la convección. Todos los modelos solares realistas tienen una zona convectiva externa que abarca aproximadamente el 30 por ciento del radio, mientras que la zona interna es estable. En las estrellas  $\delta$  Scuti ésta se encuentra presente en el núcleo y en la zona más externa. El pico de la frecuencia de Brunt-Väisälä cerca del centro está asociado al incremento de la abundancia del Helio en esa zona debido a las reacciones nucleares. En efecto, el material más ligero se encuentra sobre el más pesado, de modo que se añade estabilidad frente a la convección, con lo que  $N^2$  aumenta. Esto se puede ver más fácilmente considerando la siguiente expresión para  $N^2$ :

$$N^2 = \frac{g^2 \rho}{p} (\nabla_{\text{ad}} - \nabla + \nabla_\mu), \quad (3.109)$$

donde  $\nabla$ ,  $\nabla_{\text{ad}}$  y  $\nabla_\mu$  son los gradientes definidos en la sección 2.4.1. En la región donde tienen lugar las reacciones nucleares,  $\mu$  aumenta hacia el centro, y por tanto, hacia valores de la presión crecientes, por lo que  $\nabla_\mu$  constituye una contribución positiva a  $N^2$ .

Con el objeto de analizar el comportamiento de las oscilaciones, escribimos la ecuación (3.108) como:

$$\frac{d^2 \xi_r}{dr^2} = -k(r) \xi_r, \quad (3.110)$$

donde:

$$k(r) = \frac{(\sigma^2 - L_\ell^2)(\sigma^2 - N^2)}{\sigma^2 c^2}. \quad (3.111)$$

El comportamiento local de  $\xi_r$  depende del signo de  $k(r)$ . En los lugares donde  $k(r) > 0$ ,  $\xi_r$  es localmente una función oscilante de  $r$ , mientras que donde  $k(r) < 0$ , la solución es localmente una función exponencialmente creciente o decreciente de  $r$ . En el primer caso, la solución puede escribirse aproximadamente como:

$$\xi_r \sim \cos \left( \int k(r)^{1/2} dr + \phi \right), \quad k(r) > 0, \quad (3.112)$$

donde  $\phi$  es una fase determinada por las condiciones de contorno, mientras que en el segundo caso:

$$\xi_r \sim \exp \left( \pm \int |k(r)|^{1/2} dr \right), \quad k(r) < 0. \quad (3.113)$$

Entonces, según esta descripción, la solución oscila cuando:

**o1)**  $|\sigma| > |N|$  y  $|\sigma| > L_\ell$

**o2)**  $|\sigma| < |N|$  y  $|\sigma| < L_\ell$

y es exponencial cuando:

**e1)**  $|N| < |\sigma| < L_\ell$

**e2)**  $L_\ell < |\sigma| < |N|$

Para un determinado modo de oscilación, puede haber regiones donde la solución sea oscilante, de acuerdo con el criterio o1) u o2), junto con otras donde su comportamiento sea exponencial. Sin embargo, en general una de estas regiones oscilantes es la dominante, siendo la solución exponencialmente decreciente fuera de ella. Se dice entonces que la onda está *atrapada* en dicha región; su frecuencia viene determinada fundamentalmente por la estructura del modelo en esa zona. Las fronteras de tales regiones son generalmente puntos donde  $k(r) = 0$ , conocidos como *puntos de retorno*. De la ecuación (3.112) se sigue que dentro de esas zonas los modos oscilan como función de  $r$  más rápidamente cuanto mayor sea el valor de  $k(r)$ . Entonces, si el orden del modo viene caracterizado aproximadamente por el número de ceros de  $\xi_r$ , lo normal será entonces que aumente con  $k(r)$ .

A partir del comportamiento de  $L_\ell$  y  $N$  que se muestra en la Fig. 3.3, y de las condiciones para que una onda sea oscilante, podemos esperar dos clases de modos:

- Modos con frecuencias elevadas, satisfaciendo o1), llamados modos **p**.
- Modos con frecuencias bajas, satisfaciendo o2), llamados modos **g**.

En la Fig. 3.3 se muestran regiones con ondas atrapadas típicas para un modo **p** y un modo **g** en un modelo solar. A este tipo de diagramas se les denomina *diagramas de propagación*, y son muy útiles para saber en qué zonas quedará atrapada una onda. Por ejemplo, en la Fig. 3.4 se muestra el diagrama de propagación para un polítopo de índice 3.

Nótese que en estrellas evolucionadas con núcleos convectivos,  $N$  puede tomar valores muy grandes en el borde del núcleo, lo que hace que se cumpla la condición

o2) incluso a frecuencias altas. Esto implica que en estos casos la distinción en frecuencias entre modos **p** y **g** no estará muy clara.

En el caso de estrellas con núcleos convectivos pueden aparecer *modos mixtos*, esto es, oscilaciones que presentan características tanto de los modos **p** como de los **g**. En toda la zona convectiva los elementos se mezclan con mucha eficacia, lo que da lugar a una composición química constante, y por tanto un gradiente  $\nabla_\mu = 0$ . Conforme la estrella evoluciona, por un lado el Hidrógeno va desapareciendo como consecuencia de la fusión nuclear, y por otro el núcleo convectivo se contrae, dejando atrás un gradiente  $\nabla_\mu$  no nulo (ver Fig. 3.5). Esto provoca que la frecuencia de Brunt-Väisälä alcance valores muy grandes. En estos modelos evolucionados las autofunciones en el rango de frecuencias entre dos máximos de  $N^2$  tienen carácter mixto: se comportan como ondas de gravedad en la zona donde  $\nabla_\mu \neq 0$ , y como ondas de presión en la parte externa de la estrella (ver Fig. 3.6). Esto hace que la

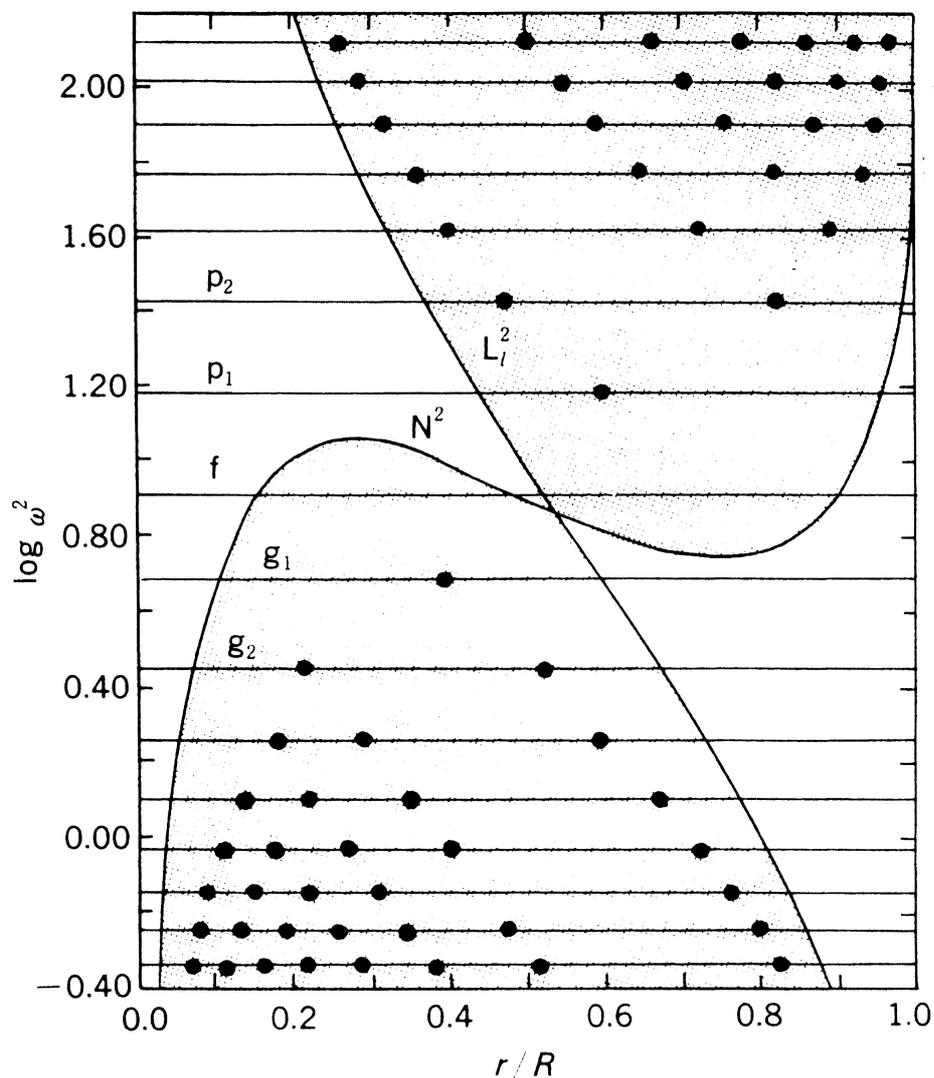


Figura 3.4: Diagrama de propagación para un polítropo de índice 3 con  $\ell = 2$ . Se muestran algunas frecuencias mediante líneas continuas horizontales, mientras que los nodos se localizan mediante círculos. Tomado de Unno et al. (1989).

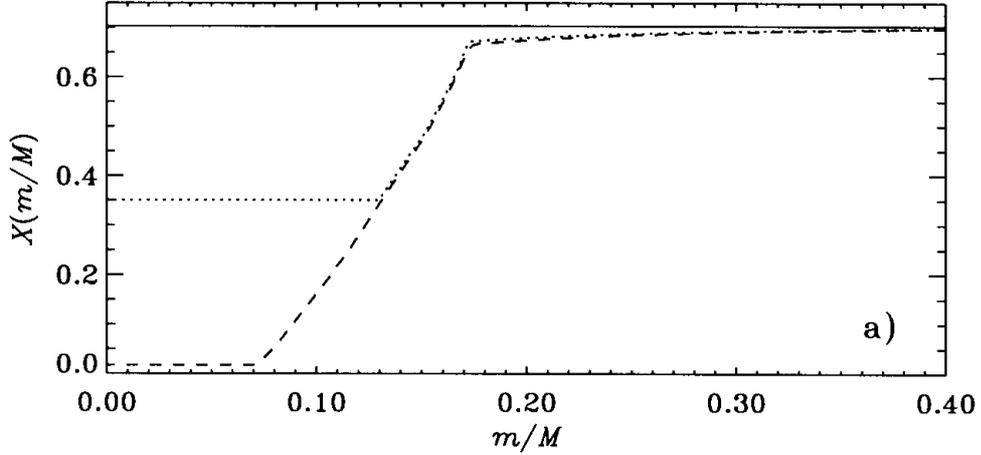


Figura 3.5: Contenido de Hidrógeno,  $X$ , frente a la masa  $m/M$  para tres modelos de una secuencia evolutiva de una estrella de  $2.2M_{\odot}$ . La línea sólida es para edad 0, la punteada para  $0.47 \cdot 10^9$  años, y la discontinua para  $0.71 \cdot 10^9$  años. Solamente se muestra el cuarenta por ciento del interior de la estrella. Tomado de Christensen-Dalsgaard (1998).

clasificación de los modos no radiales no sea trivial. Una segunda consecuencia es el aumento de la frecuencia de los modos  $\mathbf{g}$ . Se muestra un ejemplo de tal comportamiento en la Fig. 3.7, donde  $\omega^2$ , la frecuencia adimensional, se representa en función de la edad de la estrella. Los modos  $\mathbf{g}$  se mueven rápidamente conforme la estrella evoluciona, mientras que el  $\mathbf{f}$  y los  $\mathbf{p}$  se mantienen en principio sin apenas cambios en el valor de  $\omega^2$ . Conforme el modo  $g_1$  se acerca al  $\mathbf{f}$ , éste es “empujado” hacia arriba, mientras que aquél ocupa su posición. El modo  $\mathbf{f}$  entonces “empuja” al  $p_1$ , y así sucesivamente. Aizenman y Smeyers (1977) han demostrado que este fenómeno es esencialmente el mismo que el proceso de “*avoided crossing*” de los modos de dos osciladores acoplados. Un oscilador se identifica con la onda de gravedad atrapada en el interior estelar, y el otro con la onda  $\mathbf{p}$  atrapada en la envoltura. El “*avoided crossing*” está provocado por la interacción entre las dos oscilaciones en la zona evanescente. Dado que ésta actúa como una barrera de potencial, el acoplamiento sólo puede tener lugar si las frecuencias están muy próximas.

### 3.4.3. Modos $\mathbf{p}$

Se encuentran atrapados entre un punto de retorno interno  $r = r_t$  y la superficie. El punto  $r_t$  se localiza mediante la condición  $L_{\ell}(r_t) = \sigma$ :

$$\frac{c^2(r_t)}{r_t^2} = \frac{\sigma^2}{\ell(\ell + 1)}, \quad (3.114)$$

que determina  $r_t$  como función de  $\ell$  y  $\sigma$ .

Para los modos  $\mathbf{p}$ , en particular para los modos solares en la región de cinco minutos, tenemos típicamente que  $\sigma \gg N$ . Entonces  $k(r)$  puede aproximarse por:

$$k(r) \simeq \frac{1}{c^2}(\sigma^2 - L_{\ell}^2), \quad (3.115)$$

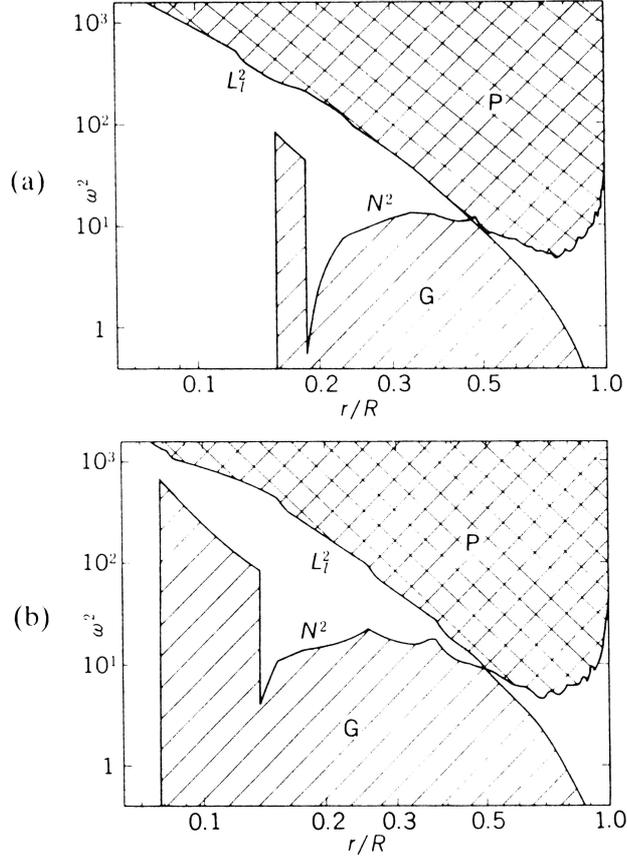


Figura 3.6: Diagramas de propagación para dos modelos evolucionados de  $10 M_{\odot}$ . Tomado de Unno et al. (1989).

por lo que la dinámica de los modos vendrá determinada exclusivamente por la variación de la velocidad del sonido con  $r$ . Se trata de ondas acústicas estacionarias, cuya fuerza restauradora está dominada por la presión, de ahí la denominación de modos **p**. En efecto, la ecuación (3.115) que determina el comportamiento radial se puede obtener de forma sencilla a partir de la relación de dispersión para una onda plana. Escribiendo el cuadrado del vector de ondas como la suma de las componentes radial y horizontal:

$$|\mathbf{k}|^2 = k_r^2 + k_h^2, \quad (3.116)$$

donde  $k_h$  se define como:

$$k_h^2 = \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} = \frac{L_{\ell}^2}{c^2}, \quad (3.117)$$

podemos escribir la relación de dispersión:

$$\frac{\sigma^2}{c^2} = k_r^2 + \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \quad (3.118)$$

o:

$$k_r^2 = \frac{1}{c^2}(\sigma^2 - L_{\ell}^2). \quad (3.119)$$

La reflexión interior de los modos **p** se pueden entender de forma simple en términos de la teoría de rayos. Un modo se puede considerar una superposición de

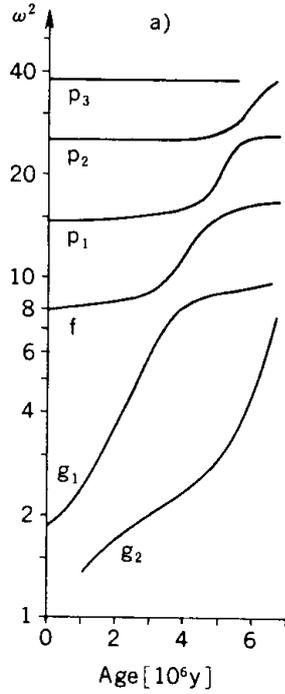


Figura 3.7: “*Avoided crossing*” de frecuencias para una secuencia evolutiva de una estrella de  $16 M_{\odot}$ . Tomado de Unno et al. (1989).

ondas sonoras. Dos de tales ondas se ilustran en la Fig. 3.8. Conforme se propagan hacia el interior estelar, las partes más profundas del frente de ondas experimentan una velocidad del sonido mayor, y por tanto viajan más rápido. En consecuencia, la dirección de propagación se desvía de la dirección radial. Esto es completamente análogo a la refracción experimentada por un rayo de luz cuando pasa a un medio con menor índice de refracción (mayor velocidad). Matemáticamente se expresa mediante la disminución de la componente radial del vector de ondas con el incremento de la velocidad del sonido, que se muestra en la ecuación (3.119). En el punto de retorno la onda viaja horizontalmente, y entonces la condición (3.114) se obtiene directamente a partir de la relación de dispersión para las ondas sonoras (Gough, 1984, 1986).

La dependencia del punto de retorno  $r_t$  con el grado y el orden del modo es de gran importancia para la interpretación de las observaciones de las oscilaciones de cinco minutos del Sol. En la Fig. 3.9 se ilustra el comportamiento de  $r_t$  con  $\ell$ . Para  $\ell$  pequeño,  $r_t$  está muy cerca del centro, mientras que para grados mayores el punto de retorno se acerca a la superficie. En particular, hay que notar que para  $\ell \gtrsim 40$  los modos están esencialmente atrapados en la zona convectiva, que tiene una profundidad de aproximadamente  $0.28R$  para el Sol.

A partir de la ecuación (3.115) se sigue que  $k(r)$  aumenta con la frecuencia. Esto implica un incremento del número de ceros de las autofunciones, o lo que es lo mismo, la frecuencia aumenta con el orden del modo.

### 3.4.4. Modos g

En este caso los puntos de retorno están determinados por la condición  $N = \sigma$ . Como se aprecia en la Fig. 3.3, para bajas frecuencias esto implica que uno de dichos

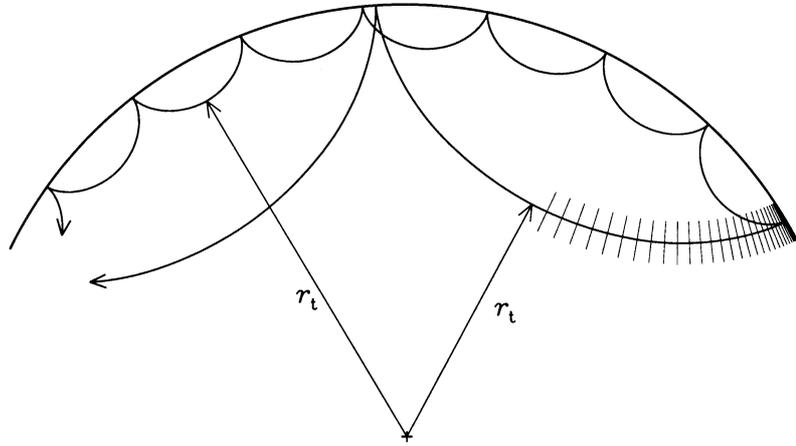


Figura 3.8: Propagación de ondas acústicas, correspondientes a los modos  $\ell = 30$ ,  $\nu = 3$  mHz y  $\ell = 100$ ,  $\nu = 3$  mHz. Las líneas horizontales ilustran el frente de ondas. Tomado de Christensen-Dalsgaard (1998).

puntos se encuentre muy cerca del centro de la estrella, y el otro en la base de la zona convectiva (donde  $N$  disminuye bruscamente hasta hacerse negativo). A mayores frecuencias el punto más externo se mueve hacia el interior, y para valores cercanos al máximo de  $N$ , los modos quedan atrapados a gran profundidad. Sin embargo, en esta aproximación la posición de los puntos de retorno es independiente de  $\ell$ .

Para modos  $\mathbf{g}$  de órdenes altos, se tiene típicamente:  $\sigma \ll L_\ell^2$ , y podemos aproximar  $k(r)$  por:

$$k(r) \simeq \frac{1}{\sigma^2} (N^2 - \sigma^2) \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2}. \quad (3.120)$$

Por lo tanto, en este caso la dinámica viene dominada por la variación de  $N$  con  $r$ . La gravedad, actuando sobre la perturbación en la densidad, proporciona la fuerza restauradora dominante, de ahí que se les denomine modos  $\mathbf{g}$ . Estos constituyen ondas de gravedad estacionarias. Mediante argumentos similares a los utilizados anteriormente para los modos  $\mathbf{p}$ , se obtiene a partir de la relación de dispersión que la componente radial del vector de ondas está determinada por:

$$k_r^2 = \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \left( \frac{N^2}{\sigma^2} - 1 \right), \quad (3.121)$$

de acuerdo con la relación para  $k(r)$  dada por (3.120). A partir de dicha ecuación se sigue que  $k(r)$  aumenta cuando  $\sigma$  disminuye. Por tanto,  $\sigma$  decrece al aumentar el orden. Debe notarse también que las frecuencias de los modos  $\mathbf{g}$  no pueden exceder el máximo  $N_{max}$  en el interior estelar.

### 3.4.5. Modos mixtos

Como su propio nombre indica, son una mezcla de modos  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{g}$ , teniendo porcentajes importantes de su energía de oscilación distribuidos tanto en el interior estelar profundo como cerca de la superficie. Son producto del acoplamiento existente entre ambos tipos de oscilaciones, el cual se hace patente a lo largo de la evolución cuando, por motivos que ahora veremos, sus frecuencias tienden a acercarse.

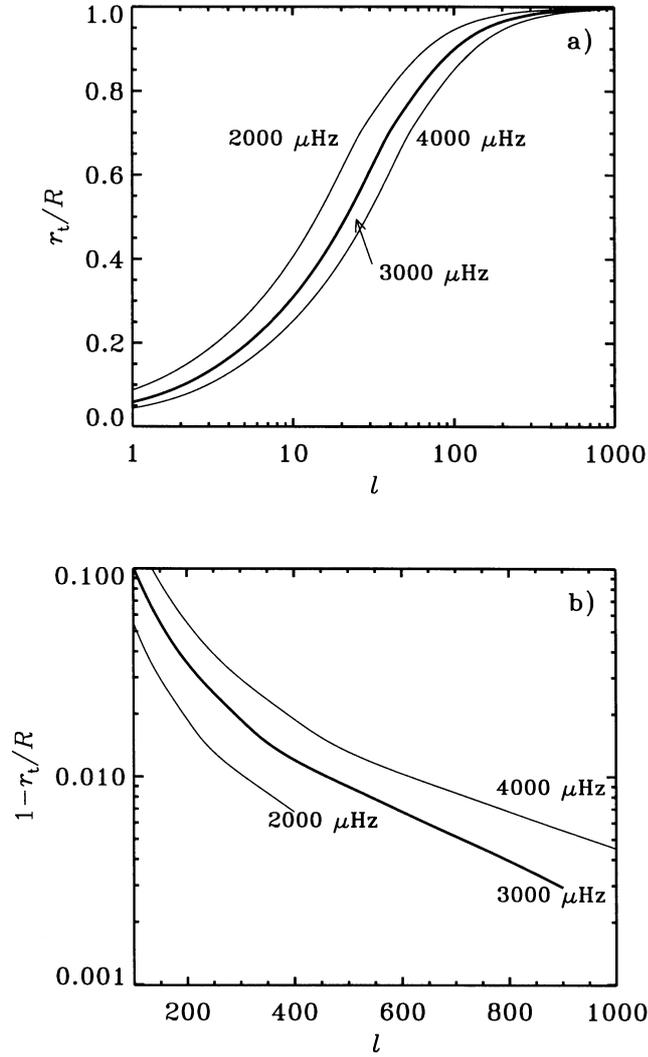


Figura 3.9: Localización (a) del punto de retorno interno,  $r_t$ , y (b) de la profundidad de penetración  $R - r_t$ , en unidades del radio solar  $R$ , para modos  $\mathbf{p}$  en un modelo solar estándar. Los resultados se muestran como funciones del grado  $\ell$ , para tres frecuencias típicas. Tomado de Christensen-Dalsgaard (1998).

Durante la evolución de una estrella desde la ZAMS, la composición química central varía al fusionarse hidrógeno y producirse helio, creándose un gradiente negativo,  $\nabla_\mu$ , en el borde externo del núcleo convectivo, que hace disminuir la presión central, por lo que el núcleo se contrae. Esto permite que la estabilidad dinámica sea mayor, aumentando el valor de  $N$  en esa zona. Este pico de  $N$  en el borde del núcleo permite a los modos  $\mathbf{g}$  tener frecuencias más altas, aproximándose a las de los modos  $\mathbf{p}$ . En la Fig. 3.6 se muestra la evolución de este pico situado al borde del núcleo. En la misma se representa la *frecuencia de Lamb*,  $L_\ell$ , que proporciona una estimación del radio de retorno para los modos  $\mathbf{p}$  mediante la expresión (3.114). Hay que notar la mayor profundidad en la propagación de los modos  $\mathbf{p}$  al disminuir el valor de  $\ell$ . Ambas frecuencias nos dan una idea del tamaño de las cavidades resonantes en las que se propagan los modos  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{g}$ : los modos  $\mathbf{g}$  lo hacen en las zonas con  $\omega < N$ , y los modos  $\mathbf{p}$ , entre el radio de retorno y la superficie. En realidad, éstos no se reflejan

en la superficie, sino en capas algo más internas ( $r > 0.9R$ ). En concreto, y según la teoría asintótica, el punto de retorno externo se tiene aproximadamente cuando:

$$\omega^2 = \omega_c^2 \equiv \frac{c^2}{4H^2} \left( 1 - 2 \frac{dH}{dr} \right), \quad (3.122)$$

donde  $H$  es la escala de altura de densidad, y donde hemos introducido la frecuencia de corte generalizada,  $\omega_c$ . Esta tiene un máximo en la fotosfera, por lo que los modos con  $\omega > \omega_c$  en la atmósfera no son reflejados por ésta, y por tanto, no constituyen modos propios (además éstos se disiparían debido a procesos no adiabáticos, aunque en el Sol se observan como pseudo-modos). Por tanto, el valor de  $\omega_c$  en la atmósfera delimita la frecuencia máxima de los modos propios de la estrella.

Las cavidades resonantes de los modos **p** puros apenas varían con la evolución, por lo que su frecuencia permanece estable, mientras que los modos **g** sufren cambios en su cavidad, como hemos visto, permitiendo que se puedan propagar a mayor frecuencia. Este aumento provoca que dichos modos se encuentren con cavidades resonantes nuevas en la envoltura externa, en las que previamente existían sólo modos **p** puros. El acoplamiento entre el modo **g** ascendente y el **p** produce un intercambio de propiedades que da lugar a la aparición de un modo mixto. Dicho acoplamiento impide el cruce entre la frecuencia de ambos, dando lugar a un *cruce prohibido*, o *avoided crossing*, en inglés. En la Fig. 3.7 se ilustra en detalle uno de estos cruces. Puede observarse cómo el modo **g** ascendente (o mixto, en el caso más general de que el modo ya haya pasado por un cruce prohibido anteriormente) se convierte en uno acústico, mientras que el modo **p** superior pasa a ser un modo mixto que seguirá ascendiendo.

### 3.4.6. Algunos resultados numéricos

Con el objeto de familiarizarse con las propiedades de las oscilaciones, es útil analizar los resultados de algunos cálculos de autofunciones y autovalores. Los presentados en esta sección están basados principalmente en modelos calculados mediante el código descrito en Christensen-Dalsgaard (1982). La Fig. 3.10 muestra los resultados de las frecuencias calculadas para este modelo, como funciones de  $\ell$ . Es conveniente considerar el orden  $\ell$  como una variable continua y real; esto se puede hacer matemáticamente sin ninguna dificultad, aunque solamente sus valores enteros tendrán significado físico. En consecuencia, las curvas se muestran continuas, lo que ayuda a la identificación de los modos. Además, se etiquetan mediante el orden radial,  $n$ , que viene dado esencialmente por el número de ceros de las autofunciones en la dirección radial.

Es evidente, como se explicó en la Sec. 3.3.4, que existen dos tipos distintos de modos, aunque ligeramente superpuestos, con comportamientos muy diferentes de sus frecuencias como funciones de  $\ell$ . El grupo superior corresponde a los modos **p**, cuya fuerza restauradora dominante es la presión. Se ha indicado el orden radial para algunas de las curvas. Se observa claramente que las frecuencias de esos modos aumentan con el orden, como se discutió en la Sec. 3.4.3. Los modos etiquetados con  $n = 0$ , aunque tienen un comportamiento similar a los **p**, son de hecho físicamente distintos; para  $\ell$  mayor que 20 sus frecuencias vienen dadas aproximadamente por la expresión de la relación de dispersión para ondas de gravedad superficiales. Se corresponden con los modos **f**.

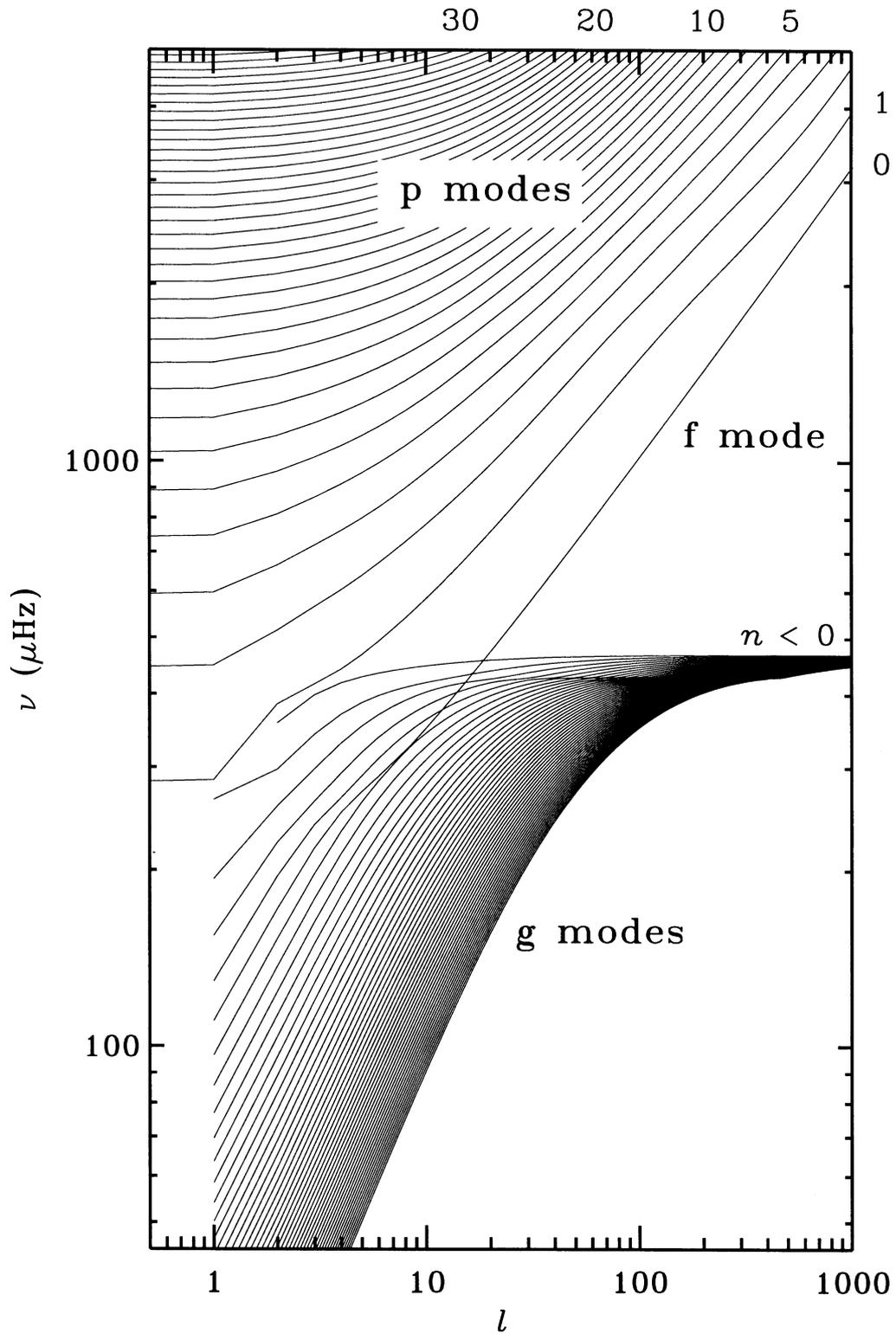


Figura 3.10: Frecuencias  $\nu$  como funciones de  $\ell$ , calculadas para un modelo solar estándar. Se indican algunos valores del orden  $n$ . Tomado de Christensen-Dalsgaard (1998).

Por último nos encontramos el grupo inferior, correspondiente a los modos **g**, discutidos en la Sec. 3.4.4, en los que la fuerza restauradora dominante es la gravedad.

Para éstos la frecuencia disminuye cuando aumenta el número de nodos. Dado que la fuerza restauradora exige la existencia de variaciones sobre superficies horizontales, es evidente que no pueden existir modos **g** para oscilaciones esféricamente simétricas, esto es, para  $\ell = 0$ . Únicamente se muestran órdenes inferiores a 50, aunque los modos **g** se extienden hasta frecuencia cero para todos los valores de  $\ell$ , estando más concentrados a medida que aumenta el grado.

Debe notarse que existe un aparente solapamiento en las frecuencias entre el modo **f** y algunos de los **g**. Un examen más detallado revela que en vez de esto, los modos se aproximan mucho sin cruzarse realmente, dando lugar al fenómeno del *avoided crossing*, explicado en la Sec. 3.4.2.

La clasificación precisa de los modos, esto es, la asignación de los órdenes radiales, presenta algunos problemas interesantes y aún no resueltos. Parece que a cada  $\ell$  es posible asignarle un valor entero de  $n$ , desde menos infinito hasta más infinito, de tal manera que, para modelos estelares razonablemente simples,  $|n|$  da el número de ceros de  $\xi_r$ ; el posible cero en  $r = 0$  se cuenta únicamente en el caso radial  $\ell = 0$ . Esto se puede arreglar de tal manera que  $n > 0$  para modos **p**,  $n = 0$  para el modo **f**, y  $n < 0$  para los **g**. También, salvo una excepción que se discute más adelante, la frecuencia es una función creciente de  $n$ ; esto es consistente con el hecho, mencionado anteriormente, de que la frecuencia aumenta con el número de nodos radiales para los modos **p**, y disminuye con los mismos para los **g**. Por convención, se denotan los modos **p**, **f** y **g** para un valor  $\ell_0$  como:  $p_n(l = \ell_0)$ ,  $f(l = \ell_0)$ ,  $g_{|n|}(l = \ell_0)$ .

Eckart (1960) propuso un método general y matemáticamente preciso para clasificar las ondas en un medio estratificado. Este fue aplicado por Scuflaire (1974) y Osaki (1975) a la definición del orden radial  $n$  para estrellas pulsantes no radiales. En la aproximación de Cowling esta definición tiene la propiedad de ser invariante bajo modificaciones continuas del modelo de equilibrio o de  $\ell$ . Para modelos simples o en el límite de modos de órdenes altos esta definición se reduce simplemente a contar el número de nodos radiales de la autofunción, como se describió anteriormente. Sin embargo, el esquema de Eckart no es aplicable en general cuando se consideran las soluciones de las ecuaciones completas. Se encuentra, por ejemplo, que en modelos del Sol, cuando se aplica esta clasificación a los modos **p** de menor orden con  $\ell = 1$ , calculados a partir de las ecuaciones completas, se producen confusiones entre los modos con  $n = 1$  y  $n = 2$ . Para modelos más evolucionados el problema se extiende a órdenes mayores. Tal es el caso del estudio de Guenther (1991) para estrellas de  $1M_\odot$  en la rama de las gigantes, o el de Lee (1985) para estrellas  $\delta$  Scuti evolucionadas. Es interesante, no obstante, observar que estas dificultades parecen restringirse a  $\ell = 1$ , al menos para modelos realistas.

Aunque el problema de la clasificación de los modos puede parecer algo intrascendente, es de fundamental importancia cuando se calculan éstos para un cierto modelo estelar, ya que una mala determinación de los órdenes puede llevar a dificultades a la hora de asegurar que se han calculado todos los modos, o de relacionar unos modos con otros provenientes de un modelo ligeramente diferente. Se pueden encontrar más detalles en Christensen-Dalsgaard (1991).

Hay algunos casos especiales. Para  $\ell = 0$  solamente se encuentran modos con  $n > 0$ ; esto está de acuerdo con el hecho, mencionado anteriormente, de que la fuerza restauradora gravitatoria puede actuar sólo en presencia de variaciones horizontales. También, para  $\ell = 1$  el modo con  $n = 0$  es especial porque su frecuencia es cero, como se explicó en la Sec. 3.3.4. En efecto, una onda de este tipo con  $\nu \neq 0$  no

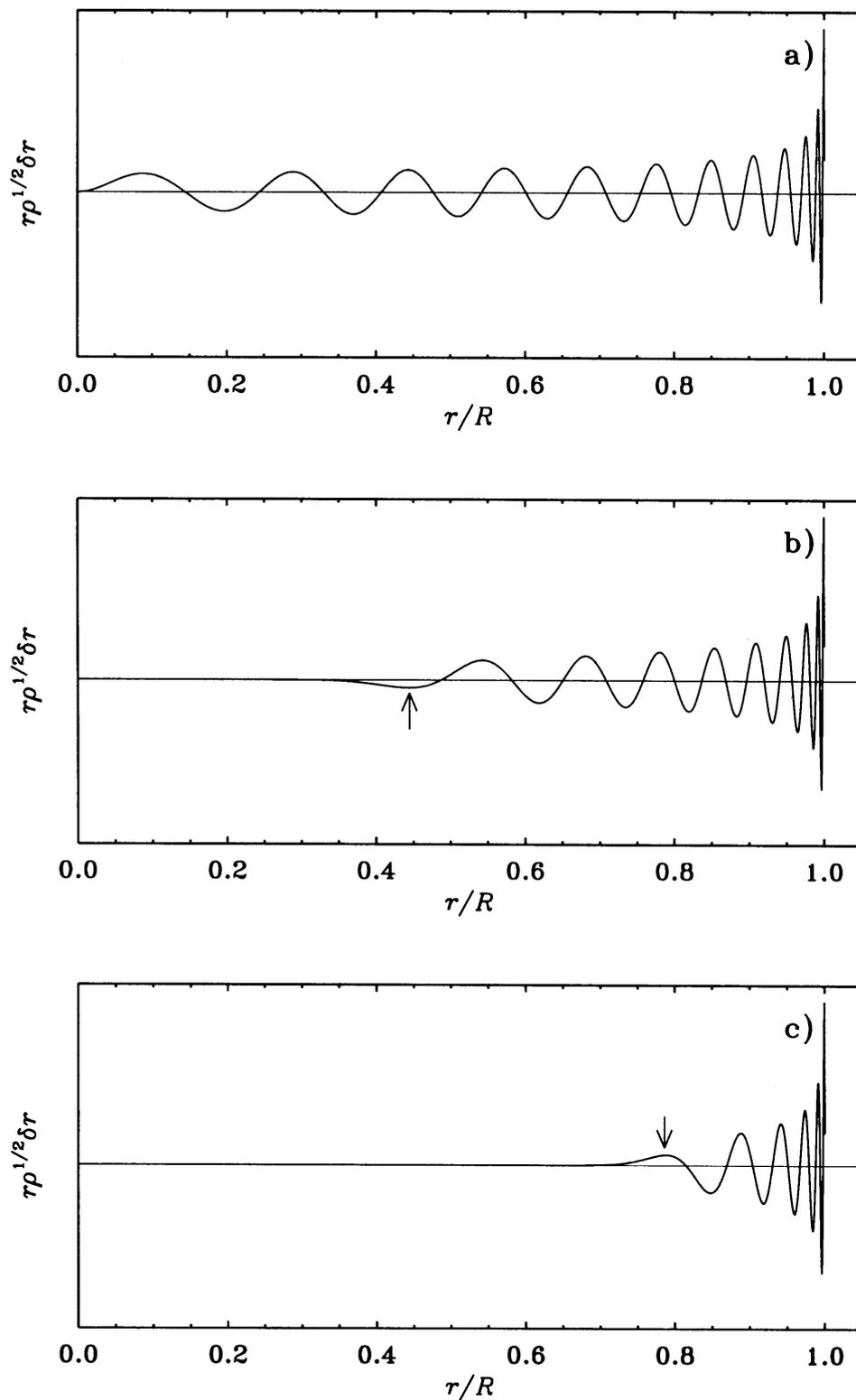


Figura 3.11: Autofunciones de algunos modos  $\mathbf{p}$  seleccionados en un modelo solar con a)  $\ell = 0$ ,  $n = 23$ ,  $\nu = 3310 \mu\text{Hz}$ ; b)  $\ell = 20$ ,  $n = 17$ ,  $\nu = 3375 \mu\text{Hz}$ ; c)  $\ell = 60$ ,  $n = 10$ ,  $\nu = 3234 \mu\text{Hz}$ . Las flechas marcan la localización asintótica de los puntos de retorno  $r_t$ , dados por la ecuación (3.114). Tomado de Christensen-Dalsgaard (1998).

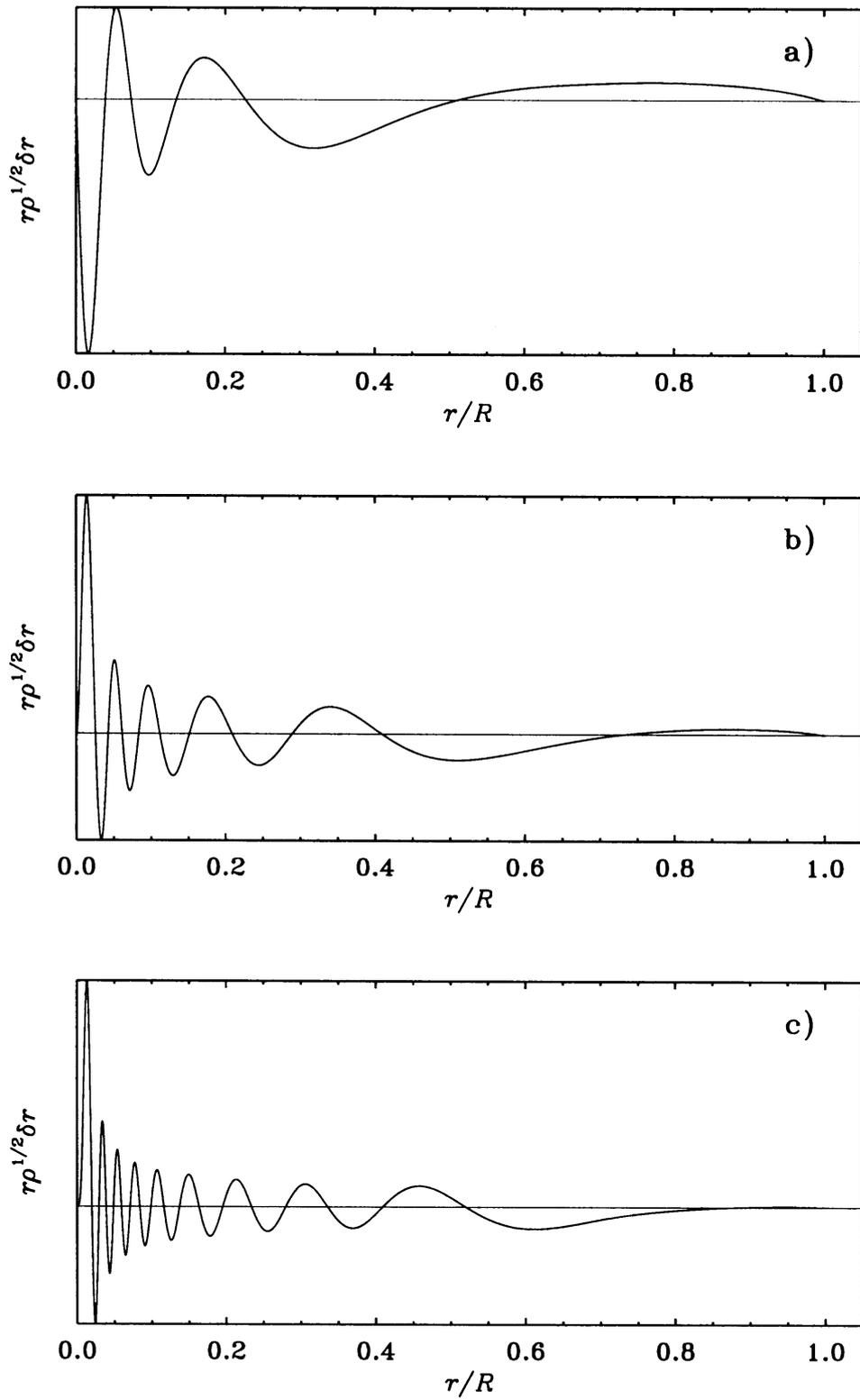


Figura 3.12: Autofunciones de algunos modos g seleccionados en un modelo solar con a)  $\ell = 1$ ,  $n = -5$ ,  $\nu = 110 \mu\text{Hz}$ ; b)  $\ell = 2$ ,  $n = -10$ ,  $\nu = 104 \mu\text{Hz}$ ; c)  $\ell = 4$ ,  $n = -18$ ,  $\nu = 106 \mu\text{Hz}$ . Tomado de Christensen-Dalsgaard (1998).

tendría sentido físico, ya que correspondería a un movimiento global del centro de masas de la estrella, sin deformación. De hecho, el modo **f** con  $\ell = 1$  se comporta de manera muy diferente en la aproximación de Cowling y para el conjunto completo de ecuaciones. En el primer caso, fruto de la aproximación, se encuentra un modo con  $\ell = 1$ ,  $n = 0$  y frecuencia intermedia entre la de los modos **p** y **g**. En el segundo, se obtiene una solución trivial con  $\nu = 0$ . Dado que la aproximación de Cowling consiste en despreciar la perturbación del potencial gravitatorio, desde un punto de vista físico este modo se interpreta como una oscilación de toda la estrella en el campo gravitatorio definido por el modelo en equilibrio. La conexión entre este caso y el de frecuencia cero del problema completo puede estudiarse mediante una transición continua entre ambas situaciones. Esto se puede hacer introduciendo un parámetro  $\lambda$  en el término de la derecha de la ecuación (3.34), de tal manera que  $\lambda = 0$  corresponde a la aproximación de Cowling y  $\lambda = 1$  a las ecuaciones completas (Christensen-Dalsgaard, 1978). Cuando  $\lambda$  varía de 0 a 1, tiene lugar una transición desde el modo **f**,  $\ell = 1$  en la aproximación de Cowling al de frecuencia cero del caso completo a través de una serie de “*avoided crossings*” con los modos **g**, en los que las frecuencias se aproximan mucho sin llegar a cortarse. De forma análoga, conforme  $\ell$  decrece de forma continua entre 2 y 1, tiene lugar una transición semejante para las soluciones de las ecuaciones completas, entre el modo **f** con  $\ell = 2$  y el de frecuencia cero con  $\ell = 1$ .

La Fig. 3.11 ilustra algunos ejemplos típicos de autofunciones de modos **p**. Dado que  $r\rho^{1/2}\xi_r$  está relacionada con la contribución de la componente radial de la velocidad a la densidad de energía, esta gráfica indica que la energía de los modos **p**, al menos para  $\ell$  pequeño, está distribuida por la mayor parte de la estrella. En particular, los modos radiales penetran hasta el centro. Para grados mayores las ondas quedan atrapadas en la parte más externa del modelo. Las flechas de la Fig. 3.11 muestran las localizaciones de los puntos de retorno predichas por la ecuación (3.114). Entonces cabe esperar que las frecuencias de los modos **p** de bajo  $\ell$  den información acerca de la estructura interna de todo el interior estelar. En contraste con la energía, se observa que el desplazamiento experimenta grandes amplitudes en las zonas más externas; esto puede apreciarse a partir de la figura, teniendo en cuenta que la disminución de la densidad es aproximadamente de 9 órdenes de magnitud desde el centro hasta la superficie. Cuando aumenta el grado de los modos, éstos se encuentran confinados cada vez más hacia la superficie; sin embargo, el comportamiento en esta zona para una cierta frecuencia varía poco con  $\ell$ .

Por último, la Fig. 3.12 muestra las autofunciones de algunos modos **g**. Estos se encuentran confinados el interior del Sol, a gran profundidad, con un máximo de energía muy cerca del centro. A una frecuencia dada, el número de ceros en la dirección radial aumenta muy rápidamente con  $\ell$ . El que los modos se extiendan esencialmente sobre la misma región de la estrella es consistente con el hecho, mencionado en la sección 3.4.4, de que la localización de los puntos de retorno dependen de la frecuencia pero no de  $\ell$ . Se observa también que la amplitud cerca de la superficie es muy pequeña comparada con la que existe en el interior. De hecho, la relación  $\xi_{r,\max}/\xi_r(R)$  crece muy rápidamente con la frecuencia y con el grado.

## Capítulo 4

# Oscilaciones no adiabáticas

Como ya se discutió en el capítulo anterior, las oscilaciones adiabáticas dinámicamente estables en una estrella esféricamente simétrica sin rotación ni campos magnéticos son estrictamente periódicas. Esto se refleja en el hecho de que las ecuaciones (3.59)-(3.61) son reales y constituyen un problema hermítico. Pero en realidad se está produciendo constantemente un intercambio de energía con el medio, lo que se traduce en una ganancia o pérdida de la misma durante cada ciclo de oscilación. En términos matemáticos esto se corresponde con soluciones complejas de la ecuación de conservación de la energía (3.21), donde aparece una derivada temporal de primer orden de  $\delta S$ . Como la dependencia temporal de las autofunciones es de la forma  $e^{i\sigma t}$ , la parte imaginaria queda claramente expuesta en la ecuación (3.45), y por tanto la amplitud de la oscilación crecerá si la parte imaginaria de  $\sigma$  es negativa, y viceversa.

Podríamos preguntarnos hasta qué punto es necesario tener en cuenta un tratamiento no adiabático de las ecuaciones. Prácticamente en todo el interior estelar, donde el tiempo térmico de relajación (2.3) es mucho mayor que el dinámico, al sistema no le da tiempo de intercambiar significativamente calor con el medio circundante durante la pulsación. En este caso, la aproximación adiabática es suficientemente correcta. Sin embargo, a temperaturas bajas los tiempos empiezan a ser comparables, y en las capas más externas la situación puede llegar incluso a invertirse. Y es en estas zonas donde tienen lugar situaciones físicas importantes para la correcta descripción de una estrella, como las zonas de ionización, zonas convectivas o la localización de la fotosfera. Es necesario, pues, realizar una descripción no adiabática de las pulsaciones para poder comprender mejor su naturaleza, ya que, si bien este tratamiento no modifica sustancialmente las frecuencias respecto a sus valores adiabáticos, sí afecta significativamente a las autofunciones del sistema, y más concretamente a sus amplitudes y fases relativas. Posteriormente veremos, al analizar la fotometría multicolor, que esto también nos abre un campo completo de análisis de los datos observacionales.

El estudio no adiabático de las ecuaciones de pulsación estelar ha sido abordado por diversos autores (Dziembowski, 1977; Saio y Cox, 1980; Pesnell, 1990; Townsend, 2002). Todos estos trabajos fueron realizados considerando la fotosfera como la capa final de la estrella y utilizando la condición de contorno externa de las ecuaciones para fijar su comportamiento. Por lo tanto, los observables fotométricos que se deducen de estos modelos están completamente parametrizados por la elección de las condiciones de contorno que se impongan.

Recientemente Dupret et al. (2002, 2003) han desarrollado un tratamiento más realista de las ecuaciones de pulsación en la atmósfera estelar, donde fallan varias de las suposiciones hechas para obtener las ecuaciones interiores y han de ser reemplazadas por otras. Este desarrollo ha sido aplicado en varios trabajos recientes (Moya et al., 2004a,b; Grigahcène et al., 2004; Dupret et al., 2004) mejorando las predicciones de los observables no adiabáticos, y será el utilizado en este trabajo de Tesis Doctoral.

En la Sec. 4.1 se presentan las ecuaciones diferenciales que describen las oscilaciones no adiabáticas. En la Sec. 4.2 se hace un estudio de las condiciones de contorno necesarias para resolver las ecuaciones anteriores, centrándonos en particular en el caso en el que no se tiene en cuenta la interacción con la atmósfera, siendo, por tanto, la fotosfera la última capa involucrada. En la Sec. 4.3 se describe la formulación adimensional de las ecuaciones, tal y como son tratadas por el código de pulsación, en el caso anterior. La descripción de la oscilación en la atmósfera se presenta en la Sec. 4.4, mientras que el tratamiento numérico de las ecuaciones obtenidas se desarrolla en la 4.5. Por último, se ha abordado el estudio de dos aspectos importantes de las pulsaciones no adiabáticas, la estabilidad de los modos, presentado en la Sec. 4.6, y los mecanismos de excitación de los mismos, descritos brevemente en la 4.7.

## 4.1. Ecuaciones de oscilación no adiabáticas

En primer lugar analizaremos las ecuaciones de oscilación sin la aproximación adiabática, siguiendo el desarrollo expuesto en Unno et al. (1989). El sistema a resolver ya fue obtenido en la Sec. 3.2. Ahora lo seguiremos desarrollando hasta tener un conjunto equivalente a (3.59)-(3.61).

Las ecuaciones de conservación de la energía y de flujo están escritas en el formalismo Euleriano. Sin embargo, para resolverlas es conveniente pasarlas al Lagrangiano. La razón es que si utilizamos las perturbaciones Lagrangianas de la tasa de generación de energía nuclear y de la opacidad, no tenemos que tener en cuenta la dependencia en la composición química, ya que ésta se conserva en cada elemento de masa durante la pulsación (nótese que el tiempo dinámico es más corto que el nuclear o el de difusión de las partículas).

La ecuación linealizada de conservación de la energía, escrita en la formulación Lagrangiana, toma la forma siguiente:

$$T \frac{d\delta S}{dt} = \delta \varepsilon_N - \delta \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F} \right), \quad (4.1)$$

donde  $\mathbf{F}$  es el flujo total. El primer y segundo término del miembro de la derecha representan, respectivamente, la ganancia o pérdida de energía debido al exceso o defecto en la tasa de generación de energía nuclear, y la energía intercambiada mediante flujo radiativo o convectivo (en **MLT**).

Si nos centramos en el término de la perturbación del gradiente del flujo, utilizando la ecuación de conservación de la masa (3.25) y la relación entre las perturbaciones Euleriana y Lagrangiana (3.14), se llega a:

$$-\delta \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot [\mathbf{F}' + \delta \mathbf{r} (\nabla \cdot \mathbf{F})]. \quad (4.2)$$

Si tenemos en cuenta que en el equilibrio (en ausencia de rotación y de campos magnéticos) el flujo tiene solamente componente radial:

$$\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r,$$

que la componente radial de la perturbación de la luminosidad total (radial + convectiva en la teoría de la **MLT**) se escribe como:

$$\delta L_r = 4\pi r^2 \left( \delta F_r + 2 \frac{\xi_r}{r} F_r \right), \quad (4.3)$$

y que la perturbación Euleriana del Flujo se puede escribir:

$$\mathbf{F}' = F'_r \mathbf{e}_r + \mathbf{F}'_{\perp}, \quad (4.4)$$

llegamos a que:

$$-\delta \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F} \right) + \frac{\partial \delta L_r}{\partial M_r} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F}'_{\perp} + \ell(\ell+1) \frac{\xi_h}{r} \frac{dL_r}{dM_r}. \quad (4.5)$$

Aquí aparecen dos problemas serios: el primero es debido a que tanto el flujo como la luminosidad poseen una parte convectiva que, como ya se explicó en el capítulo anterior, no está completamente resuelta. El segundo aparece cuando además necesitamos describir la interacción convección-pulsación, volviéndose la resolución del problema más compleja aún. Por ahora vamos a desprestigiar la perturbación del flujo convectivo, aproximación que se denomina “*convección congelada*”. Existen varias formas de hacer esto. Expondremos tres casos:

1. Suponer que  $\delta(\nabla \cdot \mathbf{F}_C) = 0$ . Con esto, la ecuación (4.5) queda:

$$-\delta \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F} \right) = -\frac{\partial \delta L_R}{\partial M_r} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F}'_{R\perp} + \ell(\ell+1) \frac{\xi_h}{r} \frac{dL_r}{dM_r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \xi_r)}{\partial r} \frac{dL_C}{dM_r}, \quad (4.6)$$

donde  $L_C = 4\pi r^2 F_{C,r}$ .

2. Suponer que:

$$\delta \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F}_C \right) = 0.$$

Así se llega a que:

$$-\delta \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F} \right) = -\frac{\partial \delta L_R}{\partial M_r} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F}'_{R\perp} + \ell(\ell+1) \frac{\xi_h}{r} \frac{dL_R}{dM_r}, \quad (4.7)$$

donde  $L_R = 4\pi r^2 F_{R,r}$ .

3. Suponer que  $\delta L_C = \mathbf{F}'_{C\perp} = 0$ . Con esto tenemos:

$$-\delta \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F} \right) = -\frac{\partial \delta L_R}{\partial M_r} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F}'_{R\perp} + \ell(\ell+1) \frac{\xi_h}{r} \frac{dL_r}{dM_r}. \quad (4.8)$$

También existen otras aproximaciones posibles (Pesnell, 1990). En principio no existen motivos físicos para preferir unas a otras, aunque recientemente se han publicado estudios preliminares que apuntan a que algunas de ellas violan la conservación de la energía en la aproximación adiabática o crean efectos artificiales en los modos (Löffler, 2003). Pero dado que estos estudios no se han desarrollado completamente, seguiremos la elección que se hace en Unno et al. (1989), es decir, utilizaremos la ecuación (4.8), aunque los propios autores declaran que no hay ningún motivo especial para elegir ésta y no otra. Como última nota al respecto, diremos que esta aproximación puede producir efectos ficticios de excitación cerca de la base de la zona convectiva interna, pero esta situación es relevante principalmente para estrellas  $\gamma$  Doradus, por lo que en este trabajo no tendremos en cuenta este punto.

En la aproximación de difusión, el flujo radiativo está dado por la ecuación (2.23), y su forma linealizada por las ecuaciones (3.44), con las perturbaciones Eulerianas de las variables físicas. Transformando éstas a la formulación Lagrangiana, y usando el hecho de que las autofunciones son proporcionales a los armónicos esféricos  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ , tenemos:

$$\delta F_{R,r} = F_R \left[ -\frac{\delta\kappa}{\kappa} + 2\frac{\xi_r}{r} - \ell(\ell+1)\frac{\xi_h}{r} + 4\frac{\delta T}{T} + \frac{d(\frac{\delta T}{T})/d\ln r}{d\ln T/d\ln r} \right], \quad (4.9)$$

y para su parte angular:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}'_{R,\perp} = -\frac{F_R}{d\ln T/d\ln r} \frac{\ell(\ell+1)}{r} \frac{T'}{T}, \quad (4.10)$$

donde  $F_R$  es el flujo radiativo en el estado de equilibrio definido en la ecuación (2.23).

Con todo este desarrollo ya podemos escribir el conjunto de ecuaciones diferenciales lineales no adiabáticas (3.50)-(3.54) mediante el sistema:

$$gv_T \frac{\delta S}{c_p} = \frac{d}{dr} \left( \frac{p'}{\rho} + \Phi' \right) - \frac{N^2}{g} \frac{p'}{\rho} + (N^2 - \sigma^2) \xi_r, \quad (4.11)$$

$$v_T \frac{\delta S}{c_p} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \xi_r) + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} \xi_r + \left( 1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} \right) \frac{p'}{\rho c^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2} \Phi', \quad (4.12)$$

$$-4\pi G \rho v_T \frac{\delta S}{c_p} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi' - 4\pi G \rho \left( \frac{p'}{\rho c^2} + \frac{N^2}{g} \xi_r \right), \quad (4.13)$$

$$i\sigma T \delta S = \delta\varepsilon_N - \frac{d\delta L_R}{dM_r} + \frac{\ell(\ell+1)}{d\ln T/d\ln r} \frac{F_R}{\rho r} \frac{\delta T}{T} + \ell(\ell+1) \left( \frac{\xi_h}{r} \frac{dL_r}{dM_r} - \frac{\xi_r}{r} \frac{L_R}{4\pi r^3 \rho} \right), \quad (4.14)$$

$$\frac{\delta L_R}{L_R} = -\frac{\delta\kappa}{\kappa} + 4\frac{\xi_r}{r} - \ell(\ell+1)\frac{\xi_h}{r} + 4\frac{\delta T}{T} + \frac{d(\frac{\delta T}{T})/d\ln r}{d\ln T/d\ln r}. \quad (4.15)$$

La relación entre  $\delta T$  y  $\delta S$  se obtiene a partir de la relación termodinámica:

$$\delta S = c_p \left( \frac{\delta T}{T} - \nabla_{\text{ad}} \frac{\delta p}{p} \right), \quad (4.16)$$

y  $\xi_h$  está relacionado con  $(p'/\rho + \Phi')$  mediante la ecuación (3.49). Las perturbaciones de la opacidad y de la tasa de generación de energía nuclear se pueden representar

como funciones de  $\delta p$  y  $\delta S$ :

$$\begin{cases} \frac{\delta \kappa}{\kappa} = \kappa_T \frac{\delta T}{T} + \kappa_\rho \frac{\delta \rho}{\rho} = \kappa_{\text{ad}} \frac{\delta p}{p} + \kappa_S \frac{\delta S}{c_p}, \\ \frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_N} = \varepsilon_T \frac{\delta T}{T} + \varepsilon_\rho \frac{\delta \rho}{\rho} = \varepsilon_{\text{ad}} \frac{\delta p}{p} + \varepsilon_S \frac{\delta S}{c_p}, \end{cases} \quad (4.17)$$

donde:

$$\begin{cases} \kappa_T = \left( \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln T} \right)_\rho, & \kappa_\rho = \left( \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln \rho} \right)_T, \\ \kappa_{\text{ad}} = \left( \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln p} \right)_S = \kappa_T \nabla_{\text{ad}} + \frac{\kappa_\rho}{\Gamma_1}, \\ \kappa_S = c_p \left( \frac{\partial \ln \kappa}{\partial S} \right)_p = \kappa_T - v_T \kappa_\rho, \end{cases} \quad (4.18)$$

y

$$\begin{cases} \varepsilon_T = \left( \frac{\partial \ln \varepsilon_N}{\partial \ln T} \right)_\rho, & \varepsilon_\rho = \left( \frac{\partial \ln \varepsilon_N}{\partial \ln \rho} \right)_T, \\ \varepsilon_{\text{ad}} = \left( \frac{\partial \ln \varepsilon_N}{\partial \ln p} \right)_S = \varepsilon_T \nabla_{\text{ad}} + \frac{\varepsilon_\rho}{\Gamma_1}, \\ \varepsilon_S = c_p \left( \frac{\partial \ln \varepsilon_N}{\partial S} \right)_p = \varepsilon_T - v_T \varepsilon_\rho, \end{cases} \quad (4.19)$$

En la derivación de estas expresiones se asume que la composición química de un elemento de masa se conserva durante las oscilaciones.

Así pues las oscilaciones lineales no adiabáticas quedan descritas mediante el conjunto de seis ecuaciones diferenciales de primer orden (4.11)-(4.15), donde las autofunciones  $\xi_r$ ,  $p'$ ,  $\Phi'$ ,  $d\Phi'/dr$ ,  $\delta S$  y  $\delta L_R$ , y el autovalor  $\sigma^2$ , son complejos.

## 4.2. Condiciones de contorno del sistema de ecuaciones

Para completar el problema matemático a resolver, necesitamos definir las condiciones de contorno del sistema.

1. Condiciones de contorno internas:

Como ya hemos comentado, en la mayor parte de la estrella se verifica que  $\tau_{\text{th}} \gg \tau_{\text{dyn}}$ , por lo que el comportamiento del sistema es altamente adiabático. Esta relación alcanza su máximo en el núcleo, por lo que en el centro de la estrella podemos adoptar como condiciones de contorno mecánica y del potencial las del tratamiento adiabático, (3.64) y (3.65):

- a) Condición mecánica interior:

$$\xi_r - \frac{\ell}{\sigma^2 r} \left( \frac{p'}{\rho} + \Phi' \right) = 0. \quad (4.20)$$

b) Condición interior para el potencial:

$$\frac{d\Phi'}{dr} = \frac{\ell\Phi'}{r}. \quad (4.21)$$

Finalmente hemos de imponer una condición energética, y dado que el centro estelar es altamente no adiabático, la más lógica sería:

c) Condición energética interior:

$$\delta S = 0. \quad (4.22)$$

2. Condiciones de contorno externas:

Este problema no está muy bien definido, ya que es difícil establecer condiciones físicas que solucionen el problema cuando no hay un límite claro de la estrella. Aquí deduciremos unas condiciones muy simples.

a) Condición mecánica exterior:

Una primera condición, muy simple, consiste en imponer que la densidad y la presión tiendan a cero en la superficie de la estrella, con lo que tendremos, como en la aproximación adiabática:

$$\delta p = 0, \quad r \rightarrow R \quad (4.23)$$

Si la presión de radiación domina en la zona más externa, la hipótesis de que la presión decrece muy rápidamente hacia afuera puede no ser cierta. En este caso, quizás sería mejor reemplazar  $\delta p$  por  $\delta p_{\text{gas}}$  (Shibahashi y Osaki, 1981). No obstante, nosotros utilizaremos, para el caso en el que no se tiene en cuenta la interacción de la pulsación con la atmósfera, una expresión algo más compleja (ver Sec. 4.3.1).

b) Condición exterior para el potencial:

Ésta no se ve afectada por el tratamiento no adiabático, por lo que seguimos teniendo:

$$\frac{d\Phi'}{dr} + \frac{\ell(\ell+1)}{r}\Phi' = 0. \quad (4.24)$$

c) Condición energética exterior:

En este caso impondremos que no haya flujo de energía entrante desde el exterior de la superficie estelar:

$$F_R = f_E J = f_E \frac{\sigma}{\pi} T^4, \quad (4.25)$$

donde  $J$  es la intensidad media,  $\sigma$  es la constante de Stefan-Boltzmann y  $f_E$  es el *factor de Eddington*, que en la aproximación de atmósfera gris se reduce a  $2\pi$ . Si perturbamos la ecuación anterior de forma lagrangiana, tenemos:

$$\frac{\delta F_R}{F_R} = \frac{\delta f_E}{f_E} + 4 \frac{\delta T}{T}. \quad (4.26)$$

Para obtener  $\delta f_E$  es necesario tener en cuenta las transferencias radiativas no locales introducidas por las perturbaciones no radiales, pero éste es un problema bastante complejo (Christensen-Dalsgaard y Frandsen, 1983), y aquí no lo trataremos.

### 4.3. Formulación adimensional de las ecuaciones no adiabáticas internas

Al igual que se hizo en la Sec. 3.3.5 con las ecuaciones adiabáticas, es necesario redefinir las expresiones obtenidas (4.11)-(4.16) y (4.20)-(4.26) de forma que puedan ser fácilmente resolubles en forma numérica, por lo que procederemos como en el caso anterior, definiendo las autofunciones adimensionales (Unno et al., 1989):

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\xi_r}{r}, & y_2 &= \frac{1}{gr} \left( \frac{p'}{\rho} + \Phi' \right) = \frac{\sigma r^2 \xi_h}{g r}, & y_3 &= \frac{1}{gr} \Phi', \\ y_4 &= \frac{1}{gr} \frac{d\Phi'}{dr}, & y_5 &= \frac{\delta S}{c_p}, & y_6 &= \frac{\delta L_R}{L_R}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

Con esto las ecuaciones (4.11)-(4.16) quedan:

$$x \frac{dy_1}{dx} = (V_g - 3)y_1 + \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{c_1 \omega^2} - V_g \right] y_2 + V_g y_3 + v_T y_5, \quad (4.28)$$

$$x \frac{dy_2}{dx} = (c_1 \omega^2 - A^*)y_1 + (A^* - U + 1)y_2 - A^* y_3 + v_T y_5, \quad (4.29)$$

$$x \frac{dy_3}{dx} = (1 - U)y_3 + y_4, \quad (4.30)$$

$$x \frac{dy_4}{dx} = UA^* y_1 + UV_g y_2 + [\ell(\ell+1) - UV_g] y_3 - U y_4 - U v_T y_5, \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} x \frac{dy_5}{dx} &= V \left[ \nabla_{\text{ad}}(U - c_1 \omega^2) - 4(\nabla_{\text{ad}} - \nabla) + c_2 \right] y_1 + V \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{c_1 \omega^2} (\nabla_{\text{ad}} - \nabla) - c_2 \right] y_2 \\ &\quad + V c_2 y_3 + V \nabla_{\text{ad}} y_4 + V \nabla (4 - \kappa_S) y_5 - V \nabla y_6, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} x \frac{dy_6}{dx} &= \left[ \ell(\ell+1) \frac{\nabla_{\text{ad}} - \nabla}{\nabla} - \varepsilon_{\text{ad}} c_3 V \right] y_1 + \left[ \varepsilon_{\text{ad}} c_3 V - \ell(\ell+1) \left( \frac{\nabla_{\text{ad}}}{\nabla} + \frac{c_3}{c_1 \omega^2} \right) \right] y_2 \\ &\quad + \left[ \ell(\ell+1) \frac{\nabla_{\text{ad}}}{\nabla} - \varepsilon_{\text{ad}} c_3 V \right] y_3 + \left[ c_3 \varepsilon_S - \frac{\ell(\ell+1)}{V \nabla} - i \omega c_4 \right] y_5 \\ &\quad - \frac{d \ln L_R}{d \ln r} y_6, \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde:

$$c_2 = (\kappa_{\text{ad}} - 4 \nabla_{\text{ad}}) V \nabla + \nabla_{\text{ad}} \left( \frac{d \ln \nabla_{\text{ad}}}{d \ln r} + V \right), \quad (4.34)$$

$$c_3 = \frac{4 \pi r^3 \rho \varepsilon_N}{L_R}, \quad (4.35)$$

$$c_4 = \frac{4 \pi r^3 \rho T c_p}{L_R} \sqrt{\frac{GM}{R^3}}, \quad (4.36)$$

y  $c_1$ ,  $V_g$ ,  $A^*$  y  $x$  se definieron en la Sec. 3.3.5.

En el código de pulsación utilizado en nuestro grupo, se puede resolver este sistema de ecuaciones desde dos enfoques diferentes, teniendo en cuenta la interacción de la pulsación con la atmósfera, caso “*con atmósfera*”, y sin tenerla en cuenta, caso que denominaremos “*sin atmósfera*” (Moya et al., 2004b). En cada uno de ellos el tratamiento numérico de las ecuaciones y de las condiciones de contorno es diferente. Analicemos en primer lugar el caso sin atmósfera.

### 4.3.1. Caso sin atmósfera

Aquí solamente hay un cambio con respecto a las ecuaciones (4.28)-(4.33), que aparece como consecuencia de que uno de los observables no adiabáticos que se necesitan para la comparación con las observaciones está directamente relacionado con la variable  $\delta p/p$ , por lo que, para no perder precisión numérica, se hará el cambio de variable:

$$\frac{\delta p}{p} = V (y_2 - y_3 - y_1) \Rightarrow y_2 = \frac{\delta p}{Vp} + y_3 + y_1. \quad (4.37)$$

Redefiniendo  $y_2 \equiv \delta p/Vp$  queda:

$$x \frac{dy_1}{dx} = \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} - 3 \right] y_1 + \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} - V_g \right] y_2 + \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} y_3 + v_T y_5, \quad (4.38)$$

$$x \frac{dy_2}{dx} = \left[ c_1\omega^2 - 4 - U - \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} \right] y_1 + \left[ A^* - U + 1 + V_g - \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} \right] y_2 - \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} y_3 - y_4, \quad (4.39)$$

$$x \frac{dy_3}{dx} = (1 - U)y_3 + y_4, \quad (4.40)$$

$$x \frac{dy_4}{dx} = U(A^* + V_g)y_1 + UV_g y_2 + \ell(\ell+1)y_3 - U y_4 - U v_T y_5, \quad (4.41)$$

$$x \frac{dy_5}{dx} = V \left[ (\nabla - \nabla_{\text{ad}}) \left( 4 - \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} \right) + \nabla_{\text{ad}}(U - c_1\omega^2) \right] y_1 + V \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} (\nabla_{\text{ad}} - \nabla) - c_2 \right] y_2 + \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} V (\nabla - \nabla_{\text{ad}}) y_3 + V \nabla_{\text{ad}} y_4 + V \nabla (4 - \kappa_S) y_5 - V \nabla y_6, \quad (4.42)$$

$$x \frac{dy_6}{dx} = -\ell(\ell+1) \left( 1 + \frac{c_3}{c_1\omega^2} \right) y_1 + \left[ \varepsilon_{\text{ad}} c_3 V - \ell(\ell+1) \left( \frac{\nabla_{\text{ad}}}{\nabla} - \frac{c_3}{c_1\omega^2} \right) \right] y_2 - \ell(\ell+1) \frac{c_3}{c_1\omega^2} y_3 + \left[ c_3 \varepsilon_S - \frac{\ell(\ell+1)}{V \nabla} - i\omega c_4 \right] y_5 - \frac{d \ln L_R}{d \ln r} y_6. \quad (4.43)$$

Con este cambio de variable, las condiciones de contorno (4.20)-(4.26) quedan:

1. Condiciones internas:

a) Condición mecánica:

$$(c_1\omega^2 - \ell)y_1 - \ell y_2 - \ell y_3 = 0 \quad (4.44)$$

b) Condición del potencial:

$$\ell y_3 - y_4 = 0 \quad (4.45)$$

c) Condición térmica:

$$y_5 = 0 \quad (4.46)$$

2. Condiciones externas:

- a) Condición mecánica. En este caso, imponiendo que en la superficie se debe verificar:

$$\left. \begin{array}{l} U \rightarrow 0, \\ A^* \rightarrow A^*(x=1), \end{array} \right\} \begin{array}{l} V_g \rightarrow V_g(x=1) \\ c_1 \rightarrow 1 \end{array} \quad x \rightarrow 1, \quad (4.47)$$

y suponiendo que se verifican las desigualdades:

$$A^*, V_g \gg \omega^2, \ell(\ell+1)/\omega^2, 1 \quad (4.48)$$

se obtiene:

$$\left\{ 1 + \frac{\frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2} - 4 - \omega^2}{V} \right\} y_1 - y_2 + \left\{ 1 + \frac{\frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2} - \ell - 1}{V} \right\} y_3 = 0, \quad (4.49)$$

expresión utilizada por primera vez por Dziembowski (1971) y Osaki y Hansen (1973).

- b) Condición del potencial:

$$(\ell+1)y_3 + y_4 = 0 \quad (4.50)$$

- c) Condición térmica:

$$2y_1 + 4\nabla_{\text{ad}}y_2 + 4y_5 - y_6 = 0 \quad (4.51)$$

Este conjunto de ecuaciones diferenciales, junto con las condiciones de contorno, nos definen completamente el problema sin atmósfera, donde la fotosfera es la última capa del modelo.

### 4.3.2. Caso con atmósfera

Las autofunciones que nos conviene obtener ahora como solución vienen dictadas por las ecuaciones que tendremos que resolver para describir la pulsación en la atmósfera. Como tendremos que imponer continuidad de las autofunciones y las ecuaciones entre ambos tratamientos, y el de la atmósfera es el que tiene un mayor número de restricciones, es conveniente adaptar las ecuaciones interiores y obtener como solución las mismas autofunciones que se tienen para las atmosféricas (Sec. 4.4). Veamos los cambios de variable necesarios:

1. Cambio de  $y_2$ :

$$y_2 = \frac{\delta p}{p} \quad (4.52)$$

2. Cambio de  $y_5$ :

$$y_5 = \frac{\delta T}{T} = \nabla_{\text{ad}} \frac{\delta p}{p} + \frac{\delta S}{c_p} \quad (4.53)$$

Con estos cambios de variable, nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x \frac{dy_1}{dx} = \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} - 3 \right] y_1 + \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} - V_g - \nabla_{\text{ad}} V v_T \right] \frac{1}{V} y_2 + \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} y_3 + v_T y_5, \quad (4.54)$$

$$x \frac{dy_2}{dx} = V \left[ c_1\omega^2 - U + 4 - \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} \right] y_1 + \left[ V - \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} \right] y_2 - V \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} y_3 - V y_4, \quad (4.55)$$

$$x \frac{dy_3}{dx} = (1 - U) y_3 + y_4, \quad (4.56)$$

$$x \frac{dy_4}{dx} = U(A^* + V_g) y_1 + U \left( \frac{1}{\Gamma_1} + v_T \nabla_{\text{ad}} \right) y_2 + \ell(\ell+1) y_3 - U y_4 - v_T U y_5, \quad (4.57)$$

$$x \frac{dy_5}{dx} = V \nabla \left[ 4 - \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} \right] y_1 + \left[ V \nabla (\nabla_{\text{ad}} \kappa_S - \kappa_{\text{ad}}) - \nabla \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} \right] y_2 - V \nabla \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} y_3 + V \nabla (4 - \kappa_S) y_5 - V \nabla y_6, \quad (4.58)$$

$$x \frac{dy_6}{dx} = \ell(\ell+1) \left[ \frac{c_3}{c_1\omega^2} - 1 \right] y_1 + \left[ c_3(\varepsilon_{\text{ad}} - \varepsilon_S \nabla_{\text{ad}}) + \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} \frac{c_3}{V} + i\omega c_4 \nabla_{\text{ad}} \right] y_2 - \ell(\ell+1) \frac{c_3}{c_1\omega^2} y_3 + \left[ c_3 \varepsilon_S - \frac{\ell(\ell+1)}{V \nabla} - i\omega c_4 \right] y_5 - \frac{d \ln L_R}{d \ln r} y_6. \quad (4.59)$$

Las condiciones internas de contorno son:

1. Condición mecánica:

$$(c_1\omega^2 - \ell) y_1 - \frac{\ell}{V} y_2 - \ell y_3 = 0 \quad (4.60)$$

2. Condición del potencial:

$$\ell y_3 - y_4 = 0 \quad (4.61)$$

3. Condición térmica:

$$-\nabla_{\text{ad}} y_2 + y_5 = 0 \quad (4.62)$$

## 4.4. Ecuaciones no adiabáticas atmosféricas

En la atmósfera, algunas de las suposiciones hechas para obtener las ecuaciones internas no son válidas, por lo que tendremos que reemplazarlas por otras. La mayor diferencia existente entre ésta y el resto de la estrella está en los bajos valores de la densidad, el calor específico y el espesor óptico. Esto nos lleva a que  $\tau_{\text{th}} \ll \tau_{\text{dyn}}$ , por lo que se puede suponer que durante la pulsación el calor se distribuye casi instantáneamente, y por lo tanto, la atmósfera se encuentra en equilibrio térmico. Ésta es la primera aproximación que utilizaremos. Otra modificación consiste en que en esta zona el campo de radiación ya no es isótropo, por lo que la forma típica de la presión de radiación ( $p_R = aT^4/3$ ) no es válida, así que habrá que modificar la ecuación de conservación del momento.

Antes de describir las nuevas ecuaciones en la atmósfera, hemos de señalar que vamos a trabajar en ausencia de rotación, por lo que podemos utilizar la descomposición en armónicos esféricos para describir la parte angular, quedándonos solamente con la radial. Para la deducción de estas ecuaciones seguiremos el trabajo original desarrollado en Dupret et al. (2002, 2003).

### 4.4.1. Equilibrio radiativo

En la atmósfera, el tiempo de relajación térmico es del orden de  $\tau_{\text{th}} \approx 1\text{s}$ , que es mucho menor que los periodos de pulsación. Por lo tanto, supondremos que ésta, durante una oscilación completa, permanece en equilibrio radiativo, esto es:  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ . Con el objeto de obtener las cantidades termodinámicas, utilizaremos la aproximación plano-paralela, consistente en suponer que la atmósfera se puede descomponer en capas planas, paralelas entre sí, y perpendiculares a la dirección radial. La validez de esta aproximación está avalada por el hecho de que nos encontramos en la zona más externa de la estrella, siendo su anchura despreciable en comparación con el radio total. Estas dos aproximaciones llevan a que  $F = \text{cte}$ , y por tanto:  $L_R = \text{cte}$ .

Bajo estas suposiciones, la atmósfera queda completamente determinada por la temperatura efectiva  $T_{ef}$ , la gravedad  $g$  y la composición química, que se puede considerar constante durante la pulsación. Por lo tanto la temperatura de cada capa, una vez separada la contribución angular a través del armónico esférico correspondiente, se puede escribir como función de la profundidad óptica media de Rosseland,  $\tau$ , la temperatura efectiva y la gravedad:  $T = T(\tau, T_{ef}, g)$ . A partir de este momento trabajaremos con lo que se denomina *atmósfera local*, esto es, a un ángulo sólido fijo. Con la suposición de equilibrio radiativo durante la pulsación, la dependencia de la temperatura con  $\tau$  es la misma que en equilibrio, así que, al ser perturbada, la temperatura en cada capa tiene la forma:

$$T_0 + \delta T = T(\tau_0 + \delta\tau, T_{ef_0} + \delta T_{ef}, g_0 + \delta g_e) \quad (4.63)$$

donde  $\delta T_{ef_0}$  es la perturbación de la temperatura efectiva local,  $\delta g_e$  es la perturbación de la gravedad efectiva local, es decir, la gravedad corregida por la aceleración provocada por la pulsación, y  $\delta\tau$  es la perturbación lagrangiana de la profundidad óptica media de Rosseland. Hay que tener en cuenta que las capas de  $\tau$  constante, en promedio no se mueven con la materia durante la pulsación, ya que  $d\tau = -\kappa\rho dr$  (siendo  $\kappa$  la opacidad media de Rosseland). La relación entre el movimiento material y el movimiento a profundidad óptica constante, y su influencia en los observables y en las ecuaciones, pueden encontrarse en (Dupret et al., 2002). Así, en aproximación lineal:

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln T_{ef}} \frac{\delta T_{ef}}{T_{ef}} + \frac{\partial \ln T}{\partial g_e} \frac{\delta g_e}{g_e} + \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \tau} \frac{\delta\tau}{\tau}. \quad (4.64)$$

A través de la definición de  $\tau$  tenemos:

$$\frac{\partial \delta\tau}{\partial \tau} = \frac{\delta\kappa}{\kappa} + \frac{\delta\rho}{\rho} + \frac{\partial \xi_r}{\partial r}, \quad (4.65)$$

con lo que llegamos a que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\delta T/T)}{\partial \ln \tau} &= \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \tau} \left( \frac{\delta\kappa}{\kappa} + \frac{\delta\rho}{\rho} + \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \right) \\ &\quad - \left( 1 - \frac{\frac{\partial^2 \ln T}{\partial \ln \tau^2}}{\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \tau}} \right) \left( \frac{\delta T}{T} - \frac{\partial \ln T}{\partial \ln T_{ef}} \frac{\delta T_{ef}}{T_{ef}} - \frac{\partial \ln T}{\partial g_e} \frac{\delta g_e}{g_e} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 \ln T}{\partial \ln \tau \partial \ln T_{ef}} \frac{\delta T_{ef}}{T_{ef}} + \frac{\partial^2 \ln T}{\partial \ln \tau \partial \ln g_e} \frac{\delta g_e}{g_e}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Esta es la ecuación que se utiliza en lugar de (4.14) y (4.15). Las derivadas parciales que aparecen en esta expresión se obtienen a través de modelos de atmósfera en equilibrio como los de Kurucz (1993).

## 4.4.2. Conservación de momento

Como se mencionó anteriormente, en la atmósfera estelar el campo de radiación ya no es isótropo, por lo que el tensor de radiación no es diagonal con autovalor  $p_r = 1/3aT^4$  (Mihalas, 1978). En este caso la presión total se obtiene como suma de la presión del gas más la presión de radiación, calculada a través de la aceleración que produce (Kurucz, 1993; Mihalas, 1978).

Entonces, en lugar de (2.11), tenemos para la ecuación de conservación del momento:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \Phi - \frac{\nabla p_g}{\rho} + \mathbf{a}_R, \quad (4.67)$$

donde  $\mathbf{a}_R$  es la aceleración debida a la radiación. La relación entre ésta y el flujo  $\mathbf{F}$  es:

$$\mathbf{a}_R = \frac{\kappa_F}{c} \mathbf{F}, \quad (4.68)$$

donde  $\kappa_F$  es la opacidad media en frecuencias pesada con el flujo (Mihalas, 1978).

Para obtener la forma definitiva de la ecuación de conservación del momento, supondremos que  $\delta L_R$  es constante en la atmósfera, que  $\mathbf{F}$  es paralelo al vector gradiente de temperatura  $\nabla T$ , y que  $\delta \kappa_F / \kappa_F \approx \delta \kappa / \kappa$ .

La primera de las suposiciones se basa en lo anteriormente expuesto para la atmósfera, esto es, que en buena aproximación se encuentra en equilibrio termodinámico. Esto, junto con la aproximación plano-paralela, nos lleva a que  $\delta F = \text{cte}$ . No obstante, las dos últimas aproximaciones necesitan una verificación más exhaustiva que ya ha sido llevada a cabo en Dupret et al. (2002).

La primera suposición, unida a la ley de Stefan, nos lleva a que, en primer orden:

$$\frac{\delta F}{F} = \frac{\delta F_r}{F_r} = 4 \frac{\delta T_{ef}}{T_{ef}}, \quad (4.69)$$

mientras que la tercera de ellas implica, para la componente radial de  $\delta \mathbf{a}_R$ :

$$(\mathbf{a}_R)_r = a_R \left( \frac{\delta \kappa}{\kappa} + 4 \frac{\delta T_{ef}}{T_{ef}} \right). \quad (4.70)$$

Con esto, perturbando la ecuación de conservación del momento como en la Sec. 3.2.1, y después de un poco de álgebra, se llega a que:

$$\begin{aligned} \sigma^2 \xi_r &= \frac{\partial(\delta p_g / p_g) p_g}{\partial r} \frac{p_g}{\rho} + \frac{\partial \Phi'}{\partial r} + \frac{\partial(g \xi_r)}{\partial r} + \left( \frac{\delta \rho}{\rho} - \frac{\delta p_g}{p_g} \right) (g - a_R) \\ &\quad - a_R \left( \frac{\delta \kappa}{\kappa} + 4 \frac{\delta T_{ef}}{T_{ef}} + \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Con la suposición de que  $\mathbf{F}$  es paralelo a  $\nabla T$ , se tiene:

$$\sigma^2 \xi_h = \frac{1}{r} \left( \frac{p_g}{\rho} + \Phi' + g \xi_r - a_R \frac{\delta T}{\partial T / \partial r} \right), \quad (4.72)$$

por lo que la ecuación de continuidad nos quedaría:

$$\frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \xi_r)}{\partial r} = \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2} \left( \frac{\delta p_g}{\rho} + \Phi' + g \xi_r - a_R \frac{\delta T}{\partial T / \partial r} \right). \quad (4.73)$$

Por último, la ecuación de Poisson quedaría modificada a través de la forma de  $\delta\rho/\rho$  en la atmósfera:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{p_{g\rho}} \frac{\delta p_g}{p_g} - \frac{p_{gT}}{p_{g\rho}} \frac{\delta T}{T}, \quad (4.74)$$

donde:

$$p_{gT} \equiv \left( \frac{\partial \ln p_g}{\partial \ln T} \right)_\rho, \quad (4.75)$$

$$p_{g\rho} \equiv \left( \frac{\partial \ln p_g}{\partial \ln \rho} \right)_T. \quad (4.76)$$

### 4.4.3. Condiciones de contorno en la atmósfera

El siguiente paso es definir tanto las condiciones de contorno externas como las internas.

#### 1. Condiciones externas de contorno:

##### a) Condición mecánica:

De forma análoga a como obtienen esta condición otros autores, impondremos que:

$$\frac{\partial(\delta p_g/p_g)}{\partial r} = 0 \quad (4.77)$$

en la superficie. La única diferencia con otras condiciones de la literatura es que aquí se impone esta condición a  $p_g$  en lugar de a  $p$ , ya que el formalismo que estamos desarrollando es generalizable a muchos tipos de estrellas, y no en todos los casos  $a_R$  es despreciable en la superficie, pero  $p_g$  sí. Teniendo esto en cuenta, la condición de contorno se obtiene anulando el término correspondiente en (4.71), con lo que:

$$\begin{aligned} \sigma^2 \xi_r &= \frac{\partial \Phi'}{\partial r} + \frac{\partial(g\xi_r)}{\partial r} + \left( \frac{\delta\rho}{\rho} - \frac{\delta p_g}{p_g} \right) (g - a_R) \\ &\quad - a_R \left( \frac{\delta\kappa}{\kappa} + 4 \frac{\delta T_{ef}}{T_{ef}} + \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \right), \quad r = R \end{aligned} \quad (4.78)$$

##### b) Condición del potencial:

Como en este formalismo mantendremos la ecuación de Poisson, y las variables que tienen en cuenta el potencial y su derivada se mantienen inalteradas respecto a las ecuaciones en el interior, la condición de contorno para el potencial es la misma que en el caso sin atmósfera (4.24):

$$\frac{d\Phi'}{dr} + \frac{\ell(\ell+1)}{r} \Phi' = 0. \quad (4.79)$$

##### c) Condición térmica:

Ésta la obtendremos a partir de (4.66), en el límite  $\tau \rightarrow 0$ :

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln T_{ef}} \frac{\delta T_{ef}}{T_{ef}} + \frac{\partial \ln T}{\partial \ln g_e} \frac{\delta g_e}{g_e} + \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \tau} \left( \frac{\delta\kappa}{\kappa} + \frac{\delta\rho}{\rho} + \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \right) \quad (4.80)$$

en la última capa del modelo.

2. Capa de conexión entre ambos tratamientos:

En esta capa hemos de imponer la continuidad de las autofunciones y de las ecuaciones entre las dos zonas. La mayoría de las ecuaciones son continuas de forma natural.

Pero también hemos de definir los valores de  $\delta T_{ef}/T_{ef}$  y  $\delta g_e/g_e$  para que el conjunto de ecuaciones sea continuo.

Si imponemos continuidad del flujo en esta capa, a través de (4.9) y (4.67) llegamos a que:

$$3\frac{\delta T}{T} - \frac{\delta \kappa}{\kappa} - \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{d\delta T/dr}{dT/dr} - \frac{d\xi_r}{dr} = 4\frac{\delta T_{ef}}{T_{ef}}, \quad (4.81)$$

mientras que la forma de  $g_e$  la obtenemos describiendo la variación de la gravedad en un sistema de referencia que se mueva con la pulsación, esto es:

$$\delta g_e = -(\delta \mathbf{g}_e)_r = \delta \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \sigma^2 \xi_r, \quad (4.82)$$

lo que nos lleva a que:

$$\frac{\delta g_e}{g_e} = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi'}{\partial r} + \left( \frac{4\pi \rho r^3}{M_r} - 2 + \frac{\sigma^2 r}{g} \right) \frac{\xi_r}{r}. \quad (4.83)$$

Con esto, además de definir el valor tanto de  $\delta T_{ef}/T_{ef}$  como de  $\delta g_e/g_e$ , tenemos asegurada la continuidad de las ecuaciones en la capa de conexión y, en consecuencia, la de las autofunciones. La única excepción es la ecuación diferencial de  $\delta T/T$ . Sin embargo, con los términos introducidos hasta el orden considerado, la continuidad es lo suficientemente suave como para no introducir errores numéricos significativos por la falta de exactitud de las aproximaciones hechas para la obtención de las ecuaciones de interior en la capa de conexión.

El último punto a tratar aquí es dónde situar esta capa. Para ello hemos de tener en cuenta dos restricciones:

- a) Hemos de situarla por debajo de la fotosfera y en un lugar donde la aproximación de difusión todavía tenga validez para que las ecuaciones interiores sean aún representativas, aunque no exactas.
- b) No se puede situar dentro de ninguna zona convectiva, ya que las ecuaciones desarrolladas describen adecuadamente la oscilación únicamente en las capas radiativas.

Con estas dos premisas, tenemos bastante restringidas las posibles localizaciones de esta capa de conexión, ya que las estrellas  $\delta$  Scuti tienen una pequeña zona convectiva cerca de la fotosfera, pero aún seguimos teniendo cierta libertad.

## 4.5. Formulación adimensional de las ecuaciones atmosféricas no adiabáticas

Pasamos a transformar las ecuaciones diferenciales, las condiciones de contorno exteriores y las condiciones de continuidad descritas en la sección anterior, de modo que puedan ser tratables numéricamente. Para ello se utilizarán las autofunciones adimensionales (4.27), junto con las redefiniciones (4.52) y (4.53), las variables adimensionales (3.93) y las relaciones termodinámicas (4.17) - (4.19). Las ecuaciones atmosféricas quedan entonces:

1. Ecuaciones mecánicas:

$$x \frac{dy_1}{dx} = \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} - 3 \right] y_1 + \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} \frac{p_g}{\rho gr} - \frac{1}{p_{g\rho}} \right] y_2 + \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} y_3 + \left[ \frac{p_{gT}}{p_{g\rho}} + \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} \frac{a_R}{V\nabla g} \right] y_5, \quad (4.84)$$

$$x \frac{dy_2}{dx} = \frac{\rho gr}{p_g} \left[ c_1\omega^2 - U + 2 + \left( \frac{a_R}{g} - 1 \right) \left( \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} - 2 \right) \right] y_1 + \frac{\rho gr}{p_g} \left[ \left( \frac{a_R}{g} - 1 \right) \left( \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} \frac{p_g}{\rho gr} - 1 \right) + \frac{a_R \kappa_\rho}{g p_{g\rho}} \right] y_2 + \left( \frac{a_R}{g} - 1 \right) \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} \frac{\rho gr}{p_g} y_3 - \frac{\rho gr}{p_g} y_4 + 4 \frac{\rho a_R r}{p_g} \frac{\delta T_{ef}}{T_{ef}} + \frac{\rho gr}{p_g} \left[ \left( \frac{a_R}{g} - 1 \right) \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} \frac{a_R}{V\nabla g} + \frac{a_R}{g} \left( \kappa_T - \kappa_\rho \frac{p_{gT}}{p_{g\rho}} \right) \right] y_5 \quad (4.85)$$

2. Ecuaciones del potencial:

Reduciendo la ecuación de segundo orden a dos de primer orden, queda:

$$x \frac{dy_3}{dx} = (1 - U)y_3 - y_4, \quad (4.86)$$

$$x \frac{dy_4}{dx} = -U \frac{d \ln \rho}{d \ln r} y_1 + \frac{U}{p_{g\rho}} y_2 + \ell(\ell+1)y_3 - U y_4 - U \frac{p_{gT}}{p_{g\rho}} y_5. \quad (4.87)$$

3. Ecuación termodinámica y aproximación  $\delta L_R = \text{cte}$ :

Con la relación termodinámica (4.66) y la aproximación  $\delta L_R = \text{cte}$ , tenemos las dos últimas ecuaciones:

$$x \frac{dy_5}{dx} = -\frac{\kappa_\rho r}{\tau} \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \tau} \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} - 2 \right] y_1 - \frac{\kappa_\rho r}{\tau} \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \tau} \left[ \frac{\kappa_\rho}{p_{g\rho}} + \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} \frac{p_g}{\rho gr} \right] y_2 - \frac{\kappa_\rho r}{\tau} \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \tau} \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} y_3 - \frac{\kappa_\rho r}{\tau} \left[ \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \tau} \left( \kappa_T - \kappa_\rho \frac{p_{gT}}{p_{g\rho}} + \frac{\ell(\ell+1)}{c_1\omega^2} \frac{a_R}{V\nabla g} \right) - 1 + \frac{\partial^2 \ln T / \partial \ln \tau^2}{\partial \ln T / \partial \ln \tau} \right] y_5 - \frac{\kappa_\rho r}{\tau} \left[ \left( 1 - \frac{\partial^2 \ln T / \partial \ln \tau^2}{\partial \ln T / \partial \ln \tau} \right) \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln T_{ef}} \frac{\delta T_{ef}}{T_{ef}} + \frac{\partial \ln T}{\partial \ln g_e} \frac{\delta g_e}{g_e} \right) + \frac{\partial^2 \ln T}{\partial \ln \tau \partial \ln T_{ef}} \frac{\delta T_{ef}}{T_{ef}} + \frac{\partial^2 \ln T}{\partial \ln \tau \partial \ln g_e} \frac{\delta g_e}{g_e} \right] y_6, \quad (4.88)$$

$$x \frac{dy_6}{dx} = 0. \quad (4.89)$$

Las condiciones externas de contorno quedan:

1. Condición mecánica:

Ésta se traduce en que  $x \frac{dy_2}{dx} = 0$  cuando  $r \rightarrow R$ , con lo que queda:

$$\begin{aligned}
0 = & \left[ c_1 \omega^2 - U + 2 + \left( \frac{a_R}{g} - 1 \right) \left( \frac{\ell(\ell+1)}{c_1 \omega^2} - 2 \right) \right] y_1 \\
& + \left[ \left( \frac{a_R}{g} - 1 \right) \left( \frac{\ell(\ell+1)}{c_1 \omega^2} \frac{p_g}{\rho g r} - 1 \right) + \frac{a_R \kappa_\rho}{g p_{g\rho}} \right] y_2 + \left( \frac{a_R}{g} - 1 \right) \frac{\ell(\ell+1)}{c_1 \omega^2} y_3 \\
& - y_4 + \left[ \left( \frac{a_R}{g} - 1 \right) \frac{\ell(\ell+1)}{c_1 \omega^2} \frac{a_R}{V \nabla g} + \frac{a_R}{g} \left( \kappa_T - \kappa_\rho \frac{p_{gT}}{p_{g\rho}} \right) \right] y_5 \\
& + 4 \frac{a_R}{g} \frac{\delta T_{ef}}{T_{ef}} y_6.
\end{aligned} \tag{4.90}$$

2. Condición del potencial:

$$(\ell + 1) y_3 + y_4 = 0. \tag{4.91}$$

3. Condición térmica:

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\partial \ln T}{\partial \ln T_{ef}} \frac{\delta T_{ef}}{T_{ef}} + \frac{\partial \ln T}{\partial \ln g_e} \frac{\delta g_e}{g_e} + \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \tau} \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{c_1 \omega^2} - 2 \right] y_1 \\
& + \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \tau} \left[ \frac{\kappa_\rho}{p_{g\rho}} + \frac{\ell(\ell+1)}{c_1 \omega^2} \frac{p_g}{\rho g r} \right] y_2 + \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \tau} \frac{\ell(\ell+1)}{c_1 \omega^2} y_3 \\
& + \left[ \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \tau} \left( \kappa_T - \kappa_\rho \frac{p_{gT}}{p_{g\rho}} + \frac{\ell(\ell+1)}{c_1 \omega^2} \frac{a_R}{V \nabla g} \right) - 1 \right] y_5.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Y por último, en la capa de conexión imponemos:

$$4 \frac{\delta T_{ef}}{T_{ef}} = y_6 - 2y_1, \tag{4.93}$$

$$\frac{\delta g_e}{g_e} = y_4 + (U - 2 - c_1 \omega^2) y_1. \tag{4.94}$$

Por lo tanto, el conjunto de ecuaciones a resolver para obtener la solución de las pulsaciones no adiabáticas, incluyendo la interacción con la atmósfera, serían (4.54)-(4.59) para el interior y (4.84)-(4.89) para la atmósfera, con las condiciones de contorno internas (4.60)-(4.62), externas (4.90)-(4.92), y la definición de  $\delta T_{ef}/T_{ef}$  (4.93) y de  $\delta g_e/g_e$  (4.94), para asegurar la continuidad entre ambas descripciones.

## 4.6. Estabilidad de los modos en las oscilaciones no adiabáticas

### 4.6.1. Ecuación de la energía e integral de trabajo

La estabilidad o inestabilidad de los modos se estudian a través de la cantidad de energía que la onda intercambia con su medio circundante durante una pulsación completa. Para comentar este estudio vamos a partir de la ecuación de conservación

de la energía total, que obtendremos a partir de la ecuación de conservación del momento, multiplicada escalarmente por  $\mathbf{v}$ :

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla \rho - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi, \quad (4.95)$$

de la primera ley de la termodinámica:

$$T dS = dU + p d \left( \frac{1}{\rho} \right), \quad (4.96)$$

y de la conservación de la energía térmica:

$$\rho T \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) S = \rho (\varepsilon_N + \varepsilon_V) - \nabla \cdot \mathbf{F}_R. \quad (4.97)$$

Con todo esto tenemos:

$$\rho \frac{d(\mathbf{v}^2/2 + U)}{dt} + \nabla \cdot (p\mathbf{v} + \mathbf{F}) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi = \rho \varepsilon_N, \quad (4.98)$$

donde  $U$  es la energía interna específica. Si integramos esta ecuación en todo el volumen de la estrella, teniendo en cuenta que:

$$\int_0^M \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi dM_r = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^M \Phi dM_r, \quad (4.99)$$

y denotando la energía total de la estrella como:

$$E = \int_0^M \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \Phi + U \right) dM_r, \quad (4.100)$$

nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^M \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \Phi + U \right) dM_r = \int_0^M \left( \varepsilon_N - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F} \right) dM_r - \int_{r=R} p \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_0^M T \frac{dS}{dt} dM_r - \int_{r=R} p \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Con esto podemos conocer la naturaleza física de cualquier cambio en la energía de un fluido sin perturbar. Pero nosotros estamos interesados en el balance energético del sistema perturbado, esto es, en lo que se denomina inestabilidad vibracional, por lo que estudiaremos la variación de la energía total de un modo a lo largo de un periodo completo producida por las cantidades perturbadas.

Si definimos la integral de trabajo como el cambio de la energía total sobre un periodo de oscilación tenemos:

$$\begin{aligned} W &= \oint \frac{dE}{dt} dt = \oint dt \int_0^M \left( \varepsilon_N - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F} \right) dM_r = \oint dt \int_0^M T \frac{dS}{dt} dM_r \\ &= \oint dt \int_0^M \delta T \frac{d\delta S}{dt} dM_r = \oint dt \int_0^M \frac{\delta T}{T} \delta \left( \varepsilon_N - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F} \right) dM_r, \end{aligned} \quad (4.102)$$

donde la integral  $\oint dt$  indica integración sobre un periodo de oscilación, y además hemos supuesto que la integral en la superficie es nula, lo cual es cierto si la presión es cero en la superficie estelar.

Si  $W$  es positivo, el modo es vibracionalmente inestable, y viceversa. Es decir, el modo gana energía en cada oscilación, por lo que ésta se puede mantener en el tiempo, o pierde energía paulatinamente hasta que se estabiliza por completo y desaparece. Este incremento de energía se produce cuando una parte de la que transportan los fotones generados por reacciones nucleares se transforma en energía cinética. La forma en que se produce esto depende de la zona de la estrella en que nos encontremos.

En el problema de estabilidad lineal, la forma bilineal del teorema de la energía (4.101) es muy útil para estudiar las fuerzas restauradoras y los mecanismos de excitación de las oscilaciones. Siguiendo a Eckart (1960), se pueden reordenar las ecuaciones básicas (3.19), (3.20) y (3.35), teniendo en cuenta que:  $v_T/c_p = \nabla_{\text{ad}}\rho T/p$ , con lo que queda:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_W) + \nabla \cdot \mathbf{F}_W = \rho \delta T \frac{\partial \delta S}{\partial t} - \Phi' \frac{\partial \rho'}{\partial t}, \quad (4.103)$$

donde se define la energía de la onda por unidad de masa:

$$e_W = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{v}^2 + \left( \frac{p'}{\rho c^2} \right)^2 + \left( \frac{g}{N} \right)^2 \left[ \left( \frac{p'}{\Gamma_1 p} - \frac{\rho'}{\rho} \right)^2 - \frac{\nabla}{\nabla_{\text{ad}}} \left( v_T \frac{\delta S}{c_p} \right)^2 \right] \right\}, \quad (4.104)$$

y:

$$\mathbf{F}_W = p' \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \Phi'. \quad (4.105)$$

Reemplazando  $\partial/\partial t$  por  $d/dt$  en la ecuación (4.103) debido a que las diferencias aparecen solamente en términos de segundo orden, e integrando dicha ecuación a todo el volumen de la estrella, tenemos:

$$\frac{dE_W}{dt} = \int_0^{M_r} \delta T \frac{d\delta S}{dt} dM_r - \int_S \mathbf{F}_W \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.106)$$

donde:

$$E_W = \int_0^M \left( e_W + \frac{1}{2} \frac{\rho'}{\rho} \Phi' \right) dM_r. \quad (4.107)$$

Esta ecuación establece que el cambio en la energía de la onda en una estrella está causada por procesos no adiabáticos en el interior y por el flujo de la onda hacia afuera,  $\mathbf{F}_W$ , en la superficie. El primer término en  $e_W$  es la energía cinética y los restantes representan la energías potenciales correspondientes a las distintas fuerzas restauradoras.

A partir de la ecuación (4.106) se puede derivar la integral de trabajo  $W$  en una forma conveniente para el análisis de la estabilidad lineal:

$$\begin{aligned} W &= \oint dt \frac{dE_W}{dt} = \oint dt \left[ \int_0^M \delta T \frac{d\delta S}{dt} dM_r - \int_S \mathbf{F}_W \cdot d\mathbf{S} \right] \\ &= \oint dt \left[ \int_0^M \frac{\delta T}{T} \delta \left( \varepsilon_N - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F} \right) dM_r - \int_{r=R} (p' + \rho \Phi') \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \right] \end{aligned} \quad (4.108)$$

Una cantidad que utilizaremos para representar el grado de estabilidad o inestabilidad de un modo es el denominado “*growth rate*”, que se define como:

$$\eta = \frac{\int_0^R \frac{dW}{dr} dr}{\int_0^R \left| \frac{dW}{dr} \right| dr}. \quad (4.109)$$

La utilidad de esta cantidad estriba en que la función  $dW/dr$  es positiva en las zonas donde el sistema recibe energía, y negativa donde la pierde, por lo que si  $\eta > 0$ , el modo es inestable, y si  $\eta < 0$ , es estable.

## 4.6.2. Aproximación quasiadiabática

Nosotros no utilizaremos esta aproximación en este trabajo, sin embargo, nos será muy útil para estudiar de forma sencilla los dos mecanismos de excitación de las oscilaciones estelares más importantes.

Cuando  $c_4 \equiv \tau_{\text{th}}/\tau_{\text{dyn}}$  es muy grande (donde  $c_4$  se definió en la ecuación (4.36) de la Sec. 4.3), la perturbación de la entropía es, en la mayoría de los casos, tan pequeña que la parte real de la frecuencia angular es esencialmente la misma que su valor adiabático. En estos casos, se puede utilizar la *aproximación quasiadiabática*, en la cual se desprecian los términos de orden  $O(c_4^{-2})$ .

De esta forma se pueden reducir las ecuaciones de oscilación no adiabáticas a formas parecidas a las de las oscilaciones adiabáticas. En primer lugar se expresará la perturbación de la entropía como función de  $\xi_r$  y  $p'$ . Para ello se puede obtener una ecuación para  $\delta L_R/L_R$  hasta orden  $O(c_4^0)$ , en la aproximación de Cowling:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L_R}{L_R} = & \left( 4\nabla_{\text{ad}} - \kappa_{\text{ad}} - \frac{1}{V\nabla} \frac{d\nabla_{\text{ad}}}{d \ln r} \right) \frac{\delta p}{p} + 4 \frac{\xi_r}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2} \frac{p'}{\rho} \\ & - \frac{\nabla_{\text{ad}}}{V\nabla} \frac{d}{d \ln r} \left( \frac{\delta p}{p} \right) + O(c_4^{-1}). \end{aligned} \quad (4.110)$$

Usando las ecuaciones (3.103) y (3.104) en las formas:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \xi_r) - \frac{g}{c^2} \xi_r + \left( 1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} \right) \frac{p'}{\rho c^2} = 0, \quad (4.111)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp'}{dr} + \frac{g}{\rho c^2} p' + (N^2 - \sigma^2) \xi_r = 0, \quad (4.112)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \frac{d}{d \ln r} \left( \frac{\delta p}{p} \right) &= \frac{1}{V} \frac{d}{d \ln r} \left( \frac{\rho p'}{\rho} - V \frac{\xi_r}{r} \right) = \frac{\rho}{p} \left( 1 - \frac{L_\ell^2}{\Gamma_1 \sigma^2} \right) \frac{p'}{\rho} \\ &= \left( 4 - V - U + \frac{r\sigma^2}{g} \right) \frac{\xi_r}{r} + O(c_4^{-1}). \end{aligned} \quad (4.113)$$

Sustituyendo esta ecuación en (4.110) se obtiene:

$$\frac{\delta L_R}{L_R} = D_1 \xi_r + D_2 \frac{p'}{\rho} + O(c_4^{-1}), \quad (4.114)$$

donde:

$$D_1 \equiv \left[ 4 + V(\kappa_{\text{ad}} - 4\nabla_{\text{ad}}) + \frac{\nabla_{\text{ad}}}{\nabla} \left( \frac{d \ln \nabla_{\text{ad}}}{d \ln r} - 4 + V + U - \frac{r\sigma^2}{g} \right) \right] r^{-1} \quad (4.115)$$

y

$$D_2 \equiv -\frac{\rho}{p} \left( \kappa_{\text{ad}} - 4\nabla_{\text{ad}} + \frac{\nabla_{\text{ad}}}{V\nabla} \frac{d \ln \nabla_{\text{ad}}}{d \ln r} + \frac{\nabla_{\text{ad}}}{\nabla} \right) + \left( \frac{\nabla_{\text{ad}}}{\nabla} - 1 \right) \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2}. \quad (4.116)$$

Introduciendo esta ecuación en (4.14) y multiplicando por  $(\rho r/F_R) = 4\pi r^3 \rho/L_R$ , nos queda, de nuevo en aproximación de Cowling:

$$\frac{\delta S}{c_p} = i \frac{D_3}{\omega c_4} \xi_r + i \frac{D_4}{\omega c_4} \frac{p'}{\rho} + O(c_4^{-1}), \quad (4.117)$$

donde:

$$D_3 \equiv \frac{4\pi r^3 \rho}{L_R} \left( \frac{\varepsilon_N \varepsilon_{\text{ad}} V}{r} + \frac{dL_R}{dM_r} D_1 \right) + \ell(\ell+1) \frac{\nabla - \nabla_{\text{ad}}}{r\nabla} - D_1 \left( 3 - \frac{rg}{c^2} \right) + \frac{dD_1}{d \ln r} - D_2(N^2 - \sigma^2)r \quad (4.118)$$

y

$$D_4 \equiv \frac{4\pi r^3 \rho}{L_R} \left( D_2 \frac{dL_R}{dM_r} - \frac{\rho}{p} \varepsilon_N \varepsilon_{\text{ad}} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2} \frac{4\pi r^3 \rho \varepsilon_N}{L_R} + \frac{\ell(\ell+1)}{gr} \frac{\nabla_{\text{ad}}}{\nabla} - \frac{rD_1}{c^2} \left( 1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} \right) + D_2 \frac{rN^2}{g} + \frac{dD_2}{d \ln r}. \quad (4.119)$$

Nótese que en la obtención de las ecuaciones (4.118) y (4.119) se ha utilizado tanto la aproximación de Cowling como la quasiadiabática.

Sustituyendo la ecuación (4.117) en (4.11) y (4.12), obtenemos las ecuaciones para las oscilaciones no radiales y no adiabáticas en aproximación de Cowling:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \xi_r)}{dr} - \left( \frac{g}{c^2} + i \frac{D_3 v_T}{\omega c_4} \right) \xi_r + \left[ \left( 1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} \right) \frac{1}{c^2} - i \frac{D_4 v_T}{\omega c_4} \right] \frac{p'}{\rho} = O(c_4^{-2}), \quad (4.120)$$

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{p'}{\rho} \right) - \left( \frac{N^2}{g} + i \frac{D_4 g v_T}{\omega c_4} \right) \frac{p'}{\rho} + \left( N^2 - \sigma^2 - i \frac{D_3 g v_T}{\omega c_4} \right) \xi_r = O(c_4^{-2}). \quad (4.121)$$

### 4.6.3. Integral de trabajo en aproximación quasiadiabática

Se puede reescribir la ecuación (4.108) en aproximación quasiadiabática, en una forma más útil para el estudio posterior de los mecanismos de excitación. Para ello se utilizarán autofunciones y relaciones adiabáticas. Podemos descomponer  $W$  en tres términos:

$$W = W_N + W_F + W_C, \quad (4.122)$$

donde:

$$W_N = \frac{\pi}{\sigma_R} \int_0^M \frac{\delta T^*}{T} \delta \varepsilon_N dM_r, \quad (4.123)$$

$$W_F = \frac{\pi}{\sigma_R} \int_0^M \frac{\delta T^*}{T} \left[ -\frac{d\delta L_R}{dM_r} + \frac{\ell(\ell+1)}{d \ln T / d \ln r} \frac{F_R}{\rho r} \frac{\delta T}{T} + \ell(\ell+1) \left( \frac{\xi_h}{r} \frac{dL_r}{dM_r} - \frac{\xi_r}{r} \frac{F_R}{\rho r} \right) \right] dM_r, \quad (4.124)$$

$$W_C = \frac{\pi}{\sigma_R} \int_0^M \frac{\delta T^*}{T} \left( -\frac{d\delta L_C}{dM_r} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F}'_{C\perp} \right) dM_r, \quad (4.125)$$

y  $\sigma_R$  es la parte real de la autofrecuencia. Se ha despreciado la integral de superficie  $\int_S \mathbf{F}_W \cdot d\mathbf{S}$ , que representa la pérdida de energía por la onda evanescente que se propaga hacia el exterior de la zona donde está atrapada.

En las ecuaciones (4.123)-(4.125) aparece el complejo conjugado de  $\delta T$  debido a que se ha integrado sobre el periodo de una oscilación. En adelante, sin embargo, consideraremos que los autovalores y las autofunciones adiabáticas son reales, lo que es cierto en la mayoría de los casos. Entonces, por ejemplo, se puede escribir  $\delta T^* \delta T$  como  $(\delta T)^2$ .

## 4.7. Mecanismos de excitación

Con el objeto de mostrar de forma cualitativa la naturaleza de los mecanismos de excitación y amortiguamiento de las oscilaciones no radiales, se analizará la integral de trabajo en las aproximaciones quasiadiabática y de Cowling.

En el análisis quasiadiabático, la integral  $W$  se estima utilizando autofunciones y autovalores adiabáticos. En esta aproximación, la ecuación (4.123) se reduce a:

$$W_N = \frac{\pi}{\sigma} \int_0^R \varepsilon_N \frac{\varepsilon_{\text{ad}}}{\nabla_{\text{ad}}} \left( \frac{\delta T}{T} \right)^2 4\pi r^2 \rho dr = \frac{\pi}{\sigma} \int_0^R \varepsilon_N \left( \varepsilon_T + \frac{\varepsilon_\rho}{\Gamma_3 - 1} \right) \left( \frac{\delta T}{T} \right)^2 4\pi r^2 \rho dr. \quad (4.126)$$

Esta ecuación muestra que la dependencia de la tasa de generación de energía nuclear con la densidad y la temperatura (ambas son positivas) siempre tiene un efecto desestabilizador. Esta excitación se denomina “*mecanismo  $\varepsilon$* ”.

Se puede modificar la expresión de  $W_F$  de forma que todos los términos sean proporcionales a  $(\delta T/T)^2$  o a  $[d(\delta T/T)/dr]^2$ , quedando de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\pi} W_F \simeq & -\frac{1}{2} \left[ \alpha_1 L_R \left( \frac{\delta T}{T} \right)^2 \right]_{r=R} - \frac{1}{2} \int_0^R dr \left( \frac{\delta T}{T} \right)^2 \frac{d}{dr} (\alpha_1 L_R) \\ & + \int_0^R dr L_R \frac{H_p}{\nabla_{\text{ad}}} \left( \frac{\nabla - \nabla_{\text{ad}}}{\nabla} - \frac{c_1 \omega^2 - U}{\alpha_0} \right) \left\{ \left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{\delta T}{T} \right) \right]^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \left( \frac{\delta T}{T} \right)^2 \right\} \\ & + \ell(\ell+1) \int_0^R dr \left( \frac{\delta T}{T} \right)^2 \frac{1}{\nabla_{\text{ad}}} \left[ \frac{4-V}{\alpha_0 V} \left( \frac{1}{c_1 \omega^2} \frac{dL_r}{dr} - \frac{L_R}{r} \right) \right. \\ & \left. + \frac{c_1 \omega^2 - U}{c_1 \omega^2 \alpha_0 V} \frac{dL_r}{dr} + \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left( \frac{c_1 \omega^2 L_R - dL_r / d \ln r}{c_1 \omega^2 \alpha_0 V} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.127)$$

donde:

$$\alpha_0 \equiv 4 - U - \frac{\ell(\ell+1)}{c_1 \omega^2} + c_1 \omega^2, \quad (4.128)$$

$$\alpha_1 \equiv 4 - \frac{1}{\nabla_{\text{ad}}} - \kappa_T - \frac{\kappa_\rho}{\Gamma_3 - 1} + \left( 1 - \frac{L_\ell}{\Gamma_1 \sigma^2} \right) \left( \frac{c_1 \omega^2 - U}{\alpha_0 \nabla_{\text{ad}}} \right), \quad (4.129)$$

y  $L_r$  y  $L_R$  son, respectivamente, la luminosidad total y la radiativa en  $r$ . Los dos primeros términos de la derecha describen el “*mecanismo  $\kappa$* ”. En la zona externa de la envoltura en equilibrio radiativo,  $L_R$  es constante y el mecanismo  $\kappa$  trabaja excitando la oscilación si:

$$\frac{d}{dr} \left( \kappa_T + \frac{\kappa_\rho}{\Gamma_3 - 1} \right) > 0. \quad (4.130)$$

Si una región de la envoltura estelar satisface esta condición, el flujo radiativo que proviene del interior estelar queda bloqueado como consecuencia de la dependencia de la opacidad con la temperatura y la densidad. Esta energía se transforma en energía de oscilación. El valor de  $\kappa_T$  aumenta en la parte interna de la zona de ionización y disminuye en la externa. Por tanto, las zonas de excitación y de amortiguamiento debidas al mecanismo  $\kappa$  están localizadas en las partes interna y externa de las zonas de ionización, respectivamente. En estas capas el exponente adiabático ( $\Gamma_3 - 1$ ) es mínimo. Esta variación espacial de ( $\Gamma_3 - 1$ ) aumenta el efecto del mecanismo  $\kappa$ , y se denomina “*mecanismo  $\gamma$* ”.

## Capítulo 5

# Oscilaciones adiabáticas con rotación

La rotación modifica las condiciones de propagación de las ondas, y por tanto, altera las frecuencias propias de la estrella. La fuerza centrífuga, combinada con un efecto puramente geométrico, provoca la aparición de multipletes, compuestos por modos prógrados, tesorales y retrógrados, lo que conlleva la aparición de nuevas frecuencias en el espectro de oscilación observado. Si la velocidad de rotación angular,  $\Omega$ , no tiene dependencia con la latitud, y es lo suficientemente pequeña, su estructura es simétrica. Este fenómeno es comparable a los multipletes atómicos explicados por el efecto Zeeman. Para una rotación más rápida, los efectos cuadráticos en  $\Omega$  son importantes y provocan una ruptura de la simetría. Esta modificación de la forma del espectro de oscilación puede ser crucial para una identificación correcta de los modos (Dziembowski y Goode, 1992). Además, la posición de la frecuencia del modo tesimal no coincide con la de los modelos sin rotación. Esto se debe a la variación producida en la estructura de la estrella a causa de la aceleración centrífuga, pasando de tener forma de esfera a otra de esferoide de revolución. Para velocidades de rotación entre los 80 y los 150 km/s, el método perturbativo (hasta segundo orden) que se usa en este trabajo es aún válido. En particular, se tiene en cuenta el desplazamiento global de los multipletes debido al efecto medio de la fuerza centrífuga sobre la estructura, que se traduce en una expansión del radio medio de la estrella. Asimismo, el cambio de forma de ésta provoca una asimetría entre los modos de orden azimutal no nulo ( $m \neq 0$ ). Por otra parte, una última consecuencia importante es la aparición del fenómeno conocido como *degeneración accidental rotacional*: ciertos modos con frecuencias próximas entre sí no pueden describirse individualmente con un sólo armónico esférico. Por ello, bajo ciertas condiciones (reglas de selección sobre el grado  $\ell$  y el orden azimutal  $m$ ), dos modos con frecuencias próximas se verán “acoplados”, y éstas sufrirán un desplazamiento con respecto a su valor cuando no existe degeneración.

En la literatura podemos encontrar diferentes trabajos que tratan estas correcciones de segundo orden bajo distintas aproximaciones. Por una parte, Saio (1981) incluyó en la determinación de las frecuencias de los multipletes dichas correcciones para el caso de una rotación de un cuerpo rígido, modelado como un polítropo. Por otra parte, Gough y Thompson (1990) incluyeron el campo magnético y el desplazamiento global de las frecuencias, despreciando la dependencia latitudinal de la rotación. Sin embargo, dicho tratamiento sólo es válido para el caso de una velo-

cidad de rotación lenta. Más recientes son los trabajos de Dziembowski y Goode (1992) y Soufi et al. (1998), que proponen formalismos para estudiar objetos con rotación más rápida. El primero acomete el estudio de los modos propios del Sol en presencia de degeneración accidental por rotación (a primer orden). En el segundo trabajo se desarrolla un formalismo completo hasta tercer orden. Sin embargo, éste posee la desventaja de que las correcciones a los distintos órdenes no se encuentran separadas, lo que hace difícil su estudio. A este respecto, Suárez (2002) y Suárez et al. (2006) proponen un formalismo completo hasta segundo orden (teniendo en cuenta los efectos de la degeneración accidental por rotación también hasta segundo orden), incluyendo un perfil de rotación diferencial radial. En Suárez et al. (2006) se lleva a cabo además un estudio teórico del efecto de la rotación diferencial sobre las oscilaciones adiabáticas para estrellas de masa intermedia y con rotación moderada, y se concluye que dichos efectos pueden ser del orden de varios  $\mu\text{Hz}$ , por lo que se espera que sean detectados mediante observaciones espaciales, como las de la misión **COROT**.

En este capítulo presentaremos brevemente la teoría de las oscilaciones adiabáticas cuando se usa la aproximación de pseudorotación. Expondremos el desarrollo perturbativo hasta segundo orden, analizando la forma de las correcciones a las frecuencias y las autofunciones. Presentaremos los últimos resultados conocidos, basados en estudios numéricos, sobre la influencia de la rotación sobre las oscilaciones adiabáticas, centrándonos en las diferencias encontradas entre los casos de rotación uniforme y diferencial. Posteriormente desarrollaremos el formalismo de la degeneración accidental, también hasta segundo orden, exponiendo asimismo los resultados más recientes obtenidos hasta la fecha a partir de estudios teóricos. Terminaremos presentando unos nuevos coeficientes que serán de gran utilidad en este trabajo, denominados *coeficientes de contaminación*, y que utilizaremos en los capítulos posteriores.

A lo largo de todo el capítulo seguiremos fundamentalmente los desarrollos presentados en Soufi et al. (1998), Suárez (2002) y Suárez et al. (2006).

## 5.1. Ecuaciones de oscilación en presencia de rotación

En el caso de que se hallen presentes las fuerzas centrífuga y de Coriolis, la autofrecuencia,  $\sigma$ , y las autofunciones asociadas,  $\boldsymbol{\xi}$ , deben satisfacer la siguiente ecuación (Dziembowski y Goode, 1992):

$$(\mathcal{L}_0 - \rho \hat{\sigma}^2) \boldsymbol{\xi} + 2\rho \hat{\sigma} \Omega \mathbf{K} \boldsymbol{\xi} + \rho (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \Omega^2) r \sin \theta \mathbf{e}_s = 0, \quad (5.1)$$

donde  $\hat{\sigma} = \sigma + m\Omega$  y  $\mathbf{K} = i\mathbf{e}_z \times$  (Soufi et al., 1998); el operador  $\mathcal{L}_0$  se define como:

$$\mathcal{L}_0 \equiv \nabla p' + \rho' (\nabla \Phi - \Omega^2 r \sin \theta \mathbf{e}_s) + \rho \nabla \Phi', \quad (5.2)$$

siendo  $\rho$ ,  $p$ ,  $\Phi$ , ... las magnitudes en equilibrio, y  $\rho'$ ,  $p'$ ,  $\Phi'$ , ... las perturbaciones Eulerianas en presencia de rotación, dadas, en términos de  $\boldsymbol{\xi}$ , por (Soufi et al., 1998):

$$\rho' = -\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{\xi}), \quad (5.3)$$

$$p' = -p\Gamma_1 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p, \quad (5.4)$$

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho', \quad (5.5)$$

donde  $\Gamma_1$  es el exponente adiabático.  $\xi$  representa el desplazamiento del fluido Lagrangiano, el cual se supone de la forma:

$$\xi \propto \exp[i(\sigma t + m\varphi)], \quad (5.6)$$

de modo que  $m < 0$  representa los modos prógrados.

El tratamiento de Dziembowski y Goode (1992) consiste en obtener las frecuencias de oscilación mediante un método perturbativo que tiene en cuenta los efectos de la rotación hasta segundo orden. Para ello, las magnitudes oscilantes y de equilibrio se desarrollan en serie con respecto a las variables:

$$\epsilon \equiv \frac{\Omega}{(GM/R^3)^{1/2}}, \quad (5.7)$$

$$\mu \equiv \frac{\Omega}{\sigma_0}, \quad (5.8)$$

donde  $\sigma_0$  es la frecuencia de oscilación en ausencia de rotación, mientras que  $R$  y  $M$  representan el radio estelar y la masa del modelo, respectivamente.

El cociente  $\mu$  puede interpretarse como una medida del efecto de la fuerza de Coriolis sobre las frecuencias, mientras que  $\epsilon$  mide el cociente entre la aceleración centrífuga y la gravedad en el ecuador. El método perturbativo requiere que la rotación sea suficientemente lenta comparada con el periodo de oscilación, esto es:  $\mu \ll 1$ . Nótese que  $\mu/\epsilon = 1/\omega_0$ , donde  $\omega_0 \equiv \sigma_0 R^{3/2}/(GM)^{1/2}$  es la frecuencia adimensional de oscilación en ausencia de rotación. Se puede comprobar que el efecto de la fuerza de Coriolis decrece conforme aumenta la frecuencia, y en consecuencia, conforme aumenta el orden,  $n$ , del modo, manteniendo  $\ell$  constante. Para las frecuencias de interés en estrellas  $\delta$  Scuti,  $\omega_0 \sim 3 - 10$ , lo que implica que  $\mu/\epsilon \sim 1$  para órdenes radiales bajos, y  $\mu/\epsilon \ll 1$  para órdenes altos.

La frecuencia  $\sigma$  se obtendrá como la frecuencia sin rotación  $\sigma_0$  (orden cero), corregida con los efectos rotacionales:

$$\sigma = \sigma_0 + \delta\sigma. \quad (5.9)$$

### 5.1.1. Estructura de equilibrio de los modelos rotantes

Usando las expresiones para la fuerza centrífuga (2.97) y (2.98), podemos escribir la ecuación de equilibrio hidrostático (2.95) como:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \rho \mathcal{A}_r(r)(1 - P_2(\cos \theta)), \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \rho \frac{1}{3} r^2 \Omega^2 \frac{dP_2}{d \cos \theta}, \quad (5.11)$$

donde  $\mathcal{A}_r(r)$  es la componente radial de la aceleración centrífuga, definida en la Ec. (2.98).

Este sistema de ecuaciones puede ser resuelto desarrollando las magnitudes en equilibrio en términos de los polinomios de Legendre:

$$p(r, \theta) = \tilde{p}(r) + \epsilon^2 p_2 = \tilde{p}(r) + \epsilon^2 p_{22} P_2(\cos \theta), \quad (5.12)$$

e igual para  $\rho$  y  $\Phi$ . En esta ecuación,  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{\rho}$  y  $\tilde{\Phi}$  representan las componentes esféricamente simétricas de la presión, densidad y potencial gravitatorio, respectivamente, las cuales incluyen la perturbación esféricamente simétrica inducida por la rotación.

La presión  $\tilde{p}$  se puede obtener a partir de la parte independiente de  $\theta$  de la ecuación (5.10):

$$\frac{d\tilde{p}}{dr} = -\tilde{\rho}g_e, \quad (5.13)$$

donde:

$$g_e = \tilde{g} - A_r(r) \quad (5.14)$$

y

$$\tilde{g} = \frac{d\tilde{\Phi}}{dr} = \frac{GM_r}{r^2}, \quad (5.15)$$

siendo  $M_r$  la masa contenida en una esfera de radio  $r$ .

La ecuación (5.13) es la ecuación de equilibrio hidrostático de una estrella esféricamente simétrica, y por tanto es similar a la de una estrella no rotante. En una primera aproximación, las otras ecuaciones de estructura interna no se modifican, por lo que el código de evolución usual ha de modificarse únicamente de acuerdo a (5.13), razón por la cual a esta aproximación se le denomina *pseudorotación*.

### 5.1.2. Distorsión no esféricamente simétrica

Sustituyendo los desarrollos dados por (5.12) en (5.10) y (5.11), se obtienen las correspondientes ecuaciones para  $p_{22}(r)$ ,  $\rho_{22}(r)$  y  $\Phi_{22}(r)$ , hasta segundo orden en  $\epsilon^2$ :

$$p_{22} = -\tilde{\rho}r^2\bar{\Omega}^2u_2, \quad (5.16)$$

$$\rho_{22} = \frac{\tilde{\rho}r\bar{\Omega}^2}{\tilde{g}} \left( \frac{d \ln \tilde{\rho}}{d \ln r} u_2 + b_2 \right), \quad (5.17)$$

donde:

$$u_2 = \frac{\Phi_{22}}{r^2\bar{\Omega}^2} + \frac{1}{3}(1 + \eta_2), \quad (5.18)$$

$$b_2 = \frac{1}{3}r \frac{d\eta_2}{dr}, \quad (5.19)$$

siendo:  $\eta_2 = \eta(\eta + 2)$ . Recordemos que  $\eta$  y  $\bar{\Omega}$  vienen dadas por:

$$\Omega(r) = \bar{\Omega} [1 + \eta(r)]. \quad (5.20)$$

La perturbación del potencial gravitatorio,  $\Phi_{22}$ , se obtiene integrando la ecuación de Poisson perturbada:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi_{22}(r)}{dr} \right) - \frac{6}{r^2} \Phi_{22}(r) = 4\pi G \rho_{22}(r), \quad (5.21)$$

con las condiciones de contorno apropiadas:

$$\Phi_{22} \propto r^2, \quad r \rightarrow 0 \quad (5.22)$$

$$\Phi_{22} \propto r^3, \quad r \rightarrow R. \quad (5.23)$$

### 5.1.3. Formalismo perturbativo hasta segundo orden

Al igual que se hizo con las cantidades en equilibrio en la ecuación (5.12), podemos desarrollar el sistema (5.1)-(5.3) hasta segundo orden en  $\epsilon$ :

$$p' = \tilde{p}' + p'_2, \quad (5.24)$$

$$\rho' = \tilde{\rho}' + \rho'_2, \quad (5.25)$$

$$\Phi' = \tilde{\Phi}' + \Phi'_2, \quad (5.26)$$

donde:

$$\tilde{p}' = -\Gamma_1 p \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p, \quad (5.27)$$

$$p'_2 = -(\Gamma_1 p)_2 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_2, \quad (5.28)$$

y

$$\tilde{\rho}' = -\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{\xi}), \quad \rho'_2 = -\nabla \cdot (\rho_2 \boldsymbol{\xi}), \quad (5.29)$$

$$\nabla^2 \tilde{\Phi}' = 4\pi G \tilde{\rho}', \quad \nabla^2 \phi'_2 = 4\pi G \rho'_2. \quad (5.30)$$

La ecuación de oscilación (5.1) entonces pasa a ser:

$$(\mathcal{L}_0 - \rho \hat{\sigma}^2) \boldsymbol{\xi} + 2\rho \hat{\sigma} \Omega \mathbf{K} \boldsymbol{\xi} + (\mathcal{L}_2 - \rho_2 \hat{\sigma}^2) \boldsymbol{\xi} = 0, \quad (5.31)$$

donde:

$$\mathcal{L}_0 \boldsymbol{\xi} = \nabla p' + \rho' \left( \nabla \Phi - \frac{2}{3} r \Omega^2 \mathbf{e}_r \right) + \rho \nabla \Phi', \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \boldsymbol{\xi} &= \nabla p'_2 - \frac{\rho'}{\rho} \left( \frac{\rho_2}{\rho} \nabla p - \nabla p_2 \right) - \frac{\rho'_2}{\rho} \nabla p + \rho_2 \nabla \Phi' \\ &+ \rho \nabla \Phi'_2 + \rho \mathbf{e}_s r \sin \theta \nabla \Omega^2 \cdot \boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

En todas las expresiones anteriores se ha considerado que las magnitudes en equilibrio están referidas a un modelo pseudorotante. En particular, el gradiente  $\nabla p$  debe satisfacer la ecuación (5.13). Como no existe ambigüedad, se han omitido las tildes de estas cantidades.

Ahora deben añadirse las condiciones de contorno. Dado que la rotación no las modifica, se pueden seguir utilizando las de la Sec. 3.3.2. El sistema completo (ecuaciones y condiciones de contorno) constituye un problema de autovalores, como veremos en la Sec. 5.1.4.

La perturbación en el desplazamiento se introduce mediante el desarrollo hasta primer orden:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 + \boldsymbol{\xi}_1, \quad (5.34)$$

donde  $\boldsymbol{\xi}_0$  corresponde a la autofunción no perturbada, definida como:

$$\boldsymbol{\xi}_0 = r [y_{01} Y_\ell^m \mathbf{e}_r + z_0 \nabla_H Y_\ell^m], \quad (5.35)$$

y  $\boldsymbol{\xi}_1$  es la corrección a primer orden:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{2m\bar{\Omega}}{\sigma_0} r [y_1 Y_\ell^m \mathbf{e}_r + z_1 \nabla_H Y_\ell^m + \tau_{\ell+1}(r) \mathbf{e}_r \times \nabla_H Y_{\ell+1}^m + \hat{\tau}_{\ell-1}(r) \mathbf{e}_r \times \nabla_H Y_{\ell-1}^m]. \quad (5.36)$$

Las autofunciones radiales toroidales  $\tau_{\ell+1}$  y  $\hat{\tau}_{\ell-1}$  vienen dadas por:

$$\tau_{\ell+1} = -\frac{i}{(\ell+1)}(y_{01} - \ell z_0)\gamma_{\ell+1}, \quad (5.37)$$

$$\hat{\tau}_{\ell-1} = \frac{i}{\ell}(y_{01} - (\ell+1)z_0)\gamma_{\ell}, \quad (5.38)$$

y:

$$\gamma_{\ell} = \sqrt{\frac{\ell^2 - m^2}{4\ell^2 - 1}}. \quad (5.39)$$

El gradiente horizontal  $\nabla_H$  se define como:

$$\nabla_H \equiv \frac{\partial}{\partial\theta}e_{\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}e_{\phi}, \quad (5.40)$$

y las funciones  $y_{01}$ ,  $z_0$ ,  $y_1$  y  $z_1$  se definen en la siguiente sección. La autofunción asociada con cada modo se etiqueta mediante los subíndices  $n$ ,  $\ell$ ,  $m$ , que representan respectivamente el orden radial, el grado y el orden azimutal.

#### 5.1.4. Frecuencias de oscilación de un modelo pseudorotante

A continuación vamos a derivar las ecuaciones de oscilación de un modelo pseudorotante. Para ello seguiremos el desarrollo de Unno et al. (1989). Definiendo las cantidades adimensionales (Soufi et al., 1998):

$$y_{01} = \frac{\xi_r}{r}, \quad (5.41)$$

$$y_{02} = \frac{1}{g_e r} \left( \Phi' + \frac{p'}{\rho} \right), \quad (5.42)$$

$$y_{03} = \frac{\Phi'}{g_e r}, \quad (5.43)$$

$$y_{04} = \frac{1}{g_e} \frac{d\Phi'}{dr}, \quad (5.44)$$

se llega al siguiente conjunto de ecuaciones linealizadas:

$$x \frac{dy_{01}}{dx} = \lambda - 3y_{01} + \frac{\Lambda}{C_r \omega_0^2} y_{02}, \quad (5.45)$$

$$x \frac{dy_{02}}{dx} = (C_r \omega_0^2 - A^*)y_{01} + (A^* + 1 - U_{\chi})y_{02} - A^*y_{03}, \quad (5.46)$$

$$x \frac{dy_{03}}{dx} = (1 - U_{\chi})y_{03} + y_{04}, \quad (5.47)$$

$$x \frac{dy_{04}}{dx} = \frac{U}{1 - \omega_r} [A^*y_{01} + V_g(y_{02} - y_{03})] + \Lambda y_{03} - U_{\chi}y_{04}, \quad (5.48)$$

donde  $x = r/R$ . En las expresiones anteriores se han utilizado las cantidades:

$$\begin{aligned}
A^* &= \frac{1}{\Gamma} \frac{d \ln p}{d \ln r} - \frac{d \ln \rho}{d \ln r}, & V &= -\frac{d \ln p}{d \ln r}, & V_g &= \frac{V}{\Gamma_1}, \\
U &= \frac{d \ln M_r}{d \ln r}, & \Lambda &= \ell(\ell + 1), & U_\chi &= U + \chi, \\
\chi &= \frac{\mathcal{A}_r}{g_e} \left( U - 3 + \frac{d\Omega^2/\bar{\Omega}^2}{dr} \right), & C &= \left( \frac{r}{R} \right)^3 \frac{M}{M_r}, & C_r &= \frac{C}{1 - \omega_r}, \\
\omega_0^2 &= \frac{\sigma_0^2 R^3}{GM}, & \omega_r &= \frac{\mathcal{A}_r}{g}, & \lambda &= V_g (y_{01} - y_{02} + y_{03}).
\end{aligned} \tag{5.49}$$

$\mathcal{A}_r$  es la componente radial de la aceleración centrífuga (2.98);  $M$  y  $M_r$  son la masa estelar y la masa encerrada en una esfera de radio  $r$ , respectivamente. Este sistema se resuelve junto con las condiciones de contorno siguientes:

$$\left. \begin{aligned}
y_{02} + y_{01} \frac{3}{V_g} &= 0 \\
3y_{01} + y_{04} &= 0
\end{aligned} \right\} (\ell = 0) \tag{5.50}$$

$$\left. \begin{aligned}
y_{01} - y_{02} \frac{\ell}{C_r \omega_0^2} &= 0 \\
y_{04} - \ell y_{03} &= 0
\end{aligned} \right\} (\ell \neq 0) \tag{5.51}$$

$$\tag{5.52}$$

en el centro de la estrella, y:

$$y_{01} = 1 \quad (\text{normalización}) \tag{5.53}$$

$$y_{04} + (\ell + 1)y_{03} = 0 \tag{5.54}$$

$$y_{01} \left( 1 + \frac{\Lambda}{VC\omega_0^2} - \frac{4 + C\omega_0^2}{V} \right) - y_{02} + y_{03} \left( 1 + \frac{\Lambda}{VC\omega_0^2} - \frac{\ell + 1}{V} \right) = 0 \tag{5.55}$$

en la superficie estelar.

Los autovalores resultantes corresponden a las frecuencias de oscilación del modelo pseudorotante, con las autofunciones asociadas.

### Autofunciones perturbadas a primer orden

Considerando las variables adimensionales equivalentes a (5.41)-(5.44), con las cantidades perturbadas a primer orden  $(\xi_{1,r}, \Phi'_1, p'_1)$ , y las soluciones a orden cero obtenidas de (5.45)-(5.48), las autofunciones perturbadas a primer orden pueden calcularse a partir del siguiente sistema:

$$x \frac{dy_1}{dx} = \lambda_1 - 3y_1 + \frac{\Lambda}{C_r \omega_0^2} y_2 + (y_{01} + z_0)(1 + \eta_0) - (\eta_0 + C_L - J_0)\Lambda z_0, \tag{5.56}$$

$$\begin{aligned}
x \frac{dy_2}{dx} &= (C_r \omega_0^2 - A^*) y_1 + (A^* + 1 - U_\chi) y_2 - A^* y_3 + (C_L - J_0 + \eta_0) y_{01} \\
&\quad - (1 + \eta_0) z_0,
\end{aligned} \tag{5.57}$$

$$x \frac{dy_3}{dx} = (1 - U_\chi) y_3 + y_4, \tag{5.58}$$

$$x \frac{dy_4}{dx} = \frac{U}{1 - \omega_r} [A^* y_1 + V_g y_2 - V_g y_3] + \Lambda y_3 - U_\chi y_4, \tag{5.59}$$

donde  $\lambda_1 = V_g(y_1 - y_2 + y_3)$ , y:

$$z_0 = \frac{y_{02}}{C\omega_0^2}. \quad (5.60)$$

La componente horizontal de  $\boldsymbol{\xi}_1$  puede escribirse como:

$$z_1 = \frac{y_2}{C\omega_0^2} + \frac{1 + \eta_0}{\Lambda} y_{01} + \left( \frac{1 + \eta_0}{\Lambda} - C_L + J_0 \right) z_0, \quad (5.61)$$

donde se definen:

$$C_L = \frac{1}{I_0} \int_0^R [2y_{01}z_0 + z_0^2] \rho_0 r^4 dr, \quad (5.62)$$

$$J_0 = \frac{1}{I_0} \int_0^R \eta_0(r) [y_{01}^2 + \Lambda z_0^2 - 2y_{01}z_0 - z_0^2] \rho_0 r^4 dr, \quad (5.63)$$

siendo  $I_0$  el momento de inercia, dado por:

$$I_0 = \int_0^R [y_{01}^2 + \Lambda z_0^2] \rho_0 r^4 dr. \quad (5.64)$$

## 5.2. Correcciones a las frecuencias

Despreciando los efectos de la interacción resonante debida a la degeneración accidental (ver Sec. 5.4), la frecuencia de un multiplete de grado  $\ell$  y orden radial  $n$  se puede escribir como:

$$\sigma_m = \sigma_0 + \sigma_{1,m} + \sigma_{2,m}, \quad (5.65)$$

donde se han omitido los índices  $n, \ell$ .

La contribución de orden cero,  $\sigma_0$ , representa la frecuencia del modo cuando se ignoran todos los efectos de la rotación excepto el promedio horizontal de la fuerza centrífuga del modelo de equilibrio (a ésta la denominaremos en adelante como ‘frecuencia no perturbada’). Los otros dos términos,  $\sigma_{1,m}$  y  $\sigma_{2,m}$ , representan las correcciones a primer y segundo orden, respectivamente, y vienen dados por:

$$\sigma_{1,m} = m\bar{\Omega}(C_L - 1 - J_0), \quad (5.66)$$

$$\sigma_{2,m} = \frac{\bar{\Omega}^2}{\sigma_0} [D_0 + m^2 D_1]. \quad (5.67)$$

Los coeficientes de segundo orden  $D_0$  y  $D_1$  tienen en cuenta la no esfericidad debida a la fuerza centrífuga. La simetría del desdoblamiento de los multipletes se rompe debido a la dependencia en  $m^2$ . Estos coeficientes pueden ser reescritos en la notación de Saio (1981):

$$D_0 \equiv X_1 + X_2, \quad (5.68)$$

$$D_1 \equiv Y_1 + Y_2. \quad (5.69)$$

Comparando la ecuación (5.67) con la formulación de Dziembowski y Goode (1992), se obtienen las siguientes relaciones:

$$\sigma_0 \left( \frac{\bar{\Omega}}{\sigma_0} \right)^2 (X_1 + m^2 Y_1) = \sigma_2^T + \sigma_2^I + \frac{\sigma_1^2}{2\sigma_0} + \sigma_2^P \quad (5.70)$$

para  $X_1$  e  $Y_1$ , y:

$$\sigma_0 \left( \frac{\bar{\Omega}}{\sigma_0} \right)^2 (X_2 + m^2 Y_2) = \sigma_2^D \quad (5.71)$$

para  $X_2$  e  $Y_2$ . Los términos  $\sigma_2^T$ ,  $\sigma_2^I$ ,  $\sigma_2^P$  y  $\sigma_2^D$  representan las diferentes contribuciones a las frecuencias a segundo orden. Estas incluyen los efectos de la parte simétrica de la fuerza centrífuga;  $\sigma_2^P$  y  $\sigma_2^T$  representan las componentes poloidal y toroidal, respectivamente;  $\sigma_2^D$  introduce la distorsión provocada por la fuerza centrífuga;  $\sigma_2^I$  reúne todos los términos que surgen de los efectos de inercia de segundo orden. A continuación mostramos las expresiones de estas correcciones:

$$\sigma_2^D = \frac{1}{2\sigma_0} \langle \boldsymbol{\xi}_0 | (\mathcal{L}_2 - \sigma_0 \rho_2) | \boldsymbol{\xi}_0 \rangle, \quad (5.72)$$

$$\sigma_2^I = \frac{1}{2\sigma_0} \int [-m^2 \Omega^2 |\boldsymbol{\xi}_0|^2 + 2im\Omega^2 \boldsymbol{\xi}_0^* \cdot (\mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\xi}_0) \quad (5.73)$$

$$+ (\boldsymbol{\xi}_0 \cdot \mathbf{e}_s)(\boldsymbol{\xi}_0 \cdot \nabla \Omega^2) r \sin \theta] \rho d^3 \mathbf{x}, \quad (5.74)$$

$$\sigma_2^T = -\langle \boldsymbol{\xi}_0 | \mathcal{K} | \boldsymbol{\xi}_1^T \rangle, \quad (5.75)$$

$$\sigma_2^P = -\langle \boldsymbol{\xi}_0 | \mathcal{K} | \boldsymbol{\xi}_1^P \rangle, \quad (5.76)$$

donde:

$$\mathcal{K} = m\Omega - i\Omega \mathbf{e}_z \times . \quad (5.77)$$

Pasamos también a detallar las expresiones analíticas de  $X_i$  e  $Y_i$ . Para ello, es conveniente separarlas de la siguiente manera:

$$X_1 = X_1^I + X_1^T, \quad (5.78)$$

$$Y_1 = Y_1^I + Y_1^T + Y_1^P + Y_1^0. \quad (5.79)$$

Estos dos términos incluyen, de una parte, la componente toroidal de la perturbación a primer orden, y por otro lado, un efecto de inercia. Las diferentes componentes de  $X_1$  vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$X_1^I = \frac{1}{(8\Lambda - 6)I_0} \int_0^R b_2 [2(\Lambda - 1)y_{01}^2 - \Lambda y_{01}z_0] \rho_0 r^4 dr, \quad (5.80)$$

$$X_1^T = \frac{2}{I_0} \int_0^R (1 + \eta_0)^2 \left[ (y_{01} - \ell z_0)^2 \frac{(\ell + 1)(\ell + 2)}{4(\ell + 1)^2 - 1} \right. \quad (5.81)$$

$$\left. + (y_{01} + (\ell + 1)z_0)^2 \frac{\ell(\ell - 1)}{4\ell^2 - 1} \right] \rho_0 r^4 dr.$$

Las componentes de  $Y_1$  se expresan de la siguiente manera:

$$Y_1^I = C_L - \frac{1}{2} - \frac{1}{2I_0} \int_0^R \eta_2 [y_{01}^2 + (\Lambda - 2)z_0^2 - 4y_{01}z_0] \rho_0 r^4 dr, \quad (5.82)$$

$$Y_1^T = -\frac{2}{I_0} \int_0^R (1 + \eta_0)^2 \left[ (y_{01} - \ell z_0)^2 \frac{\ell + 2}{\ell + 1} \frac{1}{4(\ell + 1)^2 - 1} \right. \quad (5.83)$$

$$\left. + (y_{01} + (\ell + 1)z_0)^2 \frac{\ell - 1}{\ell} \frac{1}{4\ell^2 - 1} \right] \rho_0 r^4 dr,$$

$$Y_1^P = \frac{2}{I_0} \int_0^R (1 + \eta_0) [z_0 y_1 + z_1 y_{01} - y_{01} y_1 - (\Lambda - 1)z_1 z_0] \rho_0 r^4 dr, \quad (5.84)$$

$$Y_1^0 = \frac{1}{2} (C_L - J_0 - 1)^2. \quad (5.85)$$

Más aún,  $X_2$  e  $Y_2$  contienen los efectos de la deformación de la estrella debida a la componente no esférica de la aceleración centrífuga, y vienen dados por:

$$X_2 = \frac{\Lambda}{4\Lambda - 3} \mathcal{J}_c, \quad (5.86)$$

$$Y_2 = \frac{-3}{4\Lambda - 3} \mathcal{J}_c, \quad (5.87)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_c = & \frac{1}{2I_0} \int_0^R \left\{ C\omega_0^2 \left[ (2y_{01}^2 + 3z_0^2) \left( r \frac{du_2}{dr} + (4 - U)u_2 \right) + 2z_0^2 \Lambda u_2 + z_0 y_{01} (\Psi_1 + 6u_2) \right] \right. \\ & + y_{01} (\lambda - y_{01}(A^* + V_g)) U u_2 - y_{01} y_{03} (\Psi_1 + 2\Lambda u_2) \\ & - y_{01} y_{04} \left( 3r \frac{du_2}{dr} + u_2(10 - 3U) \right) - 2z_0 y_{04} \Lambda u_2 \\ & - \left[ y_{01}^2 (C\omega_0^2 + 3 - U) + z_0^2 C\omega_0^2 (\Lambda - 3) + 3z_0 y_{01} - 2y_{01} y_{04} - 2z_0 y_{03} (\Lambda - 3) \right] b_2 \\ & \left. - y_{01}^2 r \frac{db_2}{dr} \right\} \rho_0 r^4 dr, \end{aligned} \quad (5.88)$$

y  $u_2$ ,  $b_2$  y  $\eta_2$  se definieron en la Sec. 5.1.2.

### 5.3. Efectos de la rotación diferencial sobre las frecuencias

Mostramos a continuación los resultados más recientes que se han obtenido en el estudio teórico de las oscilaciones adiabáticas con rotación para estrellas de masa intermedia y rotación moderada. En concreto, vamos a sintetizar los principales efectos de ésta sobre las oscilaciones adiabáticas corregidas del efecto de la rotación hasta segundo orden, descritos en el trabajo de Suárez et al. (2006). En él, los autores utilizan modelos en pseudorotación (descritos en la Sec. 5.1.1), suponiendo dos hipótesis sobre el tipo de rotación: diferencial (conservación local del momento angular) y uniforme (conservación global, transferencia instantánea de momento). Estas dos hipótesis fueron descritas en la Sec. 2.5. Por conveniencia, emplearemos la siguiente notación:  $\sigma_0^L$  y  $\sigma_0^G$  representan las frecuencias a orden cero,  $\sigma_1^L$  y  $\sigma_1^G$ , las correcciones a primer orden, y  $\sigma_2^L$  y  $\sigma_2^G$ , las correcciones a segundo orden.  $L$  representa rotación diferencial (Conservación Local), y  $G$  la uniforme (Conservación Global). Las diferencias en frecuencia para un modo dado se denotan como:  $\Delta\sigma_j = \sigma_j^L - \sigma_j^G$ , donde  $j = 0, 1, 2$  representa las correcciones a orden cero, uno y dos, respectivamente.

Se encuentra que el comportamiento de las correcciones a las frecuencias es similar para valores de  $\ell$  pequeños ( $\ell \leq 3$ ). Por tanto, nos centramos únicamente en los modos con  $\ell = 1$ . Los resultados se muestran en la figura 5.1.

#### Correcciones a orden cero

Los cálculos a este orden incluyen los efectos de la perturbación esféricamente simétrica de la densidad, la presión y el potencial gravitatorio. Estas perturbaciones están inducidas por la componente esféricamente simétrica de la aceleración

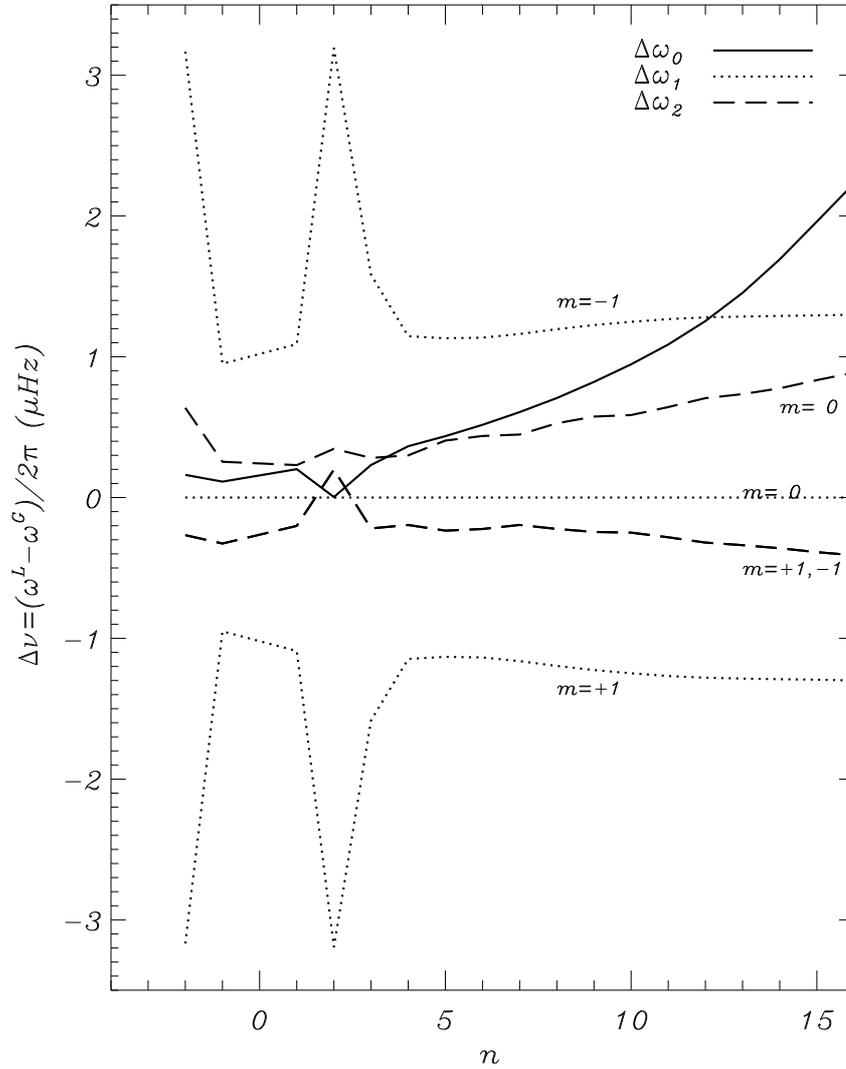


Figura 5.1: Diferencias entre las frecuencias de oscilación  $\nu = \sigma/2\pi$  obtenidas en los casos de rotación uniforme y diferencial, en función del orden radial,  $n$ . Téngase en cuenta que, en la gráfica,  $\omega$  denota la frecuencia adimensional, que en el texto hemos representado mediante  $\sigma$ . Se muestran únicamente las diferencias para los modos con  $\ell = 1$ . Tomado de Suárez et al. (2006).

centrífuga (Soufi et al., 1998). Las autofunciones aún están degeneradas en el orden azimutal  $m$ . Los estudios realizados indican que el efecto de la rotación diferencial sobre las frecuencias a orden cero, son pequeñas, aumentando significativamente con el orden radial  $n$ . Además, para modos **p** de órdenes altos ( $n \geq 12$ ), las diferencias  $\Delta\sigma_0$  son mayores que las correspondientes a primer y segundo orden,  $\Delta\sigma_1$  y  $\Delta\sigma_2$ , siendo por tanto las más sensibles al tratamiento de la rotación.

### Correcciones a primer orden

En este caso se obtiene que los modos mixtos se ven más afectados por la rotación diferencial que los de tipo **p**, alcanzando las diferencias de frecuencias para los

primeros unos valores de hasta  $3\mu\text{Hz}$ . Para órdenes radiales altos, estas diferencias,  $\Delta\sigma_1$ , aunque menores que para los modos mixtos, son significativas, y permanecen estables en torno a  $1\mu\text{Hz}$ . Esto se debe, por un lado, a los efectos del perfil de la velocidad de rotación  $\Omega(r)$  sobre las autofunciones  $y_{01}$  y  $z_0$ , y por otro, a la contribución de  $\eta_0$  sobre  $J_0$ , que se anula en el caso de rotación uniforme. Para modos  $\mathbf{p}$  de órdenes altos no se encuentran diferencias acusadas en las autofrecuencias de los casos uniforme y diferencial. La principal contribución a las diferencias  $\Delta\sigma_1 = 1\mu\text{Hz}$  proviene del incremento en la velocidad de rotación hacia el centro. Los valores negativos de  $J_0$  explican que los valores absolutos de  $\sigma_1$  obtenidos en el caso de rotación diferencial sean menores que los encontrados con rotación uniforme.

### Correcciones a segundo orden

Las correcciones a segundo orden de las frecuencias son menores que las correspondientes a primer orden, excepto para frecuencias altas. Para órdenes bajos ( $n \leq 5$ ),  $\Delta\sigma_2$  es comparable a  $\Delta\sigma_0$ . Además, para  $\ell = 1$  se encuentran distintos comportamientos según sea  $m = \pm 1$  o  $m = 0$ , de manera que los valores para  $m \neq 0$  no son simétricos con respecto a los de  $m = 0$ . La asimetría de los modos con un valor de  $\ell$  dado viene dada por:

$$\sigma_{2,m} + \sigma_{2,-m} - 2\sigma_{2,0} = -\frac{6m^2}{4\Lambda - 3} \frac{\bar{\Omega}^2}{\sigma_0} \mathcal{J}_c, \quad (5.89)$$

Para modos  $\mathbf{p}$  de órdenes altos,  $\mathcal{J}_c$  viene dada, en buena aproximación, por:

$$\mathcal{J}_c \sim \omega_0^2 \langle \mathcal{S}_2 \rangle, \quad (5.90)$$

donde  $\langle \mathcal{S}_2 \rangle$  es un promedio de las perturbaciones de la estructura:

$$\langle \mathcal{S}_2 \rangle = \left\langle \left( r \frac{du_2}{dr} + 4u_2 - b_2 \right) \right\rangle, \quad (5.91)$$

$$\langle \cdot \rangle \sim \frac{\int_0^R \rho r^4 y_{01}^2 \cdot dr}{\int_0^R \rho r^4 y_{01}^2 dr}, \quad (5.92)$$

de donde se obtiene:

$$\sigma_2(\ell = 1, m = 0) \sim \frac{2}{5} \frac{\bar{\Omega}^2}{GM/R^3} \bar{\sigma}_0 \langle \mathcal{S}_2 \rangle, \quad (5.93)$$

lo que explica el incremento de  $\sigma_2$  con  $n$ , a través de la dependencia con  $\sigma_0$ .

En la región de los modos mixtos, las correcciones a primer y segundo orden contribuyen simultáneamente, de forma complicada. Más específicamente,  $X_1^T$  e  $Y_1^P$  son los términos que más influyen sobre los efectos de la distorsión rotacional, lo que lleva a que  $|\sigma_2^I| > |\sigma_2^G|$ . En general,  $\Delta\sigma_2 < \Delta\sigma_1$  en todo el rango considerado. Por tanto, los efectos de la rotación diferencial a segundo orden son mayores para los modos  $\mathbf{p}$  que para los mixtos.

## 5.4. Degeneración accidental

Cuando hay dos o más modos con el mismo orden azimutal, una diferencia de 0 ó 2 en  $\ell$  (reglas de selección), y una diferencia en frecuencias menor o del orden de

$\nu_\Omega$ , la rotación los “acopla”, modificando sus frecuencias. Desde el punto de vista del análisis de los multipletes observados, este efecto puede favorecer o contrarrestar la asimetría de los mismos, lo que conlleva una dificultad añadida.

El tratamiento perturbativo presentado en la secciones anteriores se basa en la hipótesis de que la función propia de oscilación no perturbada de cada modo corresponde a un sólo armónico esférico aislado. Sin embargo, esto no es válido cuando las frecuencias están degeneradas debido a la rotación. Así pues, el formalismo perturbativo ha de ser modificado con el objetivo de incluir este efecto. Para ello nos basamos en los desarrollos de Soufi et al. (1998) y Suárez et al. (2006), adoptando la notación de éste último.

### 5.4.1. Ecuaciones de oscilación en presencia de degeneración

Por simplicidad, presentamos el desarrollo del formalismo únicamente para el caso de dos modos acoplados, ya que el tratamiento para tres o más modos es completamente análogo y no aporta información adicional alguna. Consideremos, pues, dos modos  $a$  y  $b$  próximos en frecuencia, donde los índices  $a$  y  $b$  representan las ternas  $(n, \ell, m)_a$  y  $(n, \ell, m)_b$ , respectivamente.

Para el desarrollo posterior será conveniente definir:

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{\sigma_{0,a} + \sigma_{0,b}}{2}, \quad (5.94)$$

$$\delta\sigma_0 = \sigma_{0,a} - \sigma_{0,b}. \quad (5.95)$$

Para los modos degenerados (también denominados *acoplados*), las autofrecuencias y autofunciones se suponen de la forma:

$$\sigma = \bar{\sigma}_0 + \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2, \quad (5.96)$$

$$\xi = \sum_{j=a,b} \alpha_j (\xi_{0,j} + \xi_{1,j}), \quad (5.97)$$

donde  $\tilde{\sigma}_1$  y  $\tilde{\sigma}_2$  representan las correcciones a primer y segundo orden, respectivamente, de las autofrecuencias en presencia de degeneración, y  $\xi_{0,j}$  y  $\xi_{1,j}$  representan las autofunciones no perturbadas y perturbadas a primer orden, respectivamente, definidas en las ecuaciones (5.35)-(5.36).

Reemplazamos ahora  $\sigma$  y  $\xi$  por las definiciones (5.96) y (5.97), en la ecuación (5.31). A continuación se lleva a cabo el desarrollo perturbativo teniendo en cuenta que  $\delta\sigma_0$  es pequeño ( $\delta\sigma_0 \sim O(\Omega)$  o  $\delta\sigma_0 \sim O(\Omega^2)$ ). Proyectando sobre las autofunciones no perturbadas  $\xi_{0,a}$  y  $\xi_{0,b}$ , se obtiene el siguiente sistema:

$$\sum_{j=a,b} \left[ \mathcal{M}_{jk}^{(1)} + \mathcal{M}_{jk}^{(2)} + \frac{\delta\sigma_0}{2} \mathcal{J}_{-1} + \frac{\delta\sigma_0^2}{8\bar{\sigma}_0} \mathcal{J}_1 \right] \alpha_j = 0 \quad (5.98)$$

para  $k = a, b$ .  $\mathcal{J}_1$  es la matriz unidad, y:

$$\mathcal{J}_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.99)$$

Las matrices de primer y segundo orden,  $\mathcal{M}_{jk}$ , vienen dadas por:

$$\mathcal{M}_{jk}^{(1)} = \begin{pmatrix} -\tilde{\sigma}_1 + \sigma_{1,j} & \sigma_{1,jk} \\ \sigma_{1,kj} & -\tilde{\sigma}_1 + \sigma_{1,k} \end{pmatrix}, \quad (5.100)$$

$$\mathcal{M}_{jk}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\tilde{\sigma}_2 + \mu_j & \mu_{jk} \\ \mu_{kj} & -\tilde{\sigma}_2 + \mu_k \end{pmatrix}, \quad (5.101)$$

$$(5.102)$$

donde se han definido:

$$\mu_j = -\frac{\tilde{\sigma}_1}{\sigma_{0,j}} \left( \frac{\tilde{\sigma}_1}{2} - \sigma_{1,j} \right) + \sigma_{2,j}^D + \sigma_{2,j}^P + \sigma_{2,j}^T + \sigma_{2,j}^I, \quad (5.103)$$

$$\mu_{jk} = \tilde{\sigma}_1 \frac{\sigma_{1,jk}}{\sigma_{0,k}} + \sigma_{2,jk}^D + \sigma_{2,jk}^P + \sigma_{2,jk}^T + \sigma_{2,jk}^I. \quad (5.104)$$

Los términos con un sólo subíndice no están afectados por la degeneración accidental. Los términos de acoplamiento están incluidos en  $\sigma_{1,jk}$  y  $\mu_{jk}$ . A continuación mostramos las definiciones detalladas de estos términos con dos subíndices.

### 5.4.2. Correcciones a primer y segundo orden para frecuencias afectadas por la degeneración por cercanía

Los diferentes términos que corresponden a las correcciones a la frecuencia a primer y segundo orden son:

$$\sigma_{1,ab} = -\frac{1}{I_a} \langle \xi_{0,a} | \mathcal{K} | \xi_{0,b} \rangle, \quad (5.105)$$

$$\sigma_{2,ab}^P = -\frac{1}{I_a} \langle \xi_{0,a} | \mathcal{K} | \xi_{1,b}^P \rangle, \quad (5.106)$$

$$\sigma_{2,ab}^T = -\frac{1}{I_a} \langle \xi_{0,a} | \mathcal{K} | \xi_{1,b}^T \rangle, \quad (5.107)$$

$$\sigma_{2,ab}^D = -\frac{1}{2\bar{\sigma}_0 I_a} \langle \xi_{0,a} | \frac{1}{\rho_0} (\mathcal{L}_2 - \rho_2 \bar{\sigma}_0^2) | \xi_{0,b} \rangle, \quad (5.108)$$

$$\sigma_{1,ab}^I = -\frac{1}{2\bar{\sigma}_0 I_a} \langle \xi_{0,a} | m^2 \Omega^2 - 2m\Omega | \xi_{0,b} \rangle, \quad (5.109)$$

donde  $I_a$  es el término de normalización del modo  $a$ :

$$I_a = \langle \xi_{0,a} | \xi_{0,a} \rangle, \quad (5.110)$$

y el operador  $\mathcal{K}$  se definió en la Ec. (5.77). El producto escalar se define como:

$$\langle \xi_a | \xi_b \rangle = \int \xi_{0,a}^* \xi_{0,b} \rho d^3 \mathbf{x}. \quad (5.111)$$

#### Expresión detallada para $\sigma_{1,ab}$

Usando las definiciones de los operadores  $\mathcal{L}_2$  y  $\mathcal{K}$ , llegamos a la siguiente expresión para  $\sigma_{1,ab}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{1,ab} = & \frac{m\bar{\Omega}}{I_a} \delta_{\ell_a, \ell_b} \int_0^R r^4 \rho_0 dr (1 + \eta_0)^2 \{ -(y_{01,a} y_{01,b} + \Lambda_b z_{0,a} z_{0,b}) \\ & + (y_{01,a} z_{0,b} + z_{0,a} y_{01,b} + z_{0,a} z_{0,b}) \}, \end{aligned} \quad (5.112)$$

donde  $\delta_{\ell_a, \ell_b}$  es el símbolo de Kronecker.

**Expresión detallada para  $\sigma_2^{PT}$**

$$\begin{aligned} \sigma_{2,ab}^P &= -2 \frac{m^2 \bar{\Omega}^2}{I_a \bar{\sigma}_0} \delta_{\ell_a \ell_b} \int_0^R r^4 \rho_0 dr (1 + \eta_0)^2 \{ y_{01,a} y_{1b} + \Lambda_a z_{01,a} z_{1b} \\ &\quad + (y_{01,a} z_{1,b} + z_{0,a} y_{1,b} + z_{0,a} z_{1,b}) \}, \end{aligned} \quad (5.113)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2,ab}^T &= \frac{2 \bar{\Omega}^2}{I_a \bar{\sigma}_0} \delta_{\ell_a \ell_b} \int_0^R r^4 \rho_0 dr (1 + \eta_0)^2 \{ \delta_{\ell_a \ell_b} (\tau_{\ell_b+1} \tau_{\ell_b+1} \Lambda_{\ell_b+1} + \hat{\tau}_{\ell_b-1} \hat{\tau}_{\ell_b-1} \Lambda_{\ell_b-1}) \\ &\quad + \delta_{\ell_a \ell_{b+2}} (\tau_{\ell_b+1} \hat{\tau}_{\ell_b+1} \Lambda_{\ell_b+1}) + \delta_{\ell_a \ell_{b-2}} (\tau_{\ell_b-1} \hat{\tau}_{\ell_b-1} \Lambda_{\ell_b-1}) \}. \end{aligned} \quad (5.114)$$

**Expresión detallada para  $\sigma_{2,ab}^I$**

$$\begin{aligned} \sigma_{2,zb}^I &= -m^2 \frac{\bar{\Omega}^2}{2 I_a \bar{\sigma}_a} \delta_{\ell_a \ell_b} \int_0^R r^4 \rho_0 dr (1 + \eta_0)^2 \{ (y_{01,a} y_{01,b} + \Lambda_{\ell_b+1} z_{0,a} z_{0,b} \\ &\quad - 2(y_{01,a} z_{0,b} + y_{01,b} z_{0,a} + z_{0,a} z_{0,b}) \}. \end{aligned} \quad (5.115)$$

**Expresión detallada para  $\sigma_{2,ab}^D$**

Para la corrección  $\sigma_{2ab}^D$ , la dependencia angular se puede factorizar como sigue:

$$\sigma_{2ab}^D = \frac{\bar{\Omega}^2}{\bar{\sigma}_0} \mathcal{Q}_{2ab} \mathcal{Z}_{ab}, \quad (5.116)$$

donde  $\mathcal{Q}_{2ab}$  y  $\mathcal{Z}_{ab}$  representan las componentes radial y angular, respectivamente. Entonces, existen reglas de selección, y se imponen mediante:

$$\mathcal{Q}_{2ab} = \int_{\underline{\Omega}} Y_a^* Y_b P_2(\cos \theta) d\underline{\Omega}, \quad (5.117)$$

donde  $d\underline{\Omega} = \sin \theta d\theta d\phi$  es el elemento de ángulo sólido, e  $Y_b$  es el armónico esférico  $Y_{\ell_b, m_b}$ . Utilizando el polinomio de Legendre de segundo orden:

$$P_2(\cos \theta) = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}, \quad (5.118)$$

obtenemos:

$$\mathcal{Q}_{2ab} = \frac{3}{2} \left[ \left( \gamma_{a+1}^2 + \gamma_a^2 - \frac{1}{3} \right) \delta_{ab} + \gamma_a \gamma_{b+1} \delta_{ab+2} + \gamma_b \gamma_{a+1} \delta_{ab-2} \right]. \quad (5.119)$$

Por otro lado, la componente radial  $\mathcal{Z}_{ab}$  puede escribirse como en Soufi et al. (1998):

$$\mathcal{Z}_{ab} = \frac{1}{2 I_a} \int_0^R r^2 \rho_0 dr \{ d_1 E_1 + d_2 E_2 + r^2 b_2 E_3 + r^2 b_3 E_4 \}, \quad (5.120)$$

donde:

$$d_1 = r^2 u_2, \quad (5.121)$$

$$d_2 = r \frac{d d_1}{dr}, \quad (5.122)$$

$$b_3 = \frac{1}{3} r^2 \frac{d^2 \eta_2}{dr^2}, \quad (5.123)$$

con  $b_2$  definida en (5.19). Las expresiones no degeneradas son un caso particular, cuando  $a = b$ , y se pueden encontrar en Dziembowski y Goode (1992).

A continuación mostraremos las expresiones para  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  y  $E_4$ . Siguiendo la notación de Dziembowski y Goode (1992):

$$y \equiv y_{01}, \quad (5.124)$$

$$v \equiv y_{03}, \quad (5.125)$$

$$W \equiv y_{04}, \quad (5.126)$$

y definiendo las siguientes abreviaciones:

$$q_j = y_j (C\omega_{0,j}^2 + 4 - U) - \Lambda_j z_{0,j} - W_j, \quad (5.127)$$

$$\lambda = V_g(y_j - y_{02,j} + v_j), \quad (5.128)$$

$$s_j = \frac{p\Gamma_1\lambda_j}{r\rho g_e}, \quad (5.129)$$

con  $j = a, b$ , tenemos:

$$E_j = E_{j,ab} + E_{j,ba}, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (5.130)$$

donde:

$$\begin{aligned} E_{1,ab} = & -\frac{3}{2}q_a y_b + \frac{1}{2}y_a y_b \mathcal{F}_1 - q_a \lambda_b - \frac{1}{2}y_b s_a \psi + (C\omega_{0,a}^2 + 4) y_a \lambda_b \\ & - \lambda_b W_a + \left(U - \frac{3}{2}\right) W_a y_b - \Lambda_a v_a y_b - \Lambda_a z_{0,a} W_b + 3q_a z_{0,b} \\ & + \frac{1}{2}z_{0,a} z_{0,b} \mathcal{F}_3 - \Lambda_a z_{0,a} y_b \left(\frac{3}{2} - C\omega_{0,a}^2 + U - 4\right) - \Lambda_a z_{0,a} \lambda_b \\ & - z_{0,a} y_b \mathcal{F}_{2b} + z_{0,a} y_{02,b} (\Lambda_{ab}^+ - 3) (U - 4) \\ & + \frac{1}{2}(4 - U) (y_a q_b - s_a \Lambda_b z_{0b}), \end{aligned} \quad (5.131)$$

$$\begin{aligned} E_{2,ab} = & \frac{1}{2} (C\omega_{0,a}^2 - U) y_a y_b + \frac{1}{2} y_a q_b + (U - 2) y_a s_b - y_b W_a + \\ & \frac{1}{2} (\Lambda_{ab}^+ - 3) C\omega_{0,a}^2 z_{0,a} z_{0,b} + \Lambda_b z_{0,b} y_a - (\Lambda_{ab}^+ - 3) (z_{0,b} y_{02,a}) \\ & - \frac{1}{2} s_a \Lambda_b z_{0,b}, \end{aligned} \quad (5.132)$$

$$\begin{aligned} E_{3,ab} = & -\frac{1}{2} C\omega_{0,a}^2 (y_a y_b + (\Lambda_{ab}^+ - 3) z_{0,a} z_{0,b}) - \frac{1}{2} y_a s_b (U + 6) \\ & - 3y_b z_{0,a} - \frac{1}{2} (\Lambda_z - \Lambda_b) y_b z_{0,a} - (3 - \Lambda_{ab}^+) z_{0,a} v_b \\ & + y_a W_b + \frac{1}{2} s_a \lambda_b \left(\frac{\partial \ln \Gamma_1}{\partial \ln r}\right)_{p_0}, \end{aligned} \quad (5.133)$$

$$E_{4,ab} = -\frac{1}{2} (y_a s_b + y_b s_a), \quad (5.134)$$

donde:

$$\mathcal{F}_1 = 6 + U (U - 2 (A^* + V_g) - 3) + (3 - U) C\omega_{0,a}^2, \quad (5.135)$$

$$\mathcal{F}_{2a} = (\Lambda_{ab}^+ - 3)(U - 4) + \Lambda_{ab}^+ (C\omega_{0,a}^2 + 4 - U), \quad (5.136)$$

$$\mathcal{F}_3 = (\Lambda_{ab}^+ - 3)C\omega_{0,a}^2(6 - U) + 6\Lambda_{ab}^+, \quad (5.137)$$

$$\psi = (1 - U)(4 - U) + 6 + U(U - 3), \quad (5.138)$$

$$\Lambda_{ab}^+ = \frac{1}{2}(\Lambda_a + \Lambda_b), \quad (5.139)$$

$$\Lambda_{ba}^- = \frac{1}{2}(\Lambda_b - \Lambda_a) = -\Lambda_{ab}^-, \quad (5.140)$$

$$\Lambda_j = \ell_j(\ell_j + 1). \quad (5.141)$$

### 5.4.3. Degeneración accidental a primer orden

En este caso,  $\delta\sigma_0 = O(\Omega)$ . Solamente los modos con  $\ell_a = \ell_b$  están afectados, lo que implica a aquéllos que experimentan un *avoided crossing*. Las correcciones a primer orden de las frecuencias se encuentran a partir de la condición de existencia de soluciones no triviales de la ecuación (5.98):

$$\left(-\tilde{\sigma}_1 + \sigma_{1,a} + \frac{\delta\sigma_0}{2}\right) \left(-\tilde{\sigma}_1 + \sigma_{1,b} + \frac{\delta\sigma_0}{2}\right) - \sigma_{1,ab}\sigma_{1,ba} = 0. \quad (5.142)$$

Por tanto, las condiciones para la existencia de soluciones no triviales llevan a:

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{\sigma_{1,a} + \sigma_{1,b}}{2} \pm \sqrt{\mathcal{H}_{1,ab}}, \quad (5.143)$$

donde:

$$\mathcal{H}_{1,ab} = \left(\frac{\sigma_{1,a} - \sigma_{1,b}}{2} + \frac{\delta\sigma_0}{2}\right)^2 + \sigma_{1,ab}\sigma_{1,ba}. \quad (5.144)$$

Nótese que cuando la degeneración accidental es despreciable, esto es, cuando  $4\sigma_{1,ab}^2 \ll (\sigma_{1,a} - \sigma_{1,b} - \delta\sigma_0)^2$ , se recuperan las frecuencias no degeneradas,  $\sigma_{1,a}$  y  $\sigma_{1,b}$ .

Las correcciones a segundo orden de las frecuencias degeneradas se obtienen del mismo modo a partir de la condición de existencia de soluciones no triviales de la ecuación (5.98):

$$\left(\nu_a + \mu_a - \tilde{\sigma}_2 + \frac{\delta\sigma_0^2}{8\bar{\sigma}_0}\right) \left(\nu_b + \mu_b - \tilde{\sigma}_2 + \frac{\delta\sigma_0^2}{8\bar{\sigma}_0}\right) - \mathcal{W}_{2,ab} = 0, \quad (5.145)$$

donde se definen:

$$\mathcal{W}_{2,ab} = (\sigma_{1,ab} + \mu_{ab})(\sigma_{1,ba} + \mu_{ba}) \quad (5.146)$$

$$\nu_a = \left(-\tilde{\sigma}_1 + \sigma_{1,a} - \frac{\delta\sigma_0}{2}\right), \quad (5.147)$$

$$\nu_b = \left(-\tilde{\sigma}_1 + \sigma_{1,b} - \frac{\delta\sigma_0}{2}\right), \quad (5.148)$$

y  $\tilde{\sigma}_1$ ,  $\mu_j$  y  $\mu_{jk}$  vienen dados por las ecuaciones (5.142), (5.103) y (5.104), respectivamente. La ecuación (5.143) tiene dos soluciones,  $\tilde{\sigma}_1^+$  y  $\tilde{\sigma}_1^-$ , por lo que son posibles cuatro soluciones distintas de  $\tilde{\sigma}_2$ . De ellas, solamente dos tienen significado físico. Cada una de ellas,  $\tilde{\sigma}_2^+$  y  $\tilde{\sigma}_2^-$ , está asociada con una, y sólo con una de las soluciones a primer orden,  $\tilde{\sigma}_1^-$  y  $\tilde{\sigma}_1^+$ , respectivamente. Tenemos entonces:

$$\tilde{\sigma}_2 = h(\nu, \mu)_{a,b}^2 \pm \sqrt{\mathcal{H}_{2,ab}^{(1)}}, \quad (5.149)$$

donde:

$$\mathcal{H}_{2,ab}^{(1)} = \frac{(\nu_a + \mu_a) - (\nu_b + \mu_b)}{2} + \mathcal{W}_{2,ab}, \quad (5.150)$$

$$h(\nu, \mu)_{a,b} = \left( \frac{\nu_b + \nu_a}{2} + \frac{\mu_b + \mu_a}{2} + \frac{\delta\sigma_0^2}{8\bar{\sigma}_0} \right). \quad (5.151)$$

#### 5.4.4. Degeneración accidental a segundo orden

En este caso,  $\delta\sigma_0 = O(\Omega^2)$ ,  $\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1$ ,  $\sigma_{1,jk} = 0$  y  $\mu_j = \sigma_{2,j}$ . Solamente se ven afectados los modos que cumplen:  $\ell_a = \ell_b \pm 2$ . La expresión analítica de las correcciones de las frecuencias a segundo orden se obtienen a partir de la condición de existencia de soluciones no triviales de la ecuación:

$$\sum_{j=a,b} \alpha_j \left[ \mathcal{M}_{jk}^{(2)} + \frac{\delta\sigma_0}{2} \mathcal{J}_{-1} \right] = 0. \quad (5.152)$$

Se obtiene entonces:

$$\tilde{\sigma}_2 = \left( \frac{\mu_b + \mu_a}{2} \right) \pm \sqrt{\mathcal{H}_{2,ab}^{(2)}} \quad (5.153)$$

donde:

$$\mathcal{H}_{2,ab}^{(2)} = \left( \frac{\mu_b - \mu_a}{2} - \frac{\delta\sigma_0}{2} \right)^2 + \mu_{ab}\mu_{ba}, \quad (5.154)$$

Cuando la degeneración accidental es despreciable,  $4\mu_{ab}\mu_{ba} \ll (\mu_a - \mu_b + \delta\sigma_0)^2$ , y se recuperan las soluciones no degeneradas:  $\mu_a = \sigma_{2a}$  y  $\mu_b = \sigma_{2b}$ .

Las simulaciones numéricas sugieren (Suárez et al., 2006) que cuando la velocidad de rotación es lo suficientemente rápida, todas las parejas de modos que tienen  $\Delta\ell = \pm 2$ , con órdenes radiales  $n$  y  $n - 1$  respectivamente, tendrán frecuencias lo suficientemente próximas como para estar acoplados.

#### 5.4.5. Expresiones completas de las correcciones a las frecuencias

Con el objeto de cuantificar cómo se modifican las frecuencias de oscilación debido a la degeneración accidental, se definen los coeficientes (para  $\ell_a = \ell_b$ ):

$$C_{ab}^{(1)} \equiv \tilde{\sigma}_1 - \sigma_1 \pm \frac{\delta\sigma_0}{2}, \quad (5.155)$$

$$C_{ab}^{(2)} \equiv \tilde{\sigma}_2 - \sigma_2 - \frac{\delta\sigma_0^2}{8\bar{\sigma}_0}, \quad (5.156)$$

donde los subíndices  $ab$  representan los dos modos afectados, y  $\delta\sigma_0$  se definió en la Ec. (5.95). En el caso  $\ell_a = \ell_b \pm 2$ :

$$C_{ab}^{(1)} \equiv 0 \quad (5.157)$$

$$C_{ab}^{(2)} \equiv \tilde{\sigma}_2 - \sigma_2 \pm \frac{\delta\sigma_0}{2} \quad (5.158)$$

La expresión completa para las frecuencias adiabáticas se puede escribir como:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 + \left[ \sigma_1 + C_{ab}^{(1)} \right] + \left[ \sigma_2 + C_{ab}^{(2)} \right], & \text{si } \ell_a = \ell_b \\ \sigma_0 + \sigma_1 + \left[ \sigma_2 + C_{ab}^{(2)} \right], & \text{si } \ell_a = \ell_b \pm 2 \end{cases}$$

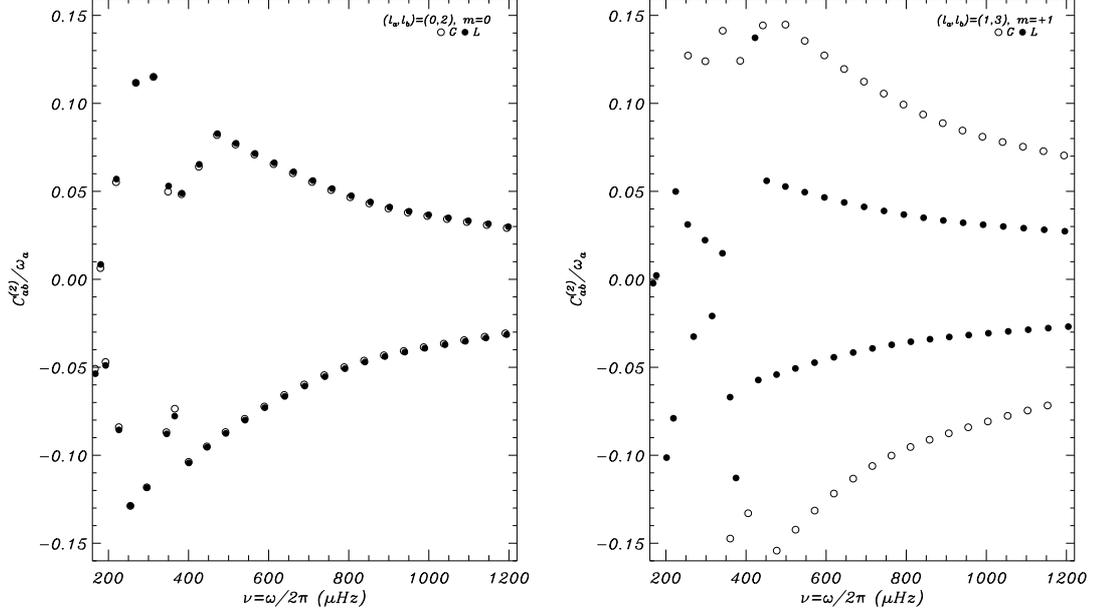


Figura 5.2: Efectos de los coeficientes  $C_{ab}^{(2)}/\sigma_a$  y  $C_{ab}^{(2)}/\sigma_b$  para la degeneración accidental a segundo orden, como función de la frecuencia  $\nu = \sigma/2\pi$ , para las parejas  $(\ell_1, \ell_2) = (0, 2)$  (izquierda) y  $(\ell_1, \ell_2) = (1, 3)$  (derecha). Los círculos vacíos y rellenos representan los coeficientes correspondientes a los casos de rotación uniforme y diferencial, respectivamente. Téngase en cuenta que, en la gráfica,  $\omega$  denota la frecuencia adimensional, que en el texto hemos representado mediante  $\sigma$ . Tomado de Suárez et al. (2006).

## 5.5. Correcciones debidas a la degeneración accidental

Mostramos a continuación los resultados más recientes que se han obtenido en el estudio teórico de la degeneración accidental. En concreto, vamos a centrarnos en los modos con frecuencias que verifiquen:  $|\omega_a - \omega_b| \lesssim \Omega_s / (GM/R^3)^{1/2}$ . Los resultados muestran que tanto para la rotación uniforme como para la diferencial, los modos más afectados son los mixtos, junto a algunos otros en el rango de  $n \lesssim 8$ , con  $m = \pm 1$ . Estos resultados son esperables, al estar los modos mixtos más próximos entre sí que en el caso de los modos **p**.

En la figura 5.2 se muestran  $C_{ab}^{(2)}/\sigma_a$  y  $C_{ab}^{(2)}/\sigma_b$  como función de la frecuencia para los casos de rotación uniforme y diferencial, y  $(\ell_a, \ell_b) = (0, 2)$  y  $(\ell_a, \ell_b) = (1, 3)$ . Como se comentó anteriormente, para estos modos, el único coeficiente no nulo es el de segundo orden. El efecto global para los modos **p** es pequeño con respecto a los mixtos. Puede demostrarse que los términos dominantes corresponden a  $\sigma_{2,ab}^D$  y  $\sigma_{2,ab}^T$ . El primero tiene en cuenta la distorsión de la estructura de la estrella a través de las cantidades  $d_1$  (5.121) y de su derivada  $d_2$  (5.122). El segundo corresponde a la componente toroidal de las autofunciones. Para el rango de frecuencias considerado en el estudio de Suárez et al. (2006), el efecto global para los modos **p** es inferior al encontrado para los mixtos, donde  $\sigma_{2,ab}^D$  y  $\sigma_{2,ab}^T$  son del mismo orden. Esto explica que las principales diferencias entre la rotación uniforme y la diferencial aparezcan

principalmente para estos modos. Tales variaciones pueden llegar a representar un pequeño porcentaje del valor de la frecuencia no corregida por la degeneración accidental. Por otro lado, la compensación de los términos dominantes producen un efecto menor en los modos con  $m = 0$ , comparados con los que tienen  $m \neq 0$ .

Para la región de los modos  $\mathbf{p}$  con alta frecuencia, los efectos de la degeneración mostrados en la figura 5.2 se pueden estudiar en la aproximación asintótica. Para frecuencias altas, las diferencias correspondientes a  $\nu_{n-1,\ell} - \nu_{n,\ell+2}$  son lo suficientemente pequeñas comparadas con la frecuencia de rotación de la estrella como para degenerar todas las parejas de modos  $(\ell, \ell + 2)$ . En este contexto, la degeneración accidental contribuye con un término lentamente creciente con el orden radial, dominado por  $\sigma_{2,ab}^D$ , que está dado, en buena aproximación, por:

$$\sigma_{2,ab}^D \sim \frac{\bar{\Omega}^2}{GM/R^3} \frac{24}{7\sqrt{5}} \bar{\sigma}_0 < \mathcal{S}_2 > \quad (5.159)$$

para  $(\ell_a, \ell_b) = (0, 2)$ , y:

$$\sigma_{2,ab}^D \sim \frac{\bar{\Omega}^2}{GM/R^3} \frac{12}{5} \sqrt{\frac{2}{7}} \bar{\sigma}_0 < \mathcal{S}_2 > \quad (5.160)$$

para  $(\ell_a, \ell_b) = (1, 3)$ .

Para modos  $\mathbf{p}$  con frecuencias altas,  $C_{2,ab}^{(2)}$  aumenta con  $\bar{\sigma}_0$ , por lo que  $C_{2,ab}^{(2)}/\bar{\sigma}_0$  permanece prácticamente constante. La figura 5.2 también revela que el comportamiento de los coeficientes  $C_{2,ab}^{(2)}$  difieren según se utilice rotación uniforme o diferencial. Estas diferencias son significativas para los modos degenerados con  $m \neq 0$ . La causa de tales variaciones se encuentra fundamentalmente en las correcciones a orden cero,  $\sigma_0$ .

Para los modos con  $\Delta\ell = 0$  (para los que  $C_{ab}^{(1)} \neq 0$ ), se puede obtener información adicional a partir del cociente de los coeficientes a primer y segundo orden:

$$q_{(2,1)} = \left| \frac{C_{ab}^{(2)}}{C_{ab}^{(1)}} \right|. \quad (5.161)$$

Se encuentran pares degenerados de este tipo para  $\ell = 2$  y  $\ell = 3$ , verificando  $C_{ab}^{(2)} \sim C_{ab}^{(1)}$ . Cuando se considera la rotación diferencial, los modos mixtos ( $n \sim -6, \dots, 2$ ) presentan coeficientes a segundo orden algo mayores que los de primer orden (desde un 1% hasta un 20%). Aunque las correcciones por degeneración accidental sean menos importantes que cuando se considera la rotación uniforme, esto debe ser tenido en cuenta.

## 5.6. Coeficientes de contaminación

Una consecuencia de todo lo estudiado hasta ahora es que el acoplamiento de los modos afecta de forma significativa a su comportamiento. Así pues, un modo degenerado con  $\ell > 2$  adquiere una componente significativa con  $\ell < 2$ , que tiene que ser tenida en cuenta, ya que en ese caso es más probable que adquiera una amplitud detectable. Esta mezcla de los modos afecta, asimismo, a los diagramas de color, por lo que puede modificar su identificación fotométrica.

Dado que el acoplamiento o degeneración accidental provoca una cierta superposición de los armónicos esféricos de los modos afectados, es necesario calcular el grado de mezcla correspondiente. Daszyńska-Daszkiewicz et al. (2002), a partir del trabajo de Soufi et al. (1998), llevaron a cabo un estudio de dichos coeficientes, analizando la influencia de la degeneración sobre los diagramas de color.

En este trabajo hemos llevado a cabo un estudio similar, aunque con una formulación propia, coherente con el formalismo de Suárez et al. (2006). Los coeficientes que dan cuenta de la mezcla de los armónicos esféricos, denominados de aquí en adelante *coeficientes de contaminación*, han sido definidos de la siguiente manera:

$$\beta = \frac{\sigma_{1,ab} + \mu_{ab}}{-\tilde{\sigma}_1 + \sigma_{1,a} - \tilde{\sigma}_2 + \mu_a + \delta\sigma_0/2 + \delta\sigma_0^2/8\bar{\sigma}_0}, \quad (5.162)$$

donde  $\sigma_{1,a}$  se definió en la Sec. 5.2, y  $\sigma_{1,ab}$ ,  $\mu_a$  y  $\mu_{ab}$ , en la Sec. 5.4. Estos coeficientes están definidos de modo que su normalización sea a la unidad. Esto es, si dos modos se encuentran acoplados, y por ejemplo, para el primero de ellos:  $\beta_a = 0.2$ , entonces para el segundo:  $\beta_b = 0.8$ , lo que significa que el primer modo tendrá una combinación de armónicos esféricos dada por:  $0.2Y_{\ell_a}^m + 0.8Y_{\ell_b}^m$ , y el segundo:  $0.8Y_{\ell_a}^m + 0.2Y_{\ell_b}^m$ .

En capítulos posteriores estudiaremos la influencia de la degeneración accidental sobre los diagramas de color y, por tanto, sobre la identificación de los modos.

# Capítulo 6

## Fotometría multicolor

La astrosismología permite obtener información sobre la estructura estelar, ya que las ondas estacionarias reflejan las características de sus cavidades resonantes, como hemos tenido ocasión de ver. Sin embargo, para poder extraer esta información es necesario identificar cada modo propio de oscilación. En el caso del Sol es más sencillo, ya que las pulsaciones se encuentran en el régimen asintótico, cosa que no ocurre en las variables tipo  $\delta$  Scuti, por lo que se hace necesario recurrir a otras herramientas, como la fotometría multicolor.

Empezaremos, pues, explicando con algo más de detalle la necesidad de usar esta técnica, así como la forma de obtener, a partir de las observaciones, parámetros que estén directamente relacionados con los modelos numéricos. Nótese que en primer lugar se desarrollaron las técnicas fotométricas de identificación modal para casos no solares, aunque todavía quedaban ciertas cantidades indeterminadas, de forma que la identificación unívoca de los modos se tornaba sumamente complicada. Esto propició la necesidad de obtener modelos teóricos que predijesen dichas magnitudes. Expondremos cómo se lleva a cabo esta identificación a partir de dichos modelos, utilizando la fórmula derivada en Watson (1988), y analizaremos su generalización en el caso de que la estrella rote y aparezcan acoplamientos entre parejas de modos.

### 6.1. Necesidad de la fotometría multicolor

Como ya mencionamos en la introducción, las primeras oscilaciones no radiales fueron observadas en el Sol. Por lo tanto, inicialmente las técnicas fotométricas de identificación de modos, consistente en asociar una terna  $(n, \ell, m)$  a cada pulsación detectada, se desarrollaron para este caso especial, donde tenemos la posibilidad de resolver espacialmente el disco estelar y, por tanto, de identificar de forma clara el grado,  $\ell$ , de cada uno de ellos.

De forma más reciente, se han observado otras estrellas con oscilaciones de tipo solar, careciendo en este caso de dicha resolución espacial. Sin embargo, esto no supone un problema, ya que estas oscilaciones se caracterizan por su alta frecuencia (alrededor de 5 minutos), lo que las ubica en la zona de validez del régimen asintótico a frecuencia elevada de la teoría de las oscilaciones estelares. En esta región las

frecuencias de los diferentes modos están equiespaciadas según (Unno et al., 1989):

$$\sigma_{n\ell} = \frac{1}{2 \int_0^R \frac{1}{c} dr} \left( n + \frac{\ell}{2} + \epsilon \right), \quad (6.1)$$

donde  $c$  es la velocidad del sonido en cada punto del interior estelar, y  $\epsilon$  es una constante. Por lo tanto, estudiando las diferencias relativas del conjunto de frecuencias observadas, se puede llevar a cabo una identificación modal más o menos efectiva (diagramas de diferencias, diagramas echelle, etc).

Los problemas aparecen cuando nos encontramos con estrellas que pulsan fuera del régimen asintótico, como es el caso de las  $\delta$  Scuti, que lo hacen alrededor del modo fundamental radial. En este caso no tenemos ni resolución espacial ni equiespaciamiento de los modos. En estrellas evolucionadas, éste no aparece ni siquiera en el régimen asintótico, debido al fenómeno del *avoided crossing*, del que ya hemos hablado.

Por lo tanto, para poder extender el estudio astrosismológico a estrellas no muy evolucionadas que no sean del tipo solar (la mayoría), es necesario un nuevo método observacional de obtención de información que permita una correcta identificación de los modos. En este sentido, en los últimos años se han desarrollado dos técnicas, la espectroscópica y la fotométrica. La primera de ellas es la que mejores resultados ha proporcionado hasta ahora, pero tiene dos dificultades que limitan su aplicación. En primer lugar, para que la relación señal-ruido sea aceptable, es necesario recurrir a telescopios grandes (al menos de 2 metros de diámetro), lo que dificulta la realización de campañas coordinadas de observaciones espectroscópicas. En segundo lugar, el peso de los espectrómetros los hace poco recomendables para misiones espaciales, llegando incluso a excluirlos como posibilidad. Esto deja a la fotometría en una posición preferente como técnica de obtención de datos astrosismológicos

## 6.2. Ecuaciones básicas de la fotometría multicolor

En esta sección describiremos las suposiciones y ecuaciones con las que obtendremos los observables que proporcionan información astrosismológica a partir de mediciones fotométricas en diferentes bandas de longitud de onda, que de aquí en adelante denotaremos como  $\lambda$ .

La obtención de estas ecuaciones se basa en la cuantificación de la energía radiada por la estrella en cada longitud de onda, para poder así relacionar el número de fotones que recibimos con parámetros físicos estelares.

Como en el caso de una estrella multiperódica el flujo de energía radiado, en general, no es paralelo a la dirección radial, la forma de proceder consiste en obtener las variaciones de la energía emitida, integrando el flujo a lo largo de toda la superficie estelar, que ya está perturbada por la oscilación.

Para poder hacer esto, es necesario establecer una serie de hipótesis que simplifiquen el cálculo:

- Estudiaremos la estrella en ausencia de rotación y campos magnéticos (aunque posteriormente tendremos en cuenta el acoplamiento por rotación, ver Sec. 6.4), además de trabajar en aproximación lineal.

- Supondremos que el tamaño de la atmósfera estelar es despreciable comparado con el radio total. Esto nos lleva a describir ésta a través de la aproximación plano-paralela, con la que calcularemos tanto el flujo como el limb-darkening.
- La parte visible de la estrella (la fotosfera), se puede aproximar a una única superficie esférica en equilibrio, con temperatura  $T_{ef}$  y radio el total de la estrella. Durante la pulsación su movimiento viene descrito por  $\delta \mathbf{r}$ .
- El flujo es constante en toda la atmósfera, y perpendicular a ésta.

Con estas premisas, la atmósfera local (a un ángulo sólido dado) depende únicamente de la temperatura efectiva y la gravedad local. Para una revisión más exhaustiva de estas suposiciones, se puede consultar el trabajo de Dupret (2002). Con esto, la perturbación Lagrangiana del flujo monocromático (B.2) quedaría:

$$(F_\lambda^+)_0 + \delta F_\lambda^+(\theta, \phi, t) = F_\lambda^+ [(T_{ef})_0 + \delta T_{ef}(\theta, \phi, t), (g_e)_0 + \delta g_e(\theta, \phi, t)], \quad (6.2)$$

que en aproximación lineal queda:

$$\frac{\delta F_\lambda^+}{F_\lambda^+} = \alpha_{T\lambda} \frac{\delta T_{ef}}{T_{ef}} + \alpha_{g\lambda} \frac{\delta g_e}{g_e}, \quad (6.3)$$

donde:

$$\alpha_{X\lambda} = \frac{\partial F_\lambda^+}{\partial X}. \quad (6.4)$$

Por tanto, la energía radiada que percibimos (ver Apéndice B) es:

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= \frac{R^2}{r_0^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} I_\lambda(\cos \theta') \cos \theta' d(\cos \theta') d\phi' \\ &= \frac{1}{2\pi r_0^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} F_\lambda^+ h_\lambda(\cos \theta') \cos \theta' R^2 d(\cos \theta') d\phi', \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde  $R$  es el radio de la estrella,  $r_0$  es la distancia al observador,  $(\theta', \phi')$  son las coordenadas de cada punto de la atmósfera, y la segunda igualdad la hemos obtenido mediante la definición de la función de limb-darkening,  $h_\lambda$ .

Perturbando la forma Lagrangiana de  $E(\lambda)$ , y teniendo en cuenta que:

$$\xi_r(\theta, \phi, t) = a R P_\ell^m(\cos \theta) \cos(\sigma t + m\phi), \quad (6.6)$$

$$\frac{\delta T_{ef}}{T_{ef}} = a f_T P_\ell^m(\cos \theta) \cos(\sigma t + m\phi + \Psi_T), \quad (6.7)$$

$$\frac{g_e}{g_e} = -a f_g P_\ell^m(\cos \theta) \cos(\sigma t + m\phi), \quad (6.8)$$

(donde para la obtención de la forma de  $\delta g_e/g_e$  se ha utilizado que ésta se encuentra en antifase con  $\xi_r$ ), se llega, después de algo de álgebra (Dupret, 2002), a que la variación de la magnitud visual monocromática de la estrella a una longitud de onda dada,  $\delta m_\lambda$ , es:

$$\begin{aligned} \delta m_\lambda &= -\frac{2.5}{\ln 10} \frac{\delta E(\lambda)}{E(\lambda)} \\ &= \frac{2.5}{\ln 10} a P_\ell^m(\cos i) b_{\ell\lambda} [(\ell + 2)(1 - \ell) \cos(\sigma t) \\ &\quad + f_T \cos(\sigma t + \Psi_T)(\alpha_{T\lambda} + \beta_{T\lambda}) - f_g \cos(\sigma t)(\alpha_{g\lambda} + \beta_{g\lambda})], \end{aligned} \quad (6.9)$$

donde  $i$  es el ángulo entre el eje del sistema de referencia de la estrella y el del observador, y:

$$b_{\ell\lambda} = \int_0^1 h_\lambda \cos \theta' P_\ell d(\cos \theta'), \quad \beta_{T\lambda} = \frac{\partial \ln b_{\ell\lambda}}{\partial \ln T_{ef}}, \quad \beta_{g\lambda} = \frac{\partial \ln b_{\ell\lambda}}{\partial \ln g_e},$$

$$\alpha_{T\lambda} = \frac{\partial \ln F_\lambda^+}{\partial \ln T_{ef}}, \quad \alpha_{g\lambda} = \frac{\partial \ln F_\lambda^+}{\partial \ln g_e}. \quad (6.10)$$

Por lo tanto, con  $f_T$ ,  $f_g$  y  $\Psi_T$  (variables denominadas *observables no adiabáticos*), proporcionados por un código de pulsación no adiabático, y con un modelo de atmósfera en equilibrio del que obtener  $F_\lambda^+$  y  $h_\lambda$ , se puede calcular  $\delta m_\lambda$ , que está directamente relacionado con las observaciones fotométricas. A la ecuación (6.9) se le denomina *fórmula de Watson*.

La auténtica mejora de este tratamiento consiste en la obtención de los observables no adiabáticos a partir de los modelos teóricos, ya que hasta hace poco tiempo, al carecer de dichas estimaciones, los observadores se habían limitado a imponer condiciones físicas aproximadas que se acercaran a la solución del problema, a saber:

1. Se imponía una condición de contorno, para la atmósfera, del tipo:  $\delta P/P = 0$ , que en aproximación de Cowling implica:

$$C = 4 + \frac{\sigma^2 R^3}{GM} - \ell(\ell + 1) \frac{GM}{\sigma^2 R^3}, \quad (6.11)$$

donde  $C$  es el coeficiente de:

$$\frac{\delta P}{P} = a C P_\ell^m(\cos \theta) \cos(\sigma t + m\phi). \quad (6.12)$$

2. Se introducía el parámetro,  $R$ , que medía el grado de no adiabaticidad del sistema (no hay que confundirlo con el radio total de la estrella), definido de la forma:

$$f_T = R \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} C, \quad (6.13)$$

expresión que se obtiene a partir de las siguientes aproximaciones:

- a) En la atmósfera se verifica:  $\delta T/T = \delta T_{ef}/T_{ef}$ .
- b) En aproximación adiabática:

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} \frac{\delta P}{P}. \quad (6.14)$$

En la atmósfera, ninguna de las dos aproximaciones es válida, por lo que finalmente  $R$  se introduce como un parámetro libre a ajustar.

3. Por último, se relacionaba  $f_g$  con  $C$  mediante la expresión:

$$f_g = \left( \frac{\partial \ln g}{\partial \ln P_g} \right)_{\tau=1} C = p^* C, \quad (6.15)$$

donde  $P_g$  es la presión del gas, y  $p^*$  se calculaba utilizando modelos de atmósfera como los de Kurucz (1993), o fijándolo a priori a un valor determinado.

Más recientemente, Cugier y Daszyńska (2001) aproximaron la obtención de  $C$  mediante la ecuación:

$$f_g = 2 + \frac{\sigma^2 R^3}{GM}, \quad (6.16)$$

que es una simplificación de la ecuación (6.15) en aproximación de Cowling, despreciando la densidad de la atmósfera en comparación con la densidad media. Aún así, ésta sigue siendo una aproximación excesivamente inexacta, especialmente para los modos  $\mathbf{g}$ .

### 6.3. Obtención de los observables no adiabáticos e identificación modal en fotometría multicolor

En la práctica, las observaciones en distintas bandas de color se realizan a través de diversos filtros, por lo que en realidad lo que tenemos es:

$$\delta m_i = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta m_\lambda \omega_i(\lambda) d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \omega_i(\lambda) d\lambda}, \quad (6.17)$$

donde  $\omega_i(\lambda)$ , respuesta del filtro  $i$ , es una función del tipo ventana.

Garrido et al. (1990) desarrollaron un método de identificación modal utilizando la fotometría Strömgren, que se basaba en la construcción de diagramas de fase-amplitud para diversas combinaciones de filtros convenientemente elegidas (ver, por ejemplo, la Fig. 1.3).

Si obtenemos la diferencia entre dos filtros  $i$  y  $j$ , la variación de esta diferencia queda:

$$\delta(m_i - m_j) = -\frac{2.5}{\ln 10} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\delta E(\lambda)}{E(\lambda)} [\omega_i(\lambda) - \omega_j(\lambda)] d\lambda, \quad (6.18)$$

donde  $\omega_i$  y  $\omega_j$  están normalizados a la unidad. Por lo tanto, todos los términos independientes de  $\lambda$  desaparecen.

Por otro lado, Watson (1988) y Garrido et al. (1990) observaron que  $b_{\ell\lambda}$  es muy poco dependiente de  $\lambda$  en los casos  $\lambda \leq 2$ , por lo que el término  $(1 - \ell)(\ell + 2)$  de la ecuación (6.9), puramente geométrico, es despreciable en este caso. Además, la correcta elección de la combinación de filtros puede separar las contribuciones de los diferentes términos de esta ecuación. De ahora en adelante, en vez de utilizar los diagramas de fase-amplitud, usados, por ejemplo, por Garrido et al. (1990), emplearemos una variante de los mismos, en los que se representa por separado el cociente de amplitudes o la diferencia de fases entre dos filtros, en función de la longitud de onda de cada filtro (ver, por ejemplo, la Fig. 7.15 del Cap. 7).

En los trabajos aquí referidos, para calcular  $\delta m_\lambda$ , como ya comentamos en la sección anterior, se obtenía  $C$  mediante (6.11), a partir de la cual se calculaban  $f_T$  (6.13) y  $f_g$  (6.15), suponiendo un valor de  $R$  y de  $p^*$ .  $\Psi_T$  era un valor fijado directamente. En realidad, al desconocer tanto  $R$  como  $\Psi_T$ , se establecían unos intervalos

de validez de dichos parámetros ( $0.25 < R < 1$ ,  $90^\circ < \Psi_T < 135^\circ$ ), lo que proporcionaba unas regiones esperadas para cada uno de los valores de  $\ell$  en los diagramas antes descritos. Era en estas regiones donde se debían encontrar los diferentes modos, por lo que se podía llevar a cabo su identificación. Dichos intervalos no eran arbitrarios, sino que se deducían de las pocas observaciones simultáneas espectroscópicas y fotométricas de las que se disponía. Este método también permitía encontrar la pareja  $(T, \Psi_T)$  que mejor se ajustaba a los valores observados, permitiendo de esta forma una comparación sencilla con los resultados teóricos.

La mejora que representa el tratamiento aquí presentado, y ya utilizado por Moya et al. (2004a,b,c), con respecto al anterior, consiste en que los modelos proporcionan directamente los valores de los observables no adiabáticos, por lo que las regiones en estos diagramas se reducen a puntos de diferentes valores de  $\ell$ , donde se deberían encontrar los modos, lo que permite el estudio de la estructura interna de la estrella mediante el ajuste directo de sus parámetros físicos a los datos observacionales. En esto consiste la denominada *astrosismología no adiabática*.

Hemos de destacar que este método, si bien es general y aplicable a cualquier estrella variable, se utiliza especialmente en pulsantes tipo  $\delta$  Scuti y  $\gamma$  Doradus. La razón estriba en que este procedimiento tiene en cuenta tanto las amplitudes como el desfase (o *phase lag*), el cual es altamente no adiabático ( $\Psi_T \neq 180^\circ$ ) en estas estrellas. En el caso de que la pulsación tenga características cercanas a las adiabáticas (como es el caso de las  $\beta$  Cephei), se ha desarrollado un método simplificado donde solamente se comparan las relaciones entre las amplitudes (Dupret, 2002; Townsend, 2002).

## 6.4. Fórmula de Watson en presencia de degeneración accidental

En el caso de que la estrella rote, el ángulo de inclinación del eje de rotación con respecto a la visual aparece explícitamente en las ecuaciones. Dado que éste es en principio desconocido, puede variarse libremente entre  $-180^\circ$  y  $+180^\circ$ , con lo que en vez de tener un punto en el diagrama de fase-amplitud, aparecerá una curva. En esta sección desarrollaremos la forma que toma la fórmula de Watson cuando esto ocurre.

Para ello, partiremos de la expresión compleja de la fórmula original de Watson. La ecuación (6.9) representa la oscilación de la magnitud de una estrella, para la longitud de onda  $\lambda$ . Esta misma onda, para un cierto filtro,  $x$ , puede ser expresada matemáticamente, en notación compleja, como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_x e^{i(\sigma t + \phi_x)} &= -\frac{2.5}{\ln 10} a P_\ell^m(\cos i) b_{\ell x} \left\{ (\alpha_{Tx} + \beta_{Tx}) f_T e^{i(\sigma t + \phi^T)} \right. \\ &\quad \left. - [(\ell - 1)(\ell + 2) + (\alpha_{gx} + \beta_{gx}) f_g] e^{i(\sigma t + \phi^g)} \right\}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Eliminando la dependencia temporal, que aparece en todos los términos, queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_x e^{i\phi_x} &= -\frac{2.5}{\ln 10} a P_\ell^m(\cos i) b_{\ell x} \left\{ (\alpha_{Tx} + \beta_{Tx}) f_T e^{i\phi^T} \right. \\ &\quad \left. - [(\ell - 1)(\ell + 2) + (\alpha_{gx} + \beta_{gx}) f_g] e^{i\phi^g} \right\} \\ &= -\frac{2.5}{\ln 10} a P_\ell^m(\cos i) \left[ \delta x e^{i\phi^T} + \gamma_x e^{i\phi^g} \right], \end{aligned} \quad (6.20)$$

donde se han definido:

$$\delta x = b_{\ell x} (\alpha_{Tx} + \beta_{Tx}) f_T, \quad (6.21)$$

$$\gamma_x = -b_{\ell x} [(\ell - 1)(\ell + 2) + (\alpha_{gx} + \beta_{gx}) f_g]. \quad (6.22)$$

Finalmente, toda la expresión puede reescribirse de modo que quede referida a  $\phi^g$ , con lo que quedará:

$$\mathcal{A}_x e^{i\phi'_x} = -\frac{2.5}{\ln 10} a P_\ell^m(\cos i) [\delta x e^{i\Psi_T} + \gamma_x], \quad (6.23)$$

donde:

$$\phi'_x = \phi_x - \phi^g, \quad (6.24)$$

$$\Psi_T = \phi^T - \phi^g. \quad (6.25)$$

Dividiendo la parte imaginaria entre la real, podemos obtener la fase para el filtro  $x$ :

$$\tan \phi'_x = \frac{\delta x \sin \Psi_T}{\delta x \cos \Psi_T + \gamma_x}, \quad (6.26)$$

lo que permite calcular la diferencia de fases entre dos filtros distintos (en nuestro caso el de referencia será el  $y$ ):

$$\phi'_x - \phi'_y = \arctan \left[ \frac{\delta x \sin \Psi_T}{\delta x \cos \Psi_T + \gamma_x} \right] - \arctan \left[ \frac{\delta y \sin \Psi_T}{\delta y \cos \Psi_T + \gamma_y} \right]. \quad (6.27)$$

Asimismo, el cociente de amplitudes puede obtenerse, para las partes real e imaginaria, como:

$$\frac{\mathcal{A}_x \sin \phi'_x}{\mathcal{A}_y \sin \phi'_y} = \frac{\delta x}{\delta y}, \quad (6.28)$$

$$\frac{\mathcal{A}_x \cos \phi'_x}{\mathcal{A}_y \cos \phi'_y} = \frac{\delta x \cos \Psi_T + \gamma_x}{\delta y \cos \Psi_T + \gamma_y}, \quad (6.29)$$

de donde se obtendría finalmente:

$$\frac{\mathcal{A}_x}{\mathcal{A}_y} = \frac{\delta x}{\delta y} \left[ \cos(\phi'_x - \phi'_y) - \frac{\sin(\phi'_x - \phi'_y)(\delta x \cos \Psi_T + \gamma_x)}{\delta x \sin \Psi_T} \right] = \frac{\delta x \sin \phi'_y}{\delta y \sin \phi'_x}. \quad (6.30)$$

El código desarrollado en nuestro grupo del Instituto de Astrofísica de Andalucía (CSIC) permite obtener los valores de los cocientes de amplitudes y de las diferencias de fase a partir de los modelos de atmósfera de Kurucz, a partir de las expresiones (6.30) y (6.26).

Consideremos ahora que la estrella rota, de manera que dos modos  $(n, \ell, m)$  y  $(n', \ell', m)$  estén acoplados entre sí, con coeficientes de contaminación  $\beta$  y  $1 - \beta$ , respectivamente. Entonces, la ecuación (6.19) tendrá que incluir las contribuciones de los dos armónicos esféricos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_x e^{i(\sigma t + \phi_x)} &= -\frac{2.5}{\ln 10} a \beta P_\ell^m(\cos i) b_{\ell x} \left\{ (\alpha_{Tx} + \beta_{Tx}) f_T e^{i(\sigma t + \phi^T)} \right. \\ &\quad \left. - [(\ell - 1)(\ell + 2) + (\alpha_{gx} + \beta_{gx}) f_g] e^{i(\sigma t + \phi^g)} \right\} \\ &\quad - \frac{2.5}{\ln 10} a (1 - \beta) P_{\ell'}^m(\cos i) b_{\ell' x} \left\{ (\alpha_{Tx} + \beta_{Tx}) f'_T e^{i(\sigma' t + \phi'^T)} \right. \\ &\quad \left. - [(\ell' - 1)(\ell' + 2) + (\alpha_{gx} + \beta_{gx}) f'_g] e^{i(\sigma' t + \phi'^g)} \right\}, \end{aligned} \quad (6.31)$$

donde  $\sigma$  y  $\sigma'$  son las frecuencias correspondientes a cada modo. Si se supone que  $\sigma \simeq \sigma'$ , tendremos:

$$\mathcal{A}_x e^{i\phi'_x} = -\frac{2.5}{\ln 10} a \beta P_\ell^m(\cos i) [\delta x e^{i\Psi_T} + \gamma_x] - \frac{2.5}{\ln 10} a (1 - \beta) P_{\ell'}^m(\cos i) [\delta x' e^{i\Psi'_T} + \gamma'_x], \quad (6.32)$$

donde:

$$\delta x = b_{\ell x} (\alpha_{Tx} + \beta_{Tx}) f_T, \quad (6.33)$$

$$\gamma_x = -b_{\ell x} [(\ell - 1)(\ell + 2) + (\alpha_{gx} + \beta_{gx}) f_g], \quad (6.34)$$

$$\delta x' = b_{\ell' x} (\alpha_{Tx} + \beta_{Tx}) f'_T, \quad (6.35)$$

$$\gamma'_x = -b_{\ell' x} [(\ell' - 1)(\ell' + 2) + (\alpha_{gx} + \beta_{gx}) f'_g], \quad (6.36)$$

$$\phi'_x = \phi_x - \phi^g, \quad (6.37)$$

$$\Psi_T = \phi^T - \phi^g, \quad (6.38)$$

$$\Psi'_T = \phi'^T - \phi^g, \quad (6.39)$$

y donde se ha supuesto:  $\phi^g \simeq \phi'^g$ . La validez de esta aproximación se basa en el hecho de que la variación de la gravedad es un fenómeno puramente mecánico, independiente de los procesos de intercambio de calor. Como la oscilación de la gravedad es opuesta a la del radio, la relación de fases existente entre ambas es siempre de  $180^\circ$ , independientemente del modo considerado.

A partir de aquí podemos obtener nuevamente los valores de la fase y la amplitud, que como vemos, dependerá en este caso del ángulo  $i$ :

$$\begin{aligned} \tan \phi'_x &= \frac{\beta P_\ell^m(\cos i) \delta x \sin \Psi_T + (1 - \beta) P_{\ell'}^m(\cos i) \delta x' \sin \Psi'_T}{\beta P_\ell^m(\cos i) (\delta x \cos \Psi_T + \gamma_x) + (1 - \beta) P_{\ell'}^m(\cos i) (\delta x' \cos \Psi'_T + \gamma'_x)}, \\ \frac{\mathcal{A}_x \sin \phi'_x}{\mathcal{A}_y \sin \phi'_y} &= \frac{\beta P_\ell^m(\cos i) \delta x \sin \Psi_T + (1 - \beta) P_{\ell'}^m(\cos i) \delta x' \sin \Psi'_T}{\beta P_\ell^m(\cos i) \delta y \sin \Psi_T + (1 - \beta) P_{\ell'}^m(\cos i) \delta y' \sin \Psi'_T}, \\ \frac{\mathcal{A}_x \cos \phi'_x}{\mathcal{A}_y \cos \phi'_y} &= \frac{\beta P_\ell^m(\cos i) (\delta x \cos \Psi_T + \gamma_x) + (1 - \beta) P_{\ell'}^m(\cos i) (\delta x' \cos \Psi'_T + \gamma'_x)}{\beta P_\ell^m(\cos i) (\delta y \cos \Psi_T + \gamma_y) + (1 - \beta) P_{\ell'}^m(\cos i) (\delta y' \cos \Psi'_T + \gamma'_y)}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Estas serán las expresiones que utilizaremos cuando aparezcan modos degenerados debido a la rotación estelar.

# Capítulo 7

## RV Ari

### 7.1. Datos de la estrella

RV Arietis ( $\alpha_{2000} = 02^h15^m08^s$ ,  $\delta_{2000} = +18^\circ04'4$ , A0,  $V = 12.^m07$ ; Rodríguez et al. 2000) es una estrella pulsante multiperódica de gran amplitud ( $\Delta V \sim 0.^m4$ ). Su variabilidad fue descubierta por Hoffmeister (1934). Las primeras observaciones visuales se deben a Lange (1935) y Guriev (1938). Este último tomó datos durante 59 noches en el año 1936, que fueron publicados por Soloviev y Shakhovskoj (1958) dos décadas después. Durante dos estaciones, en 1935 y 1936, Detre (1937) llevó a cabo medidas fotométricas fotográficas, y Balázs (1956) observó la estrella fotográficamente de nuevo durante los años 1951-1956, rediscutiendo las observaciones de Detre. En 1951, Alania (1954) comenzó la investigación fotográfica en el Observatorio Abastunami de estrellas RR Lyrae, en el transcurso de la cual, observó **RV Ari**, obteniendo un máximo de luz.

Broglia y Pestarino (1955) comenzaron las observaciones de fotometría fotoeléctrica en el Observatorio de Merate en 1954, estableciendo el periodo dominante de la variable:  $P_0 = 0.09312819$  días, y llegando a la conclusión de que la curva de luz de la estrella esta fuertemente modulada por un segundo periodo. Detre (1956) utilizó las observaciones de Broglia y Pestarino (1955), y determinó el periodo de modulación:  $P_m = 0.316256$  días.

**RV Ari** es una estrella de población I, del grupo de las **HADS** (**H**igh-**A**mplitude  **$\delta$**  **S**cuti), como demuestran Cox et al. (1979), y tiene una abundancia química muy cercana a la del Sol. Se ha establecido también que su estado evolutivo se encuentra próximo al final de la Secuencia Principal (Rodríguez et al., 1992; Rodríguez et al., 2000).

Fitch y Szeidl (1976) establecieron que se trataba de una pulsante de doble modo, donde éstos corresponden al fundamental radial y a su primer sobretono. Rodríguez et al. (1992) llevaron a cabo un extenso estudio observacional de esta estrella, encontrando un total de 8 frecuencias, que se correspondían con combinaciones o armónicos de las dos principales, siendo incluida en el catálogo de Rodríguez et al. (2000).

Recientemente, Pócs y Szeidl (2001) encontraron una tercera frecuencia que no coincidía con ninguna combinación lineal de las dos conocidas hasta la fecha:  $f_3 = 13.6116$  c/d. En el presente trabajo hemos utilizado solamente las dos primeras, pues hasta la fecha son las únicas para las que se dispone de datos fotométricos de amplitudes y desfases en diferentes filtros.

A continuación mostramos las principales características de esta estrella (Rodríguez et al., 1992; Rodríguez et al., 2000; Rodríguez, 2005):

$T_{ef}$	7230 K
$\log g$	3.94
[M/H]	0.01
( $X, Y, Z$ )	(0.7082, 0.2741, 0.0177)
$v \sin i$	$\leq 18$ km/s

**Frecuencias observadas y datos fotométricos** (Rodríguez 2005, a partir de los datos de Rodríguez et al. 1992; para  $f_3$  se ha utilizado Pócs y Szeidl 2001):

Frecuencia	P (d)	$\nu$ (c/d)	$\nu$ ( $\mu$ Hz)	$A_v$ (mag)	$f_1/f_{i=2,3}$
$f_1$	0.0931	10.738	124.28	0.308	
$f_2$	0.0720	13.898	160.86	0.091	0.772
$f_3$	0.0735	13.611	157.54	0.016	0.788

	$\phi_u - \phi_y$	$\phi_v - \phi_y$	$\phi_b - \phi_y$	$A_u/A_y$	$A_v/A_y$	$A_b/A_y$
$f_1$	$6.2 \pm 2.0$	$1.8 \pm 1.7$	$1.2 \pm 1.7$	$1.086 \pm 0.033$	$1.394 \pm 0.037$	$1.204 \pm 0.034$
$f_2$	$3.8 \pm 6.7$	$-1.7 \pm 5.8$	$-2.1 \pm 5.7$	$1.197 \pm 0.124$	$1.492 \pm 0.139$	$1.328 \pm 0.131$

### Caja fotométrica:

$$\log g = 4.19 - 3.69 \quad (\Delta \log g = \pm 0.25)$$

$$\log T_{ef} = 3.868 - 3.850 \quad (\Delta T_{ef} = \pm 150 \text{ K})$$

## 7.2. Oscilaciones no adiabáticas sin rotación

### 7.2.1. Modelos

En primer lugar se han obtenido 5 modelos representativos de esta estrella, uno para el centro de la caja fotométrica, y otros cuatro, correspondientes a cada una de las esquinas de la misma. Todos ellos han sido calculados sin rotación, y para la convección se ha utilizado la **MLT**, con valores de  $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0, 0.5$ , y la **FST**, con el valor correspondiente al caso solar:  $\alpha_{\text{FST}} = 0.69$ . Cada modelo se representa mediante dos índices,  $ij$ , donde  $i = 0, \dots, 4$  representa la posición en el diagrama HR (ver Fig. 7.1), y  $j = 0, \dots, 4$  el valor de  $\alpha$  utilizado (ver Tabla 7.1). El tratamiento de la atmósfera se ha incluido de dos maneras: para los modelos calculados con **MLT** se han utilizado los modelos de atmósfera de Kurucz (1993, 1998), y para los que incluyen **FST**, se han empleado los de Kupka y Montgomery (2002), basada en Canuto y Mazzitelli (1991) y Canuto et al. (1996). Con esto se pretende obtener coherencia en todos los tratamientos, ya que se está utilizando la misma teoría de la convección tanto en el interior estelar como en la atmósfera. La notación empleada es la misma que antes. Cada modelo se representa mediante dos índices,  $ij$ , donde el primero ( $i = 0, \dots, 4$ ) denota la posición en el diagrama HR, y el segundo ( $j = 0, \dots, 3$ ), el valor de  $\alpha$  utilizado.

En la tabla 7.1 se muestran los parámetros físicos de los 5 modelos. Las frecuencias  $f_{\min}$  y  $f_{\max}$  se han calculado interpolando el *growth rate* y determinando los valores para los que éste se anula. Aunque los resultados obtenidos son aproximados,

	$M/M_{\odot}$	$\log T_{ef}$	$\log g$	$\log L/L_{\odot}$	$X_C$	Edad	$\alpha$	$f_{min}$	$f_{max}$
00	1.75	3.859	3.94	1.13	0.302	1186	2.0	78	380
01	1.75	3.859	3.94	1.13	0.302	1186	1.5	79	336
02	1.75	3.859	3.94	1.13	0.303	1186	1.0	95	355
03	1.75	3.859	3.94	1.13	0.303	1186	0.5	98	361
04	1.75	3.859	3.95	1.13	0.306	1180	0.69	78	379
10	2.10	3.867	3.70	1.48	0.132	860	1.5	71	242
11	2.10	3.868	3.70	1.48	0.132	860	1.5	77	250
12	2.10	3.868	3.70	1.48	0.132	860	1.0	78	255
13	2.10	3.868	3.70	1.48	0.132	860	0.5	78	267
14	2.10	3.868	3.70	1.48	0.135	858	0.69	67	262
20	2.01	3.850	3.69	1.41	0.121	985	2.0	63	218
21	2.01	3.850	3.69	1.41	0.120	985	1.5	66	216
22	2.01	3.850	3.69	1.41	0.120	985	1.0	66	225
23	2.01	3.850	3.69	1.41	0.120	985	0.5	67	224
24	2.00	3.848	3.69	1.40	0.120	1000	0.69	63	238
30	1.57	3.868	4.19	0.86	0.538	850	2.0	117	780
31	1.57	3.868	4.19	0.86	0.538	850	1.5	124	491
32	1.57	3.867	4.19	0.86	0.538	850	1.0	127	525
33	1.57	3.867	4.19	0.86	0.538	850	0.5	127	551
34	1.57	3.869	4.20	0.86	0.548	810	0.69	124	576
40	1.49	3.850	4.19	0.78	0.521	1080	2.0	111	770
41	1.49	3.850	4.19	0.77	0.540	985	1.5	119	785
42	1.49	3.849	4.19	0.77	0.542	980	1.0	125	383
43	1.49	3.850	4.19	0.77	0.543	975	0.5	125	406
44	1.49	3.850	4.20	0.77	0.541	981	0.69	119	-

Tabla 7.1: Modelos calculados para **RV Ari**, con atmósfera y sin rotación. La convección se ha tratado con **MLT** y con **FST**. La temperatura está dada en grados K, la gravedad superficial  $g$  en el sistema cgs, y la edad en millones de años.  $X_C$  representa la fracción de Hidrógeno en el centro. Se proporciona el valor de  $\alpha$  para cada uno de ellos; cuando es igual a 0.69, es porque ese modelo se ha calculado con **FST**.  $f_{min}$  y  $f_{max}$  muestran los límites inferior y superior del intervalo de inestabilidad ( $\mu\text{Hz}$ ).

este método permite conocer el comportamiento general de la inestabilidad de los modos a lo largo de la caja fotométrica, y en función del parámetro  $\alpha$ . En la Fig. 7.1 se muestra el diagrama HR de los modelos calculados con  $\alpha = 2.0$ , y los tracks evolutivos correspondientes.

## 7.2.2. Rangos de inestabilidad

En la Fig. 7.2 se representan los valores del *growth rate*,  $\eta$ , frente a la frecuencia de cada modo. Cuando  $\eta > 0$ , el modo es inestable, y cuando  $\eta < 0$ , estable, lo que permite identificar el rango de inestabilidad de cada modelo. Se puede observar que la dependencia del límite inferior con el valor de  $\alpha$  es bastante menor que la del límite superior. No obstante, la variación del número de modos inestables es de uno

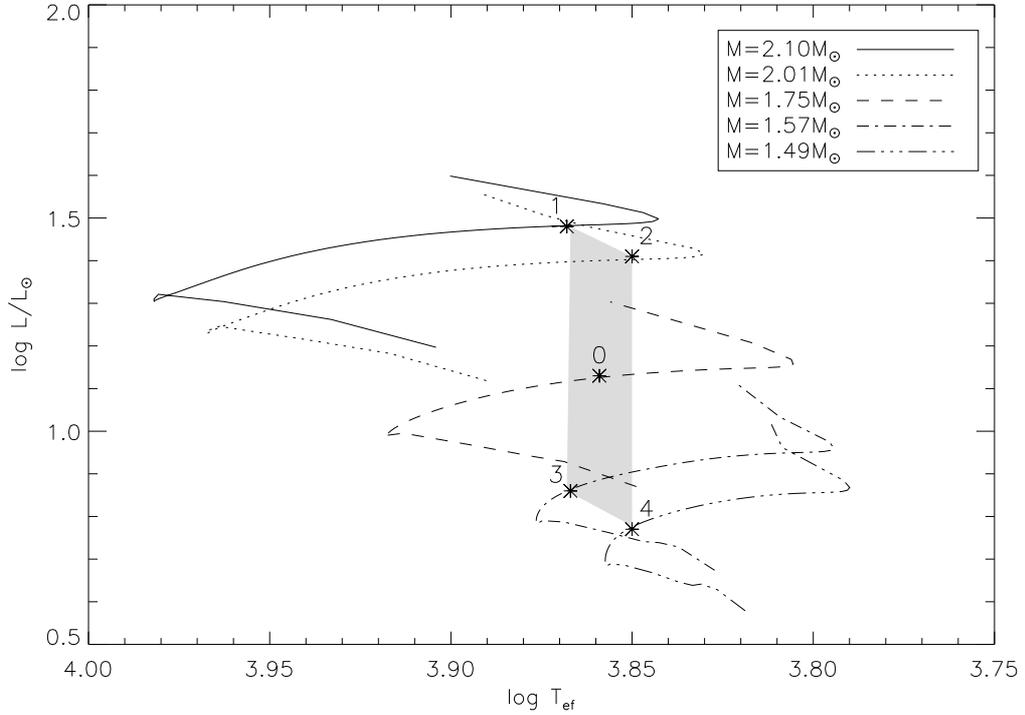


Figura 7.1: Diagrama HR de los modelos  $i0$  ( $\alpha = 2.0$ ), representados por asteriscos, con sus caminos evolutivos correspondientes, obtenidos sin rotación y con atmósfera. El área sombreada representa la caja de error.

o dos en prácticamente todos los casos. Una excepción a lo anterior la constituye el modelo **30** respecto al resto de los  $3j$ , con una diferencia de 6 modos, y los **40** y **41**, para los que la diferencia con respecto a los demás es de 18 modos. Se observa, pues, que la dependencia en los modelos menos masivos ( $3j$  y  $4j$ ) es mayor que en los restantes ( $0j$ ,  $1j$  y  $2j$ ), ya que las predicciones para  $\alpha = 2.0$  son completamente diferentes de las correspondientes a  $\alpha \leq 1$ . Se observa, asimismo, que al disminuir el valor de  $\alpha$  se estabilizan los modos de órdenes altos. La causa de esto la podemos encontrar observando las gráficas de la derecha de la Fig. 7.2. En ellas se muestra la eficiencia convectiva frente al logaritmo de la temperatura interna para los modelos calculados con **MLT**. Vemos que en los modelos  $0j$ ,  $1j$  y  $2j$ , más masivos, la eficiencia convectiva no varía sustancialmente con el valor de  $\alpha$ , mientras que en los modelos  $3j$  y  $4j$ , menos masivos, existe una diferencia significativa entre los modelos con  $\alpha = 2.0$  (**30** y **40**), y el resto. Las mayores diferencias observadas se encuentran en los modelos  $4j$ , entre los casos  $\alpha \geq 1.5$  y  $\alpha \leq 1.0$ .

Nótese que el rango de temperaturas que abarca este estudio se encuentra situado entre 7380 K y 7080 K. En esta zona, las estrellas tienen dos capas convectivas pequeñas, como se observa en la Fig. 7.2. Por tanto, parece ser que al utilizar valores elevados de  $\alpha$ , se está “forzando” artificialmente la extensión de la zona convectiva, sobreestimándola y rebasando el límite de validez de la teoría. En ésta, la **MLT**, se promedian las propiedades físicas sobre una longitud dada por  $\alpha$ . Ahora bien, si promediamos sobre longitudes mayores que el tamaño real de la zona, aparecen inconsistencias como las mostradas aquí. Esto puede observarse claramente en el modelo **40**, que presenta unos valores demasiado elevados de la eficiencia convectiva

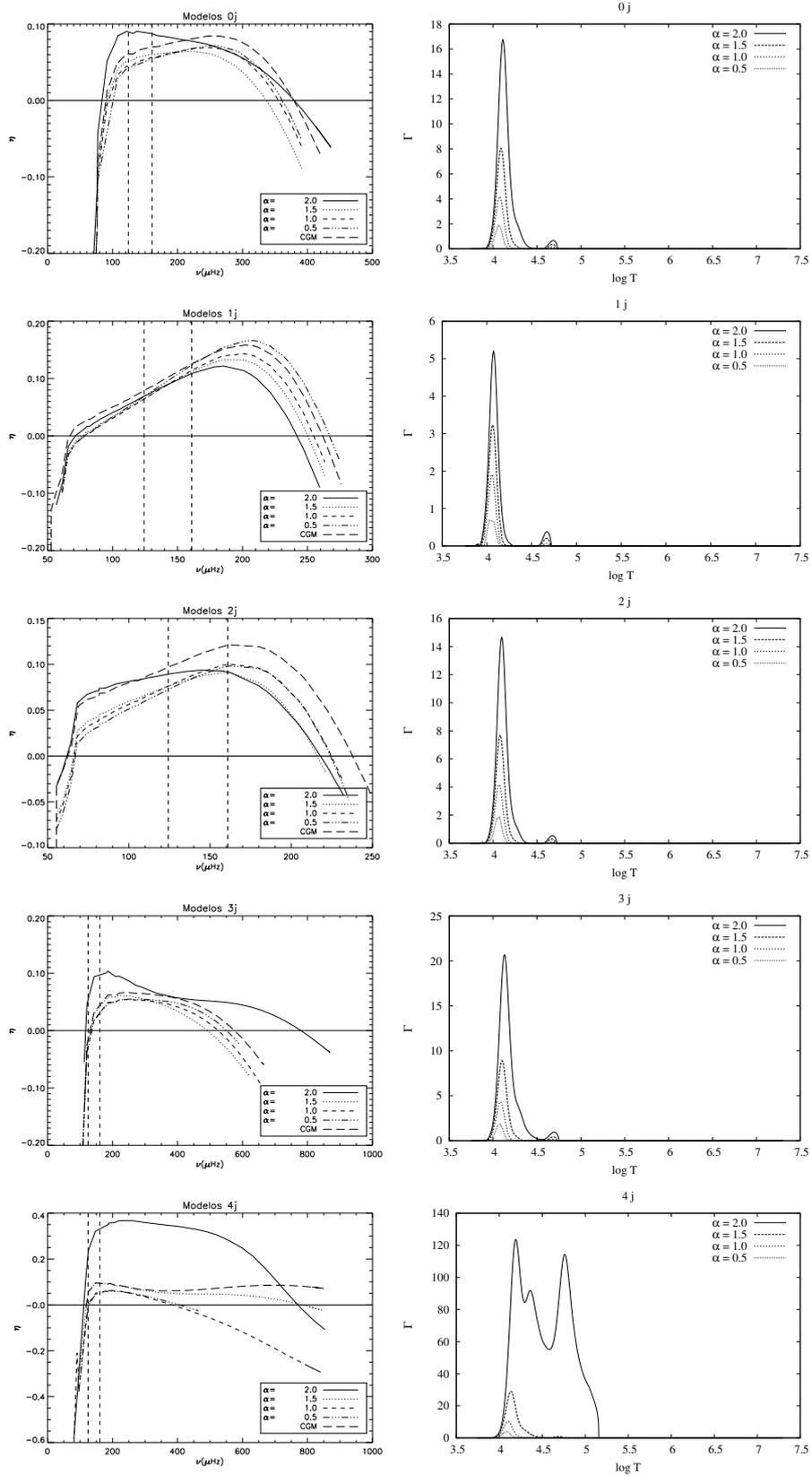


Figura 7.2: *Izquierda:* growth rate de cada modo frente a la frecuencia del mismo, para distintos valores de  $\alpha$ . En líneas verticales se muestran las frecuencias observadas. *Derecha:* Eficiencia convectiva, en función de  $\log T$ , de cada modelo.

para  $\alpha = 2.0$ . Además, la capa convectiva es demasiado ancha, mostrando por tanto un comportamiento completamente diferente al de los otros modelos  $4j$ . Por tanto, parece que pueden descartarse valores de  $\alpha$  superiores a 1.5 para los modelos menos masivos.

Cabe ahora preguntarse por qué existe esta dependencia con la masa de los modelos y no con la temperatura, puesto que es conocido que cuanto más fría es una estrella, mayor es el tamaño de la zona convectiva, y por tanto los resultados deberían ser menos sensibles al valor de  $\alpha$  utilizado. Las estrellas más calientes, en las que la zona convectiva externa es menor, la sensibilidad tendría que ser mayor. Sin embargo, se observa que las diferencias no dependen de  $T_{ef}$ , siendo más importantes las variaciones con la masa estelar. Por ejemplo, aunque los modelos  $1j$  y  $3j$  tienen la misma temperatura efectiva, en estos últimos las variaciones en los límites de los rangos de inestabilidad son mucho mayores.

Con el objeto de comprobar la validez de la aproximación realizada mediante la **MLT**, podemos llevar a cabo una comparación entre el tamaño de la zona convectiva,  $\Delta z$ , en unidades de la escala de presión,  $H_p$ , con el valor de  $\alpha$ . Para ello hemos calculado, por un lado, la extensión de la capa donde se cumple que  $\Gamma \neq 0$  (es decir, donde se halla presente la convección), mientras que por otro hemos obtenido el valor de  $H_p$  proporcionado por el código **CESAM** en la base de la capa convectiva. En la tabla 7.2 se muestra para cada modelo el valor de  $\alpha$ , el cociente  $\Delta z/H_p$ , y el porcentaje de radio que ocupa dicha zona, para cada uno de los modelos obtenidos con **MLT**.  $\Delta z/H_p$  impone un límite superior al valor de  $\alpha$ , por lo que para que el tratamiento de la convección sea correcto, la distancia que recorren las burbujas convectivas debe ser mucho menor que la longitud de la capa, esto es, debe verificarse:  $\alpha \ll \Delta z/H_p$ . Si  $\alpha > \Delta z/H_p$ , no tiene sentido utilizar la **MLT**.

Se observa claramente que el modelo **40** es completamente irrealista, existiendo además diferencias entre los modelos **40** y **41**, y el resto. Por otra parte, aunque los  $3j$  tienen la misma temperatura efectiva que los  $1j$ , las diferencias encontradas al variar  $\alpha$  son mayores en el primer caso, lo que explica la mayor sensibilidad de este grupo de modelos. Lo mismo se puede decir respecto a los modelos  $4j$  y  $2j$ .

Se puede observar cómo el valor de  $\Delta z/H_p$  cae bruscamente conforme disminuye el valor de  $\alpha$ , lo que muestra que se estaba forzando la extensión de la zona convectiva artificialmente, explicando también por qué los modelos  $3j$  y  $4j$  son más sensibles a este parámetro que el resto. Vemos además que pueden descartarse, para el primero,  $\alpha = 2.0$ , y para el segundo, tanto  $\alpha = 2.0$  como  $\alpha = 1.5$ . Podemos observar en la Fig. 7.2 que, salvo para la curva correspondiente a  $\alpha = 2.0$  de los modelos  $4j$ , sus gráficas son muy parecidas a la de los modelos  $3j$ , de forma que la línea correspondiente al **41** es casi igual a la del **30**. Si observamos la tabla 7.2, vemos que del mismo modo, el porcentaje de radio afectado por la convección es muy similar en ambos casos. Esto explicaría por qué en el primero hay dos valores de  $\alpha$  que no son realistas, mientras que en el segundo hay solamente uno.

La Fig. 7.3 muestra el valor de  $\alpha$  frente a  $\Delta z/H_p$  para cada modelo. Solamente para aquéllos para los que se verifique la condición  $\alpha \ll \Delta z/H_p$ , esto es, que se encuentren por debajo de la línea de pendiente unidad, será coherente el tratamiento de la **MLT**. Se observa que no existe ningún caso que cumpla estrictamente esta condición, aunque sí aparecen algunos en los que  $\alpha \lesssim \Delta z/H_p$ , concretamente el modelo **40**, que ya hemos descartado, y los  $i3$ , con  $\alpha = 0.5$ . Estos resultados parecen seleccionar valores pequeños de  $\alpha$ , en contra de lo que se suponía hasta ahora.

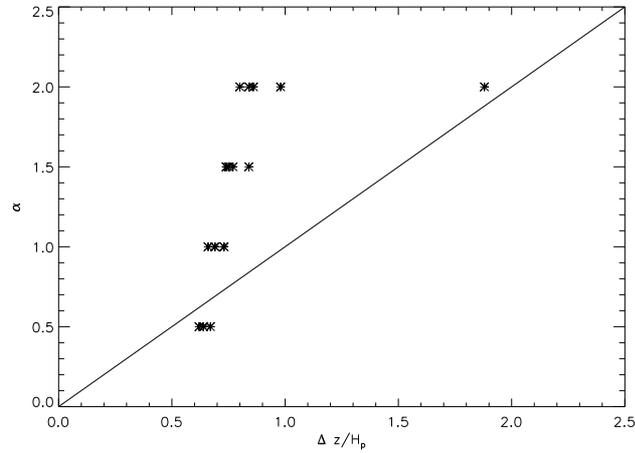


Figura 7.3: Valor de  $\alpha$  utilizado en el cálculo de los modelos, frente al tamaño de la zona convectiva más externa (en unidades de  $H_p$ ). La línea representa los puntos con  $\alpha = \Delta z/H_p$ .

	$\alpha$	$\Delta z/H_p$	%
00	2.0	1.16	0.33
01	1.5	0.82	0.18
02	1.0	0.71	0.14
03	0.5	0.66	0.13
10	2.0	0.81	0.20
11	1.5	0.75	0.18
12	1.0	0.74	0.17
13	0.5	0.71	0.16
20	2.0	1.03	0.33
21	1.5	0.70	0.18
22	1.0	0.70	0.18
23	0.5	0.63	0.15
30	2.0	1.95	0.80
31	1.5	0.87	0.16
32	1.0	0.74	0.12
33	0.5	0.69	0.11
40	2.0	2.58	2.71
41	1.5	1.83	0.77
42	1.0	0.80	0.15
43	0.5	0.67	0.12

Tabla 7.2: Valores de  $\alpha_{\max} = \Delta z/H_p$  y del tanto por ciento del radio estelar que ocupa la zona convectiva para cada uno de los modelos calculados (se incluyen sólo aquéllos para los que se ha utilizado **MLT**).

A partir de este estudio se concluye que este tipo de análisis puede permitir aumentar el conocimiento existente hasta ahora de la zona convectiva externa de estas estrellas. Cuando se tengan observaciones desde el espacio, si éstas abarcan todo el

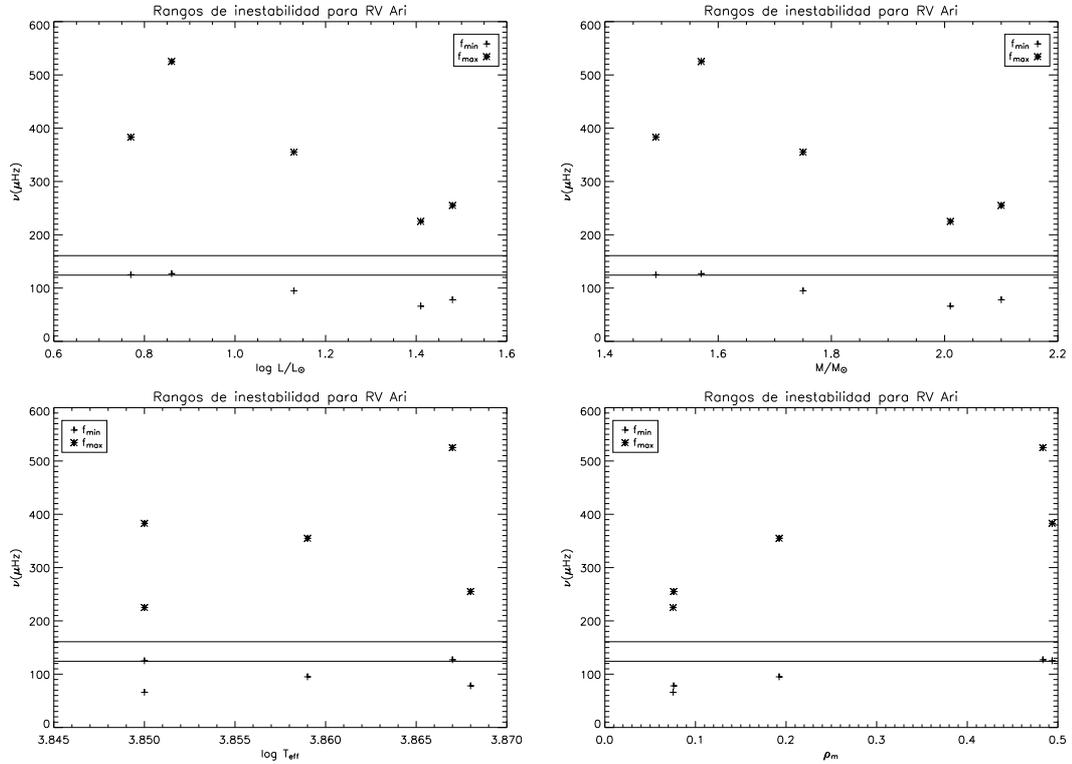


Figura 7.4: Variación de los límites de los rangos de frecuencias inestables en función de la luminosidad (*arriba a la izquierda*), la masa (*arriba a la derecha*), la temperatura efectiva (*abajo a la izquierda*), y la densidad media (*abajo a la derecha*) de los modelos. Se representan también las dos frecuencias observadas mediante líneas horizontales. Se muestran solamente los resultados para  $\alpha = 1.0$ , por claridad de las figuras.

rango de inestabilidad, a partir del análisis de sus límites, se podrá discriminar entre los distintos valores de  $\alpha$ , o al menos establecer alguna cota superior.

Con respecto a los resultados obtenidos con **FST**, vemos en la figura 7.2 que solamente el modelo **40** presenta inconsistencias, ya que los modos de órdenes elevados no se estabilizan. Por tanto, se puede descartar también. Esto es algo lógico, pues el valor de  $\alpha_{\text{FST}}$  utilizado es el solar, que corresponde a  $\alpha_{\text{MLT}} = 1.8$ , mientras que el tamaño de la zona convectiva en estas estrellas predice valores menores, como ya hemos visto. Para el resto de modelos se obtienen límites concordantes con los calculados con la Teoría de la Longitud de Mezcla.

### 7.2.3. Variación del rango de frecuencias inestables en la caja fotométrica

En esta sección mostramos cómo se modifican los rangos de inestabilidad en la caja fotométrica, con el objeto de encontrar relaciones entre éstos y algunas características de las estrellas, tales como la masa, la temperatura efectiva, la luminosidad y la densidad media. Además, esto nos permitirá descartar aquellos modelos para los que se predigan estables los modos observados.

Se puede observar (Figs. 7.2 y 7.4) que para casi todos los modelos considerados

las dos frecuencias observadas caen dentro del rango de inestabilidad. Las únicas excepciones son los modelos menos masivos con  $\alpha$  bajo, ya que en estos casos  $f_1$  cae justo por debajo del límite inferior. No obstante, dado que la determinación de éstos se realiza por interpolación, y con todas las aproximaciones que se utilizan, en principio todos los modelos pueden considerarse válidos para el estudio posterior.

Se observa (Fig. 7.4) que los límites de los rangos de inestabilidad presentan una cierta dependencia con la masa y la luminosidad. Esta es bastante más evidente con la densidad media, aumentando con ella, mientras que parece no existir en absoluto para la temperatura efectiva de los modelos.

#### 7.2.4. Observables no adiabáticos

En las Figs. 7.5 y 7.6 se muestran los valores de los observables no adiabáticos  $f_T$ ,  $\Psi_T$  y  $f_g$  de todos los modelos calculados hasta ahora. Vamos a realizar un análisis de estos resultados.

- $f_T$

Algunos trabajos anteriores (Moya et al., 2004a,b) muestran que el valor de  $f_T$  generalmente presenta un comportamiento casi constante durante la mayor parte del espectro, creciendo de forma brusca desde el final de la zona de inestabilidad hacia periodos menores. No obstante, existen variaciones entre unas estrellas y otras, dependiendo de su temperatura efectiva. Por otro lado, se ha comprobado que el valor de  $f_T$  depende del valor de  $\alpha$  que se utilice, de modo que disminuye conforme aumenta este parámetro, siendo la dependencia mayor conforme disminuye la temperatura efectiva. Este hecho está relacionado con el tamaño de la zona convectiva externa, que aumenta al disminuir la temperatura. También se ha observado que el valor de este observable es independiente de  $\ell$ .

Como es de esperar, se ha obtenido que para todos los modelos calculados el valor de  $f_T$  disminuye cuando aumenta  $\alpha$ . Aunque este resultado es conocido, en el presente trabajo se ha pretendido extender este estudio a otros puntos del diagrama HR no analizados en Moya et al. (2004a,b), esparcidos en un área lo más extensa posible de zona de inestabilidad de las  $\delta$  Sct, con el objeto de confirmar si se mantiene este comportamiento, o si por el contrario aparece alguna anomalía.

Se ha observado que las variaciones en  $f_T$  son menores para el grupo de modelos  $4j$ , precisamente aquél para el que los *growth rates* eran más sensibles al valor de  $\alpha$ . También se puede comprobar que los valores obtenidos con **FST** son bastante parecidos a los correspondientes a  $\alpha_{MLT}$  elevado. Esto es lógico, pues el valor 0.69 corresponde a una calibración del caso solar, que corresponde, como ya hemos dicho, a  $\alpha_{MLT} \sim 1.8$ . Por lo demás, no se observan inconsistencias por el hecho de utilizar este tratamiento.

- $\Psi_T$

El *phase lag* presenta similitudes en su comportamiento con  $f_T$ , aunque en la parte central del espectro su variación es mayor (Moya et al., 2004a,b). Se ha observado que prácticamente para todos los modos, especialmente para los

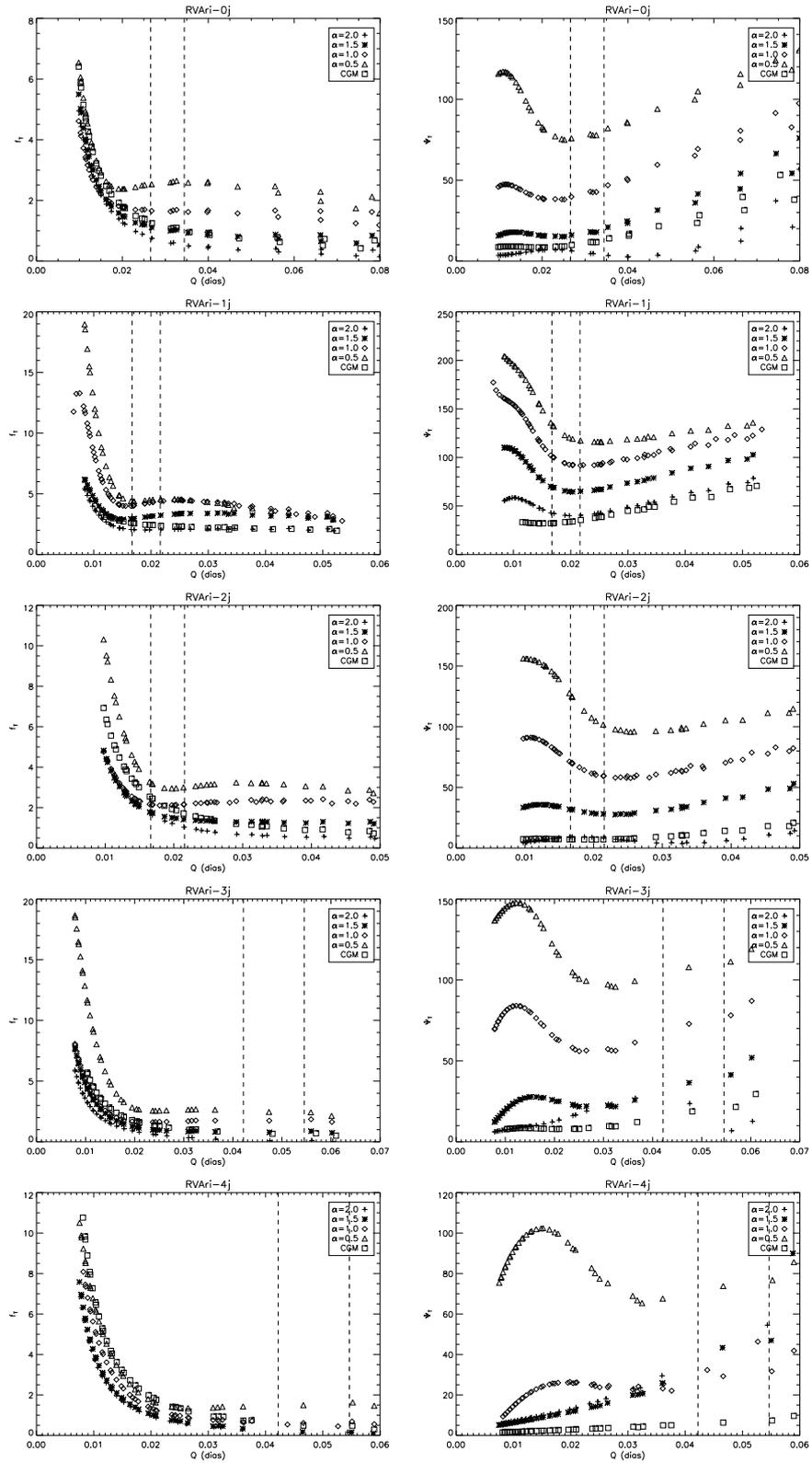


Figura 7.5: Observables no adiabáticos de los distintos modelos obtenidos para la estrella **RV Ari**, en función de la constante de pulsación,  $Q$ . A la izquierda se muestra  $f_T$  y a la derecha el desfase,  $\Psi_T$ . Los valores asociados a los modos observados se muestran mediante líneas verticales.

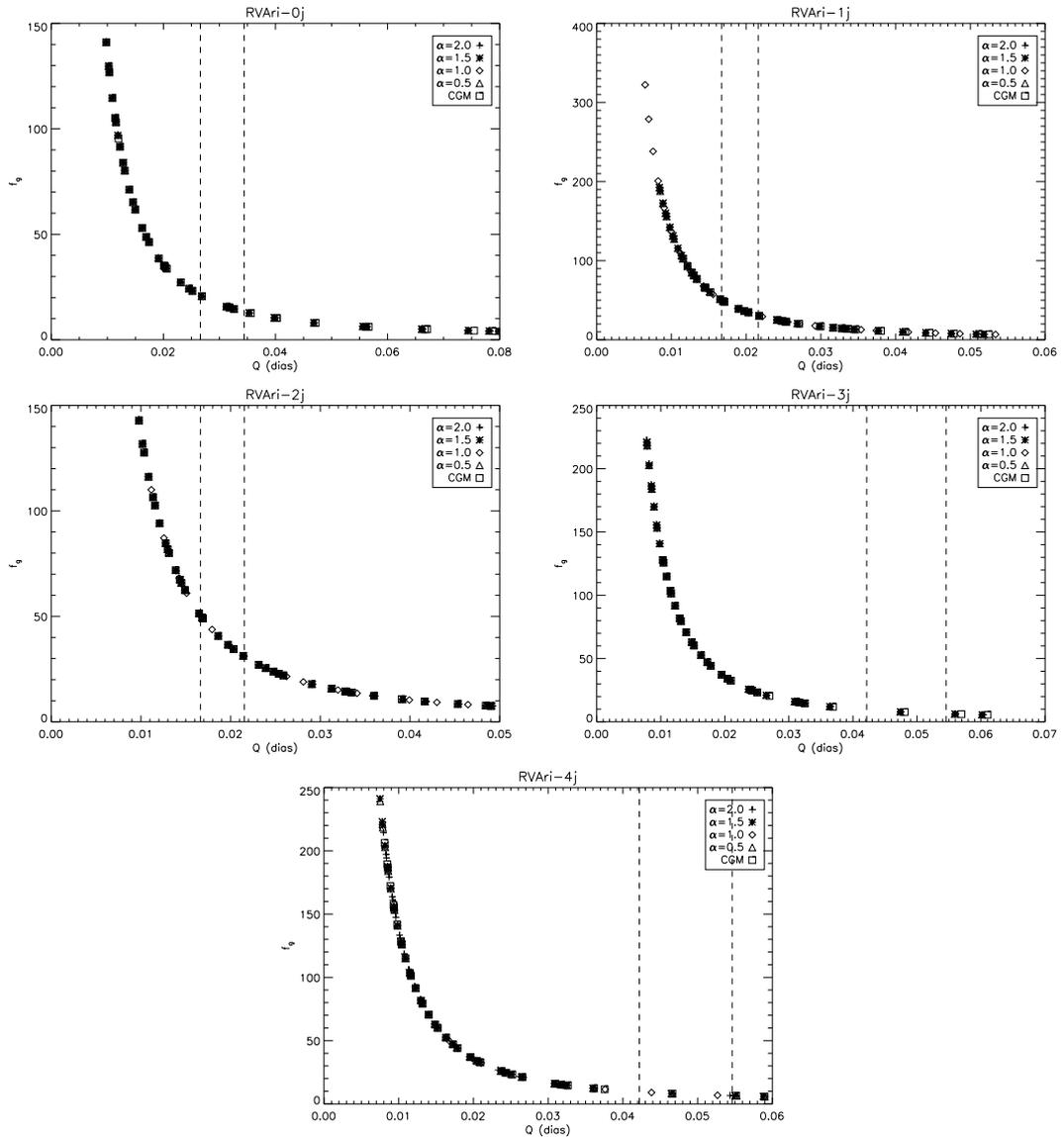


Figura 7.6: Igual que la gráfica anterior, pero en este caso se muestra  $f_g$ .

inestables y los cercanos al fundamental radial, el valor de  $\Psi_T$  difiere significativamente del adiabático,  $180^\circ$ , y que aumenta conforme disminuye el parámetro  $\alpha$ . Se han encontrado diferencias significativas en el comportamiento de este observable según la temperatura de la estrella.

Se observa que  $\Psi_T$  se va acercando a  $180^\circ$  conforme disminuye  $\alpha$ , algo ya conocido de los trabajos mencionados. Sin embargo, hay un punto muy importante: simplemente utilizando valores de  $\alpha$  pequeños, que parecen ser más adecuados para esta estrella, podemos conseguir valores aceptables de este parámetro (algo más elevados). Nótese, sin embargo, que  $f_T$  aumenta, por lo que de esta manera no se logra una descripción más adecuada de las oscilaciones, ya que para obtener valores realistas, este observable debe disminuir mientras aumenta  $\Psi_T$ . Se espera que esta situación mejore con la inclusión de una teoría que incluya la interacción pulsación-convección, con la que los observables no adiabáticos se harían menos sensibles al tamaño de la zona convectiva (Dupret

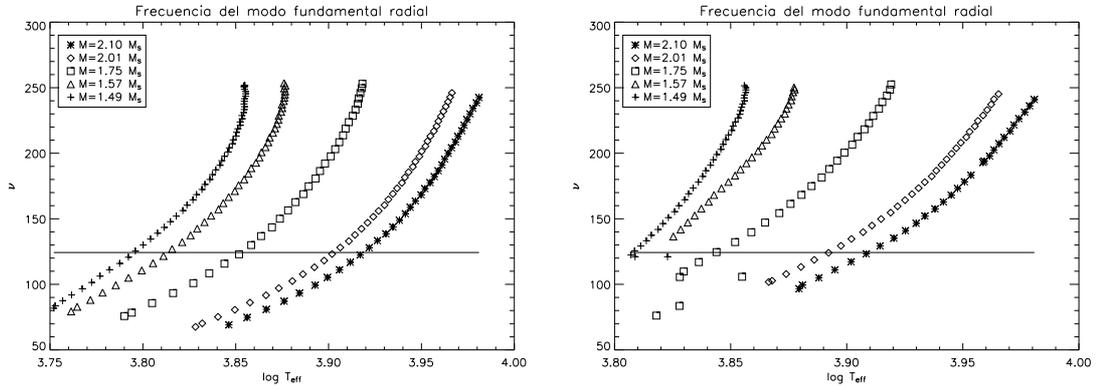


Figura 7.7: Frecuencia del modo fundamental radial a lo largo de la evolución de los distintos modelos. *Izquierda*: modelos calculados con **MLT**, con  $\alpha = 1.0$ . *Derecha*: modelos calculados con **FST**. La línea horizontal muestra la frecuencia  $f_1$  observada.

et al., 2005a).

Se observa que los valores obtenidos para  $\alpha = 2.0$  son excesivamente bajos, lo cual indica de nuevo que estos modelos no son físicamente realistas. Los valores obtenidos con el tratamiento **FST** de la convección son extraordinariamente bajos, en algunos casos por debajo de los que se consiguen con  $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0$ . Esto permite concluir que los resultados son peores con **FST** que con **MLT**.

#### ■ $f_g$

En los estudios sobre los observables no adiabáticos llevados a cabo hasta ahora siempre se ha encontrado que este observable es independiente del valor de  $\alpha$  utilizado. Es el que presenta menos variaciones, debido a que depende solamente de efectos geométricos que, al no ser modificados por el valor de  $\alpha$  utilizado, dejan su valor constante. Este es el mismo comportamiento que se ha encontrado en este trabajo (Fig. 7.6).

Con la **FST** se obtienen los mismos valores que con **MLT**, lo que muestra además la independencia de  $f_g$  con el tratamiento de la convección utilizado.

### 7.2.5. Variación de los observables no adiabáticos a lo largo de la evolución estelar

En esta sección vamos a estudiar cómo varían los observables no adiabáticos para el modo fundamental radial a lo largo de la evolución. Para ello hemos obtenido los tracks o caminos evolutivos completos de los cinco modelos que hemos estado utilizando, desde la **ZAMS** hasta el momento en que se agota el Hidrógeno del núcleo. Los cálculos han sido llevados a cabo de dos formas distintas: usando **MLT**, con  $\alpha = 1.0$ , y utilizando la **FST**.

En primer lugar, en la Fig. 7.7 se muestra la evolución de la frecuencia del modo fundamental radial en función de  $\log T_{ef}$  para los cinco modelos. A la izquierda se representan los resultados obtenidos usando **MLT**, y a la derecha, los correspondientes a **FST**. Se puede observar que la frecuencia disminuye para todos los casos

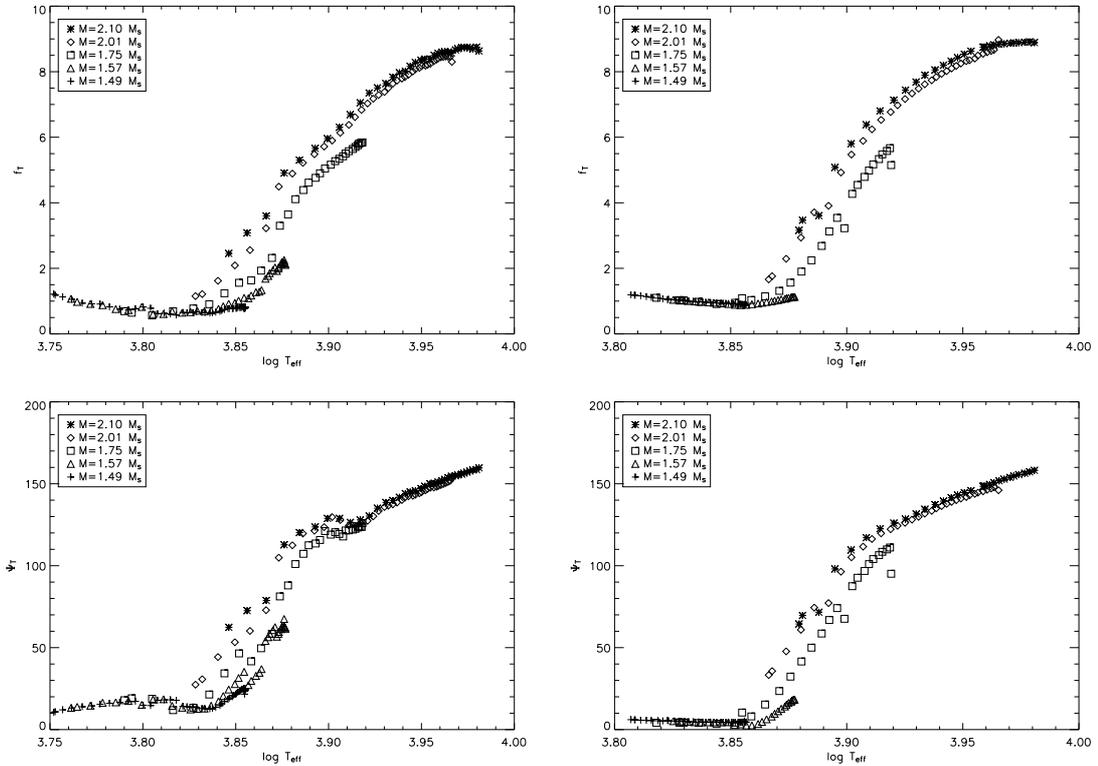


Figura 7.8: Observables no adiabáticos para el modo fundamental radial a lo largo de la evolución de los distintos modelos. Las gráficas de la izquierda muestran los valores obtenidos con **MLT**,  $\alpha = 1.0$ , mientras que para las de la derecha se ha utilizado **FST**. En las gráficas superiores se representa  $f_T$ , y en las inferiores,  $\Psi_T$ .

conforme evoluciona la estrella ( $\log T_{ef}$  disminuye), debido a que la densidad media decrece con la edad.

En la Fig. 7.8 se muestran los valores  $f_T$  y  $\Psi_T$  correspondientes al modo fundamental radial a lo largo de la evolución de los modelos. Puede observarse que  $f_T$  disminuye a lo largo de la vida de la estrella (conforme se enfría), hasta que llega a un valor ( $f_T < 2$ ), que se mantiene prácticamente constante. Para temperaturas altas ( $\log T_{ef} \gtrsim 3.93$ ),  $f_T$  es prácticamente independiente de la masa del modelo y de la teoría de la convección utilizada (Moya et al. 2004a,b demostró que también del valor de  $\alpha_{MLT}$ ). Para temperaturas menores se separan las curvas, hasta que por debajo de  $\log T_{ef} \approx 3.86$  para la **FST** y de  $\log T_{ef} \approx 3.82$  para la **MLT** se unen nuevamente, de forma que este observable vuelve a ser independiente de los modelos utilizados.

Con respecto a  $\Psi_T$ , puede observarse en las gráficas inferiores que también disminuye a lo largo de la evolución, hasta alcanzar un valor prácticamente constante para los modelos más fríos. Para  $\log T_{ef} \gtrsim 3.92$ ,  $\Psi_T$  presenta escasa dependencia con la masa de los modelos y la teoría de la convección utilizada (al igual que antes, Moya et al. 2004a,b demostró que también era independiente del valor de  $\alpha_{MLT}$  usado). Por debajo de esta temperatura la opacidad empieza a influir significativamente en los procesos de intercambio de calor, por lo que se introduce un desfase apreciable que depende de las características del modelo, por lo que las curvas se separan. Para temperaturas inferiores a  $\log T_{ef} \approx 3.82$  para la **MLT** y a  $\log T_{ef} \approx 3.85$

para la **FST**, éstas vuelven a unirse, manteniéndose el valor de  $\Psi_T$  prácticamente independiente de los parámetros físicos que se utilicen.

Estos resultados concuerdan con los obtenidos en los trabajos realizados hasta la fecha, aunque hemos encontrado nuevos comportamientos no conocidos hasta ahora cuando se extiende el estudio hacia temperaturas más bajas.

### 7.2.6. Influencia de la atmósfera

En esta sección estudiaremos cómo influye la interacción de la pulsación con la atmósfera sobre los observables no adiabáticos. Para ello compararemos los valores obtenidos en los casos “con atmósfera” y “sin atmósfera” (terminología introducida en la Sec. 4.3). Este tipo de estudio ya fue realizado por Moya et al. (2004b), donde se encontró que para estrellas más calientes que las consideradas en este trabajo ( $\log T_{ef} = 3.94$ ),  $f_T$  era menor en el segundo caso (“sin atm.”), mientras que con  $\Psi_T$  ocurría lo contrario. Además, para estrellas algo más frías ( $\log T_{ef} = 3.88$ ), se encontró que  $f_T$  apenas se veía modificado por la inclusión de la interacción con la atmósfera (salvo para periodos muy bajos), mientras que el comportamiento de  $\Psi_T$  seguía siendo el mismo. A continuación extenderemos este análisis al rango de temperaturas considerado en este capítulo.

Con respecto a  $f_T$ , los valores obtenidos con ambos tratamientos son muy similares, aumentando las diferencias conforme disminuye el valor de  $\alpha$ . En este caso los resultados son los mismos que los encontrados por Moya et al. (2004b) para estrellas más calientes. El comportamiento de  $\Psi_T$ , sin embargo, presenta algunas novedades, puesto que los valores del desfase son mayores en el caso “con atm.”, salvo para  $\alpha = 2.0$ , que ya hemos descartado. En efecto, para la práctica totalidad de los modelos calculados con  $\alpha = 2.0$  se obtienen comportamientos poco realistas. Por ejemplo, en los modelos **30**, **40** y **41** se obtienen valores excesivamente bajos.

### 7.2.7. Conclusiones

Los resultados obtenidos de los estudios realizados hasta ahora parecen confirmar trabajos anteriores, como los de Moya et al. (2004a,b). Se ha encontrado que para los modelos más fríos los valores de  $f_T$  y de  $\Psi_T$  se hacen independientes del modelo y del valor de  $\alpha$  utilizado. No obstante, este resultado se basa en un tratamiento que no tiene en cuenta la interacción convección-pulsación, por lo que la introducción de esta mejora puede modificar las conclusiones, ya que se espera que proporcione valores algo menores de  $f_T$ , y más cercanos a  $180^\circ$  para  $\Psi_T$  (Dupret et al., 2005a). Además, al haber extendido el intervalo de temperaturas hacia zonas más frías, han aparecido algunas novedades en el comportamiento relativo de los valores de  $\Psi_T$  con y sin atmósfera.

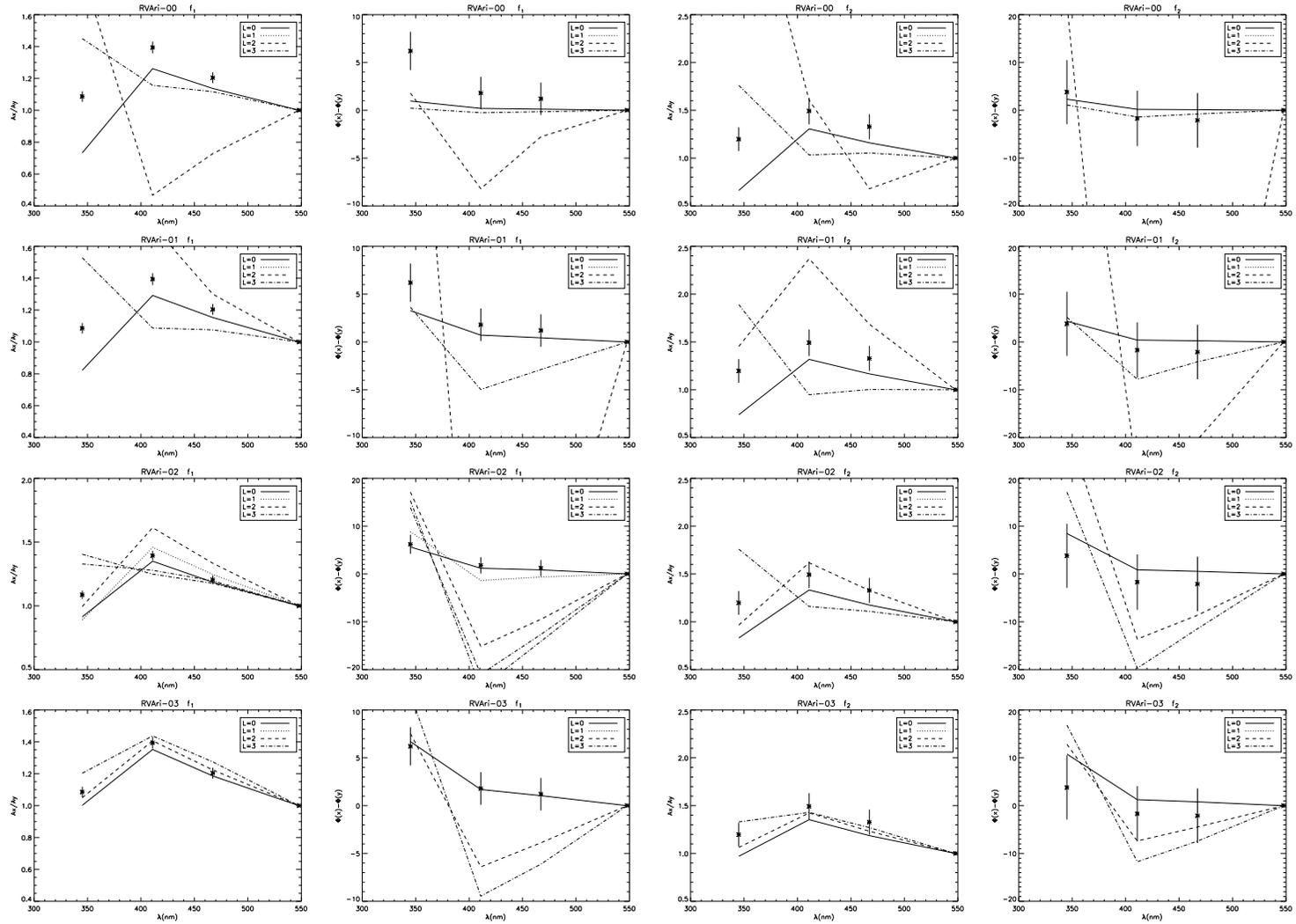


Figura 7.9: Cocientes de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para las dos frecuencias. Grupo de modelos  $0j$ , obtenidos usando **MLT**. En orden descendente:  $\alpha_{MLT} = 2.0, 1.5, 1.0$  y  $0.5$ .

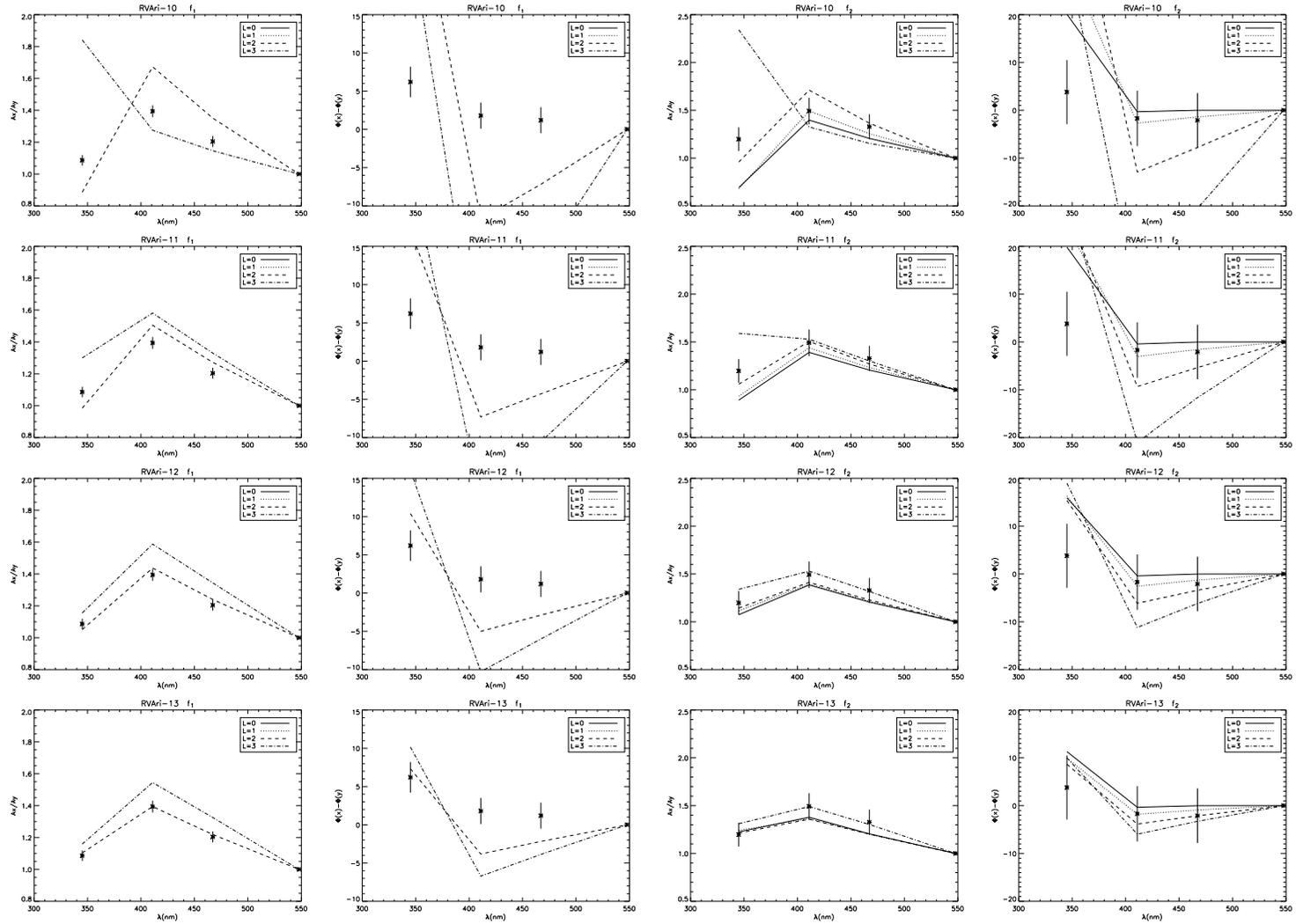


Figura 7.10: Cociente de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para las dos frecuencias. Grupo de modelos  $1j$ , obtenidos usando **MLT**. En orden descendente:  $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0$  y  $0.5$ .

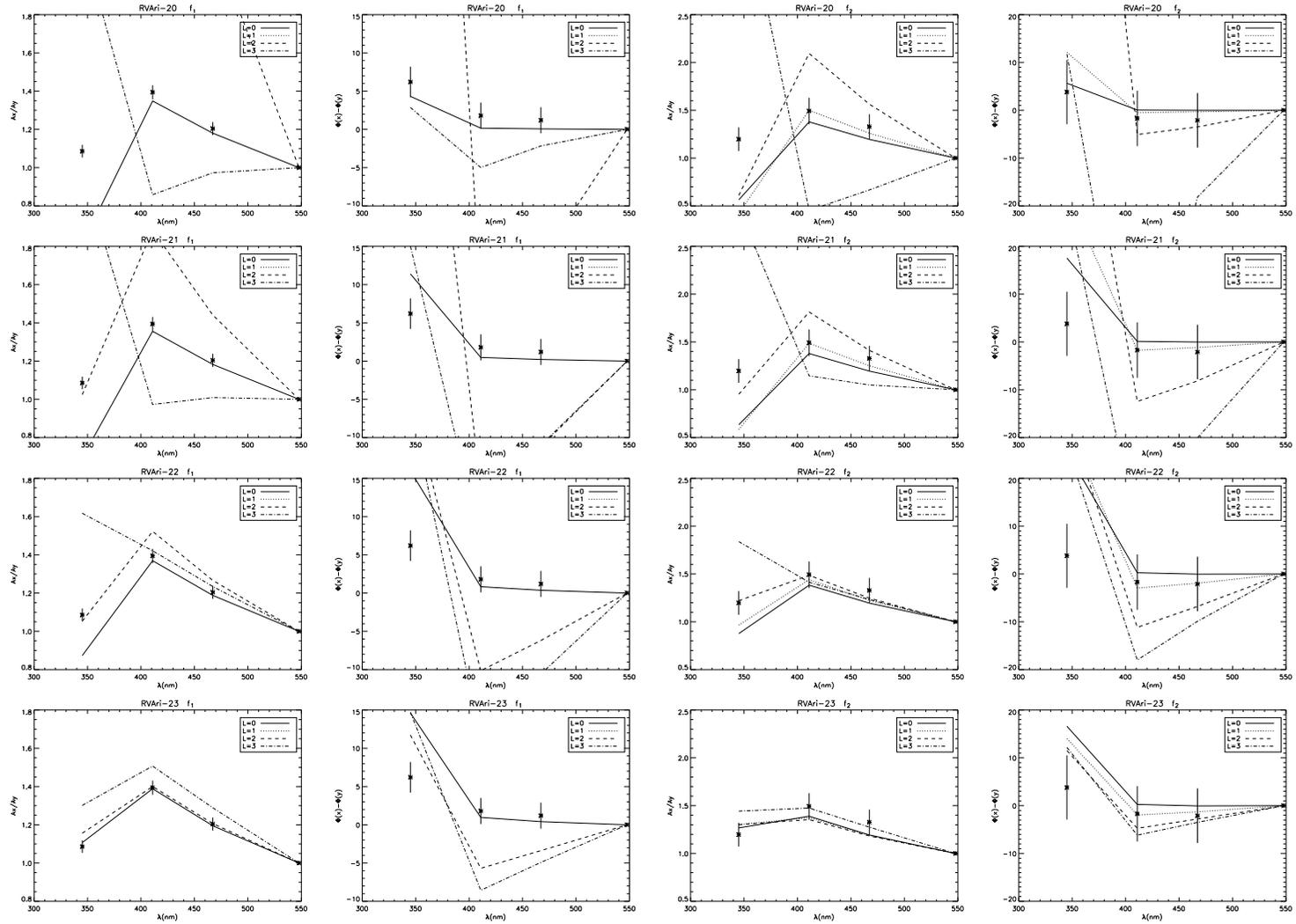


Figura 7.11: Cociente de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para las dos frecuencias. Grupo de modelos  $2j$ , obtenidos usando **MLT**. En orden descendente:  $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0$  y  $0.5$ .

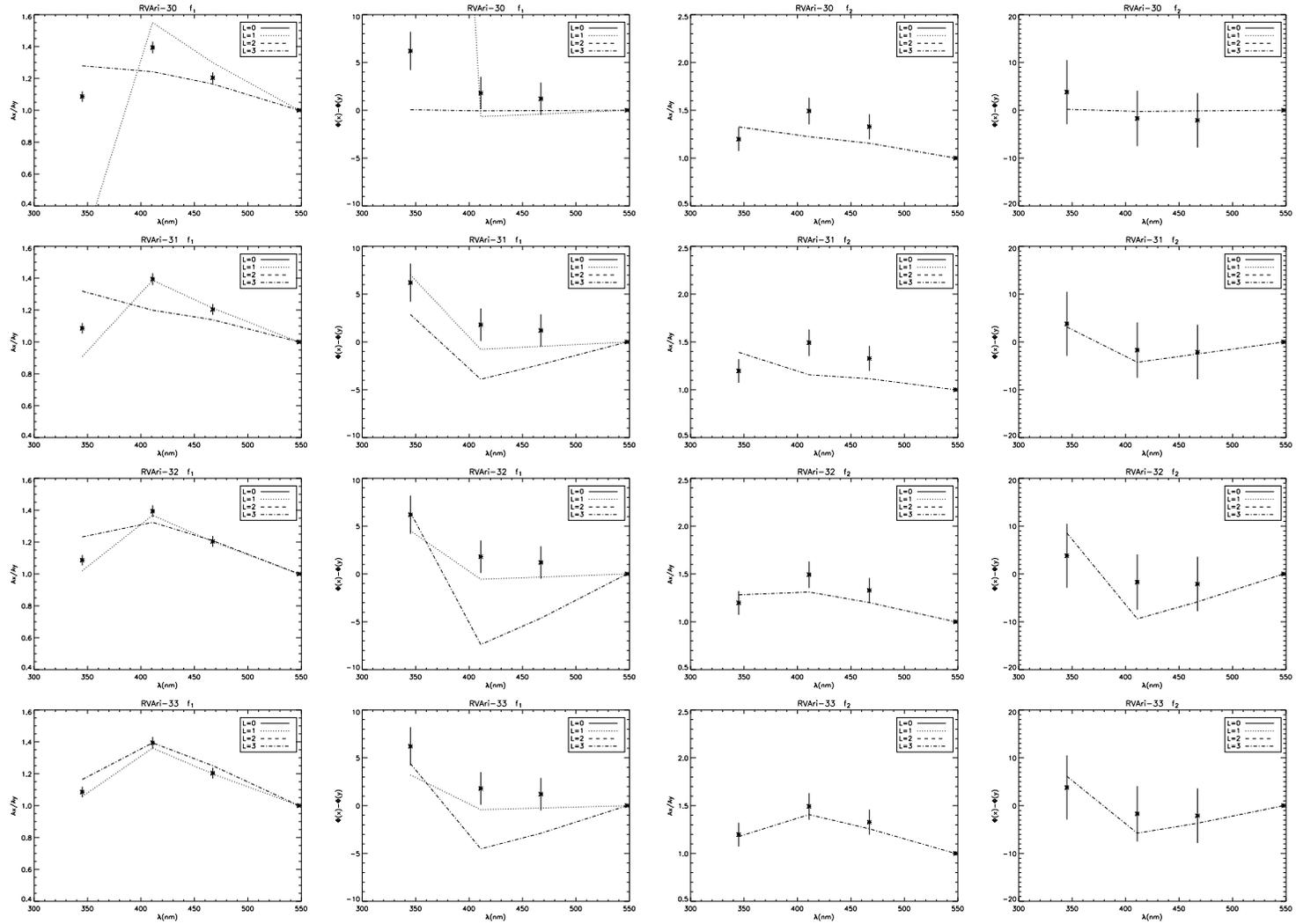


Figura 7.12: Cociente de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para las dos frecuencias. Grupo de modelos  $3j$ , obtenidos usando **MLT**. En orden descendente:  $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0$  y  $0.5$ .

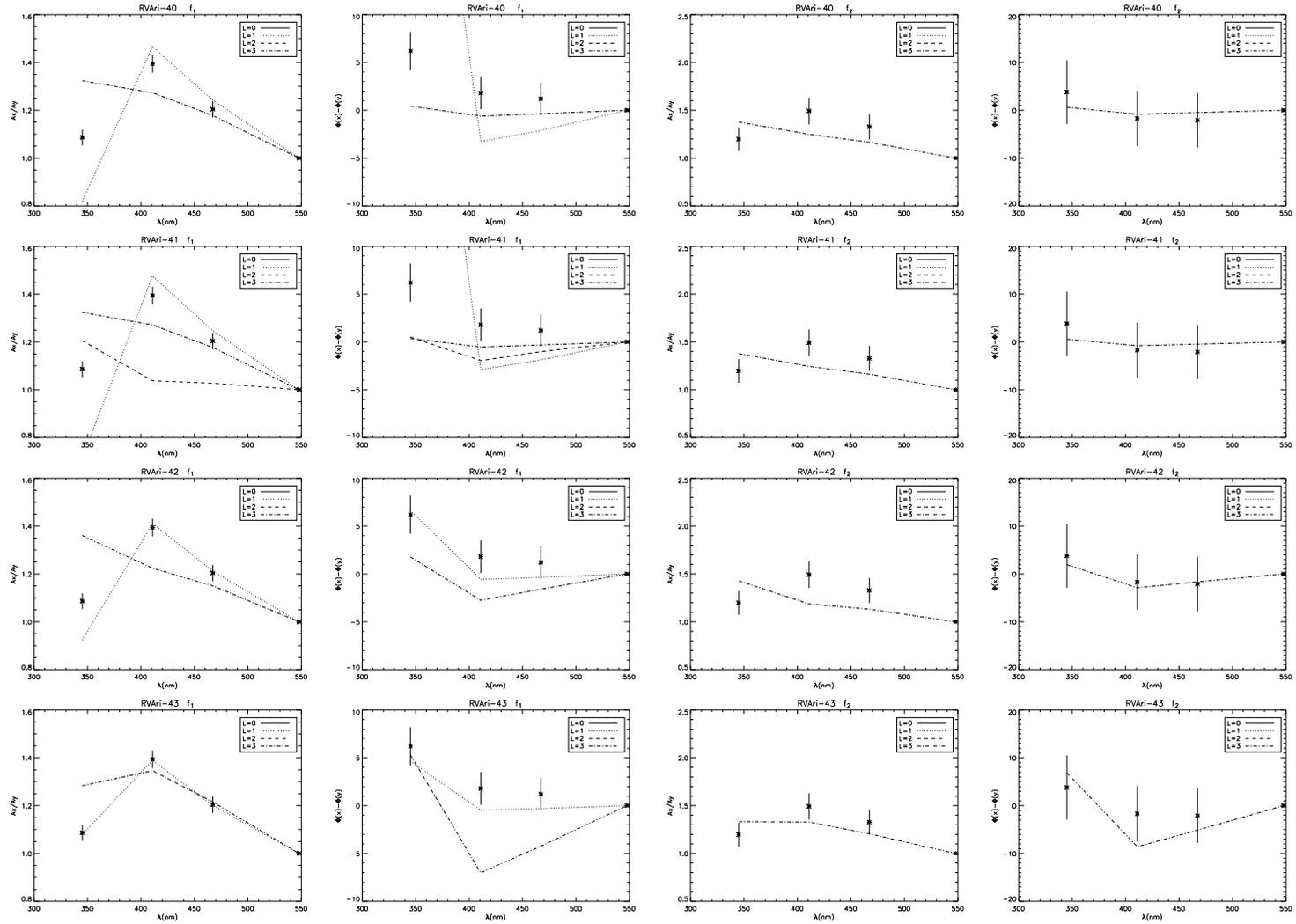


Figura 7.13: Cociente de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para las dos frecuencias. Grupo de modelos  $4j$ , obtenidos usando MLT. En orden descendente:  $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0$  y  $0.5$ .

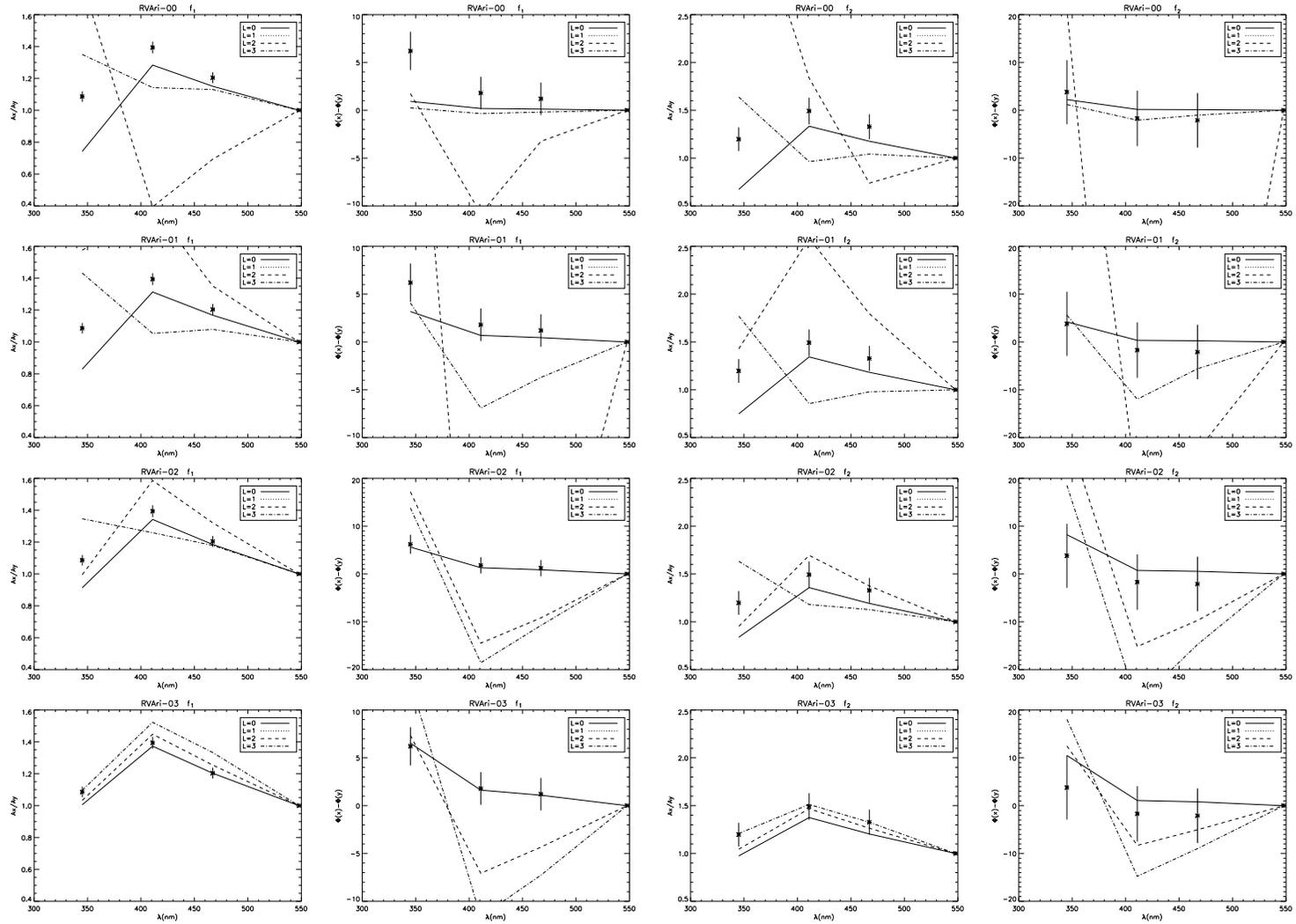


Figura 7.14: Cociente de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para las dos frecuencias, usando **MLT** y  $\alpha = 0.5$  en la atmósfera. Modelo central (grupo 0j). *Izquierda*: Frecuencia  $f_1$ , *derecha*: frecuencia  $f_2$ . En orden descendente:  $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0, 0.5$ .

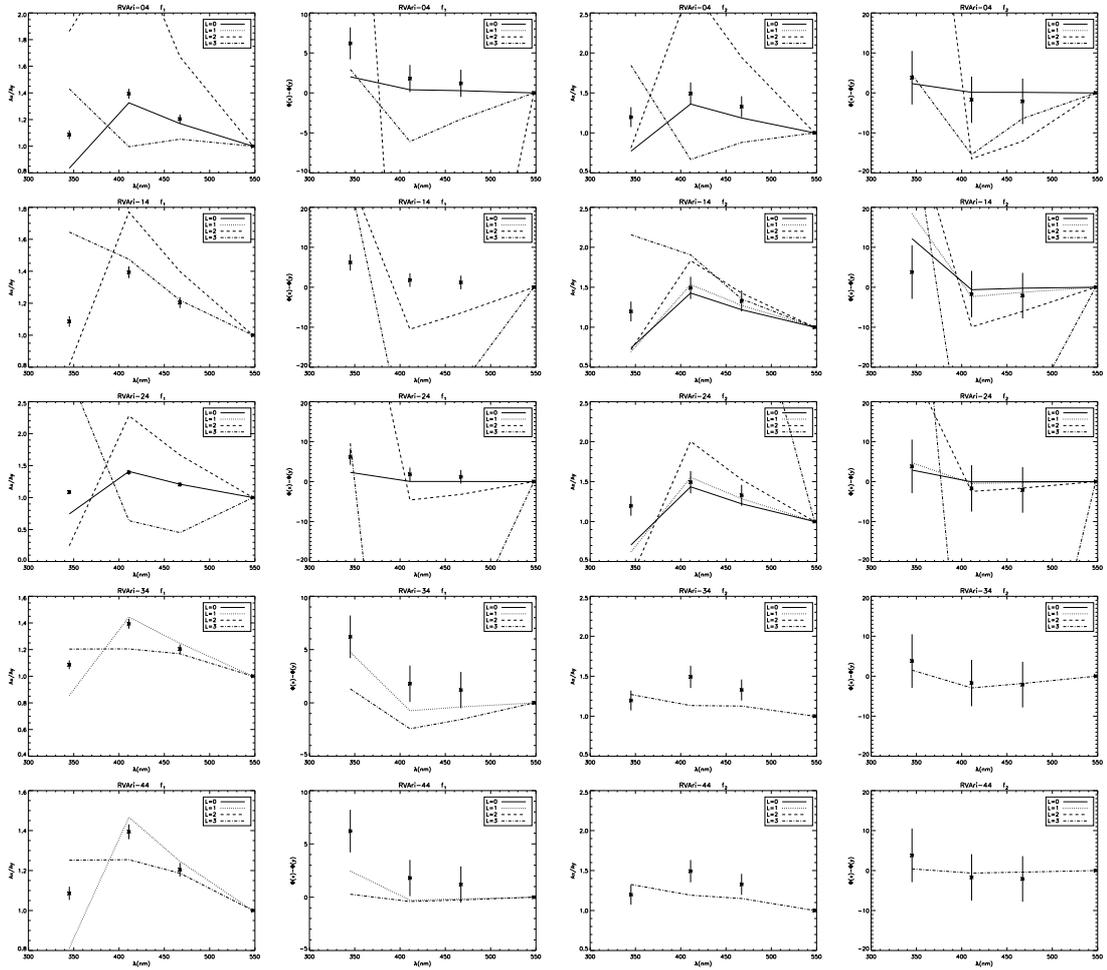


Figura 7.15: Cocientes de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para todos los modelos obtenidos usando **FST**. En cada línea se muestra el cociente de amplitudes y la diferencia de fases para  $f_1$ , y a continuación, lo mismo para  $f_2$ .

## 7.3. Identificación de los modos

### 7.3.1. Fotometría Strömgen

A partir de los observables no adiabáticos calculados en la sección anterior se pueden obtener los valores de fase y amplitud en los filtros Strömgen, con el objeto de comparar con los resultados observacionales. Para ello hemos empleado un código desarrollado en nuestro grupo (Garrido et al., 1990; Garrido, 2000), que permite obtener estas magnitudes a partir de la fórmula de Watson (Sec. 6.2). El código está preparado para utilizar tanto **MLT** como **FST** en las zonas convectivas atmosféricas.

Con el objeto de obtener la mayor coherencia posible en los cálculos numéricos realizados, se ha utilizado el mismo tratamiento de la convección tanto en el interior como en la atmósfera, de modo que para los modelos  $i0, \dots, i3$  se ha hecho uso de la **MLT** en las dos zonas, mientras que para los  $i4$  se ha empleado la **FST**. Una limitación que presenta el código es que hasta ahora solamente está preparado para trabajar con  $\alpha_{\text{MLT}} = 1.25$  y  $\alpha_{\text{MLT}} = 0.5$  en la atmósfera, a pesar de que los valores utilizados en el interior sean 2.0, 1.5, 1.0 y 0.5. Aun así, no se esperan demasiadas

	$\alpha$	$f_1$	$f_2$
00	2.0	-	-
01	1.5	-	-
02	1.0	(1,0)	(2,0)
03	0.5	(1,0)	(2,0) (-1,2)
04	<b>FST</b>	-	(2,0)
10	2.0	-	(4,0) (2,1)
11	1.5	-	(4,0) (2,1) (1,2)
12	1.0	-	(4,0) (2,1) (1,2) (0,3)
13	0.5	-	(4,0) (2,1) (1,2) (0,3)
14	<b>FST</b>	-	(4,0) (2,1)
20	2.0	(3,0)	(4,0) (2,1)
21	1.5	(3,0)	(4,0) (2,1)
22	1.0	(3,0)	(4,0) (2,1)
23	0.5	(3,0)	(4,0) (2,1) (1,2) (0,3)
24	<b>FST</b>	(3,0)	(4,0) (2,1)
30	2.0	-	-
31	1.5	(-2,1)	-
32	1.0	(-2,1)	(-4,3)
33	0.5	(-2,1)	(-4,3)
34	<b>FST</b>	(-2,1)	-
40	2.0	-	-
41	1.5	-	-
42	1.0	(-2,1)	-
43	0.5	(-2,1)	(-4,3)
44	<b>FST</b>	-	-

Tabla 7.3: Identificación de los modos para las dos frecuencias de todos los modelos. Para los modelos calculados con **MLT** se ha utilizado  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 1.25$ , mientras que para los obtenidos con **FST** se ha empleado  $\alpha_{\text{FST, atm}} = 0.69$ . Los pares  $(n, \ell)$  indican los valores del orden radial y del grado angular, en ese orden.

inconsistencias. Los modelos de atmósfera utilizados han sido los de Kurucz (1993, 1998) (**MLT**), y Kupka y Montgomery (2002) (**FST**). No se ha tenido en cuenta la rotación de la estrella ni los posibles acoplamientos de los modos (ver Sec. 7.5).

A partir de los resultados obtenidos se han representado los cocientes de amplitudes y las diferencias de fase entre filtros, siendo el de referencia el **y**. Comparando estos resultados con los datos teóricos, hemos intentado proceder a la identificación de los modos, lo que nos ha permitido obtener información adicional sobre el interior estelar.

Para llevar a cabo este estudio se han seleccionado las frecuencias más próximas a las observadas, dentro de un rango de un 5% en torno a éstas. Con este criterio se intenta, por un lado, obtener un intervalo en frecuencias lo suficientemente ancho como para poder analizar varios modos, y por otro, restringir su número para que no sea demasiado elevado y se complique el estudio. No obstante, dado que la variación de las frecuencias de pulsación con  $\alpha$  es inferior a un 5%, este criterio nos

permite analizar los mismos modos para todos los modelos del mismo grupo, por lo que podemos estudiar cómo se modifican los índices de color con el valor de este parámetro. Además, el único efecto no tenido en cuenta hasta ahora, y que puede afectar a las frecuencias, es la rotación. Para las velocidades consideradas (ver Sec. 7.5) se espera que éstas no varíen más de un 5% (al menos para los modos  $m = 0$ ), por lo que este margen nos asegura que la rotación no invalidará la identificación realizada debido a grandes modificaciones en las frecuencias de oscilación.

Para distintos grupos, los modos que mejor se ajustan a las frecuencias observadas serán diferentes, cambiando tanto el valor de  $n$  como de  $\ell$  de un punto de la caja fotométrica a otro.

Puede observarse en las Figs. 7.9 a 7.15 que no siempre aparecen resultados correspondientes a todos los  $\ell$ , mientras que en la leyenda sí que se especifican todos ellos, desde  $\ell = 0$  a  $\ell = 3$ . Esto se ha hecho así por completitud, considerando que no lleva a engaño, ya que, cuando no se observe en una gráfica un determinado  $\ell$ , esto quiere decir únicamente que no existía ningún modo con ese  $\ell$  cuya frecuencia se diferenciara de alguna de las observadas en un 5%.

#### ■ Modelos $0j$

Como puede apreciarse en la Fig. 7.9, el análisis de los cocientes de amplitudes y diferencias de fase revela que los modos observados se predicen fundamentalmente con  $\ell = 0$ . La mejor identificación corresponde al fundamental radial y a su primer sobretono, lo cual viene apoyado por el cociente de frecuencias observado: 0.772. Por tanto, podemos proponer que  $f_1$  debe corresponder al modo (1,0), y  $f_2$  al (2,0). No obstante, todavía los resultados para  $f_2$  son compatibles con  $\ell = 2$ , sobre todo para valores de  $\alpha_{\text{MLT}}$  pequeños ( $\alpha_{\text{MLT}} = 0.5$ ). En efecto, cuanto menor es el valor de este parámetro, más cercanos son los valores de las diferencias de fase y los cocientes de amplitudes a los observados. Por otra parte, las predicciones para los modos radiales apenas se modifican. Los modelos más adecuados parecen ser, por tanto, los correspondientes a  $\alpha_{\text{MLT}} \leq 1.0$ , aunque en este caso se pierde algo de discriminación, ya que aparecen más posibilidades de identificación.

Nótese que el filtro **u** es el que proporciona peores resultados. Esto es algo general, que nos encontraremos en las identificaciones subsiguientes, debido básicamente a que los modelos de Kurucz no predicen valores adecuados en el ultravioleta de las derivadas del flujo y de los coeficientes de “limb-darkening” con respecto a la temperatura efectiva. Por último, es necesario comentar que la interacción convección-pulsación puede modificar estos resultados, proporcionando una concordancia mayor con los datos observacionales y una menor dependencia en  $\alpha$  (Dupret et al., 2005a).

#### ■ Modelos $1j$

En estos modelos las predicciones para  $f_1$  son completamente diferentes a las de  $f_2$ . En efecto, en el primer caso no se tiene ningún modo que prediga los índices de color observados, mientras que en el segundo todos son representativos (ver Tabla 7.3). Como en el caso anterior, cuanto menor es el valor de  $\alpha_{\text{MLT}}$ , mayor es la correspondencia con los valores observados. En este sentido se obtienen los mejores resultados cuando  $\alpha_{\text{MLT}} = 0.5$ . Puede observarse también que las variaciones en la fase son mayores que las correspondientes a la amplitud.

- **Modelos 2j**

Con respecto a este grupo de modelos, solamente hay un modo compatible con las observaciones de  $f_1$ , el segundo sobretono radial. En el caso de  $f_2$ , cuando se considera un valor de  $\alpha_{\text{MLT}}$  pequeño, todos los modos se corresponden con los valores observados, y no puede llevarse a cabo una identificación satisfactoria.

- **Modelos 3j y 4j**

En estos casos,  $f_1$  puede asociarse con un modo  $\ell = 1$ , mientras que  $f_2$  se corresponde con un  $\ell = 3$ . Como ocurría para los modelos anteriores, las predicciones teóricas se acercan más a los índices de color observados para  $\alpha_{\text{MLT}} \leq 1$ .

Podemos obtener varias conclusiones de este estudio:

1. Los mejores resultados se obtienen para el modelo central, y en concreto, para  $\alpha_{\text{MLT}} \leq 1.0$ . Además, las dos frecuencias parecen corresponderse con el modo fundamental radial y con el primer sobretono radial, lo que es coherente con el valor del cociente entre sus frecuencias, 0.772.
2. En los modelos más masivos no se puede llevar a cabo una identificación adecuada, o bien porque no se encuentra ningún modo compatible con las observaciones, o bien porque ésta no es unívoca. En los menos masivos se asocian ambas frecuencias con modos no radiales.
3. Para los modelos menos masivos, los mejores resultados se obtienen para valores de  $\alpha_{\text{MLT}}$  pequeños, en concreto,  $\alpha_{\text{MLT}} \leq 1.0$ , aunque en este caso se pierde discriminación en la identificación de los modos.

Veamos ahora cómo cambia la identificación de los modos cuando se utiliza la **FST** como teoría de la convección (Fig. 7.15). Los resultados son parecidos a los obtenidos con **MLT**, y  $\alpha_{\text{MLT}} = 1.5$  y 2.0, aunque las predicciones teóricas de los índices de color coinciden peor con los observados. En efecto, para el modelo central se identifica  $f_2$  con el primer sobretono radial; con el modelo **24** se predice  $\ell = 0$  para  $f_1$ , y  $\ell = 0, 1$  para  $f_2$ ; para el **34** se tiene  $\ell = 1$  para  $f_1$  y  $\ell = 3$  para  $f_2$ ; y por último, para el **44** no se consigue ninguna identificación de las frecuencias observadas. En la tabla 7.3 se resumen estos resultados.

Hemos visto que las predicciones teóricas para el modelo central no dependen fuertemente del valor de  $\alpha_{\text{MLT}}$ , a pesar de que los observables no adiabáticos, y en concreto, el *phase lag*, varían bastante en un caso y en otro. De hecho, ya hemos visto que para  $\alpha_{\text{MLT}} \geq 1$  los valores obtenidos no son realistas. Cabe preguntarse entonces por qué, a pesar de ello, la dependencia de los índices de color es mucho menor que la esperada. El mismo interrogante surge si se tiene en cuenta el tratamiento de la convección utilizado, pues los valores de  $f_T$  y de  $\Psi_T$  eran diferentes según se tratara de la **MLT** o la **FST**.

Parece, pues, que la fórmula de Watson es poco sensible al valor de  $\alpha_{\text{MLT}}$  o de la teoría de la convección utilizada, hecho que trataremos de explicar a continuación. Para ello se han calculado los valores de las siguientes variables, que intervienen en dicha fórmula, para cada uno de los filtros:

$$\delta x = b_{\ell x} x_t f_T, \quad (7.1)$$

$$\gamma_x = -b_{\ell x} [(\ell - 1)(\ell + 2) + x_g] f_g, \quad (7.2)$$

donde  $x$  representa a cada uno de los filtros, y:

$$b_{\ell\lambda} = \int_0^1 h_\lambda \cos \theta P_\ell(\cos \theta) d \cos \theta, \quad (7.3)$$

siendo  $h_\lambda$  la función de “limb-darkening” (B.5). Además, se han definido:

$$x_t = \alpha_{Tx} + \beta_{Tx}, \quad (7.4)$$

$$x_g = \alpha_{gx} + \beta_{gx}, \quad (7.5)$$

donde:

$$\alpha_{T\lambda} = \frac{\partial \ln F_\lambda^+}{\partial \ln T_{ef}}, \quad \alpha_{g\lambda} = \frac{\partial \ln F_\lambda^+}{\partial \ln g_e}, \quad (7.6)$$

$$\beta_{T\lambda} = \frac{\partial \ln b_{\ell\lambda}}{\partial \ln T_{ef}}, \quad \beta_{g\lambda} = \frac{\partial \ln b_{\ell\lambda}}{\partial \ln g_e}, \quad (7.7)$$

y  $F_\lambda^+$  es el flujo monocromático (B.2) para la longitud de onda  $\lambda$ .

Por tanto,  $\delta x$  y  $\gamma_x$  dan información sobre las derivadas de flujo y de la integral sobre el “limb-darkening” para cada filtro  $x$ . Los que se han utilizado han sido el  $\mathbf{v}$  y el  $\mathbf{b}$ , mientras que se han descartado los del  $\mathbf{u}$ , ya que los resultados para éste son algo peores que los de los anteriores. Esto se debe a que las derivadas del flujo y de los coeficientes de “limb-darkening” son muy sensibles en el ultravioleta a la estructura de la atmósfera, por lo que al introducirlas en la fórmula de Watson, aparecen grandes variaciones en las fases y las amplitudes. Además, las derivadas para este filtro tienen signo contrario a la de los otros dos, por lo que no sólo variará más, sino que además lo hará en sentido contrario a los filtros  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{v}$ , aumentando las diferencias con éstos. Hemos estudiado solamente el modelo central, esto es, el grupo  $0j$ , con  $j = 0, \dots, 4$ . Para la atmósfera se ha utilizado, o bien la **MLT** (para los modelos **00**,  $\dots$ , **03**), con  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 1.25$  y  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 0.5$ , o bien la **FST** (para el modelo **04**). En concreto, los resultados mostrados en las gráficas 7.9 - 7.13 se han obtenido usando  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 1.25$ . Hemos repetido los cálculos para estos modelos, pero con  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 0.5$ . El único modo analizado ha sido fundamental radial. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 7.4.

Puede observarse en primer lugar que los valores de  $\gamma_v$  y  $\gamma_b$  no varían considerablemente, debido a que dependen sobre todo de aspectos geométricos (nótese que en su definición interviene  $f_g$ , variable que es independiente del tratamiento de la convección utilizado, como ya hemos comentado en la Sec. 7.2.4). Para  $\delta v$  y  $\delta b$ , las variaciones son más acusadas, incrementándose su valor conforme disminuye  $\alpha_{\text{MLT}}$ . Los resultados para  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 1.25$  y  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 0.5$  son bastante parecidos entre sí, mientras que los obtenidos con **FST** se sitúan cerca de los correspondientes a  $\alpha_{\text{MLT}} = 1.5$  en el interior. Estos resultados aparentemente no se corresponden con los obtenidos por Heiter et al. (2002) y Barban et al. (2003).

Los autores de estos trabajos muestran que las diferencias existentes en los flujos, los coeficientes de “limb-darkening” y las correspondientes derivadas, encontradas entre los casos  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 1.25$  y  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 0.5$ , son bastante mayores que las obtenidas entre este último y **FST**. Además, las observaciones suelen concordar mejor con los resultados calculados con  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 0.5$  y **FST**, de forma que se concluye que la eficiencia convectiva en la atmósfera debe ser bastante pequeña. Sin embargo, nosotros encontramos diferencias mayores entre los valores correspondientes a

$\alpha$ interior	$\alpha$ atm.	$\delta v$	$\gamma_v$	$\delta b$	$\gamma_b$	$f_T$	$\Psi_T$
2.0	1.25	3.437	2.558	3.001	2.404	0.597	4.255
1.5	1.25	5.901	2.559	5.151	2.405	1.025	17.824
1.0	1.25	9.703	2.562	8.474	2.407	1.687	42.656
0.5	1.25	15.208	2.562	13.281	2.407	2.644	77.836
2.0	0.5	3.470	2.601	3.028	2.412	0.597	4.255
1.5	0.5	5.957	2.601	5.198	2.412	1.025	17.824
1.0	0.5	9.796	2.605	8.554	2.415	1.687	42.656
0.5	0.5	15.353	2.605	13.406	2.415	2.644	77.836
FST	FST	6.364	2.636	5.539	2.404	1.095	11.948

Tabla 7.4: Valores de las distintas variables que intervienen en la fórmula de Watson, en función del tratamiento de la convección y del valor de  $\alpha$  utilizado en el interior y en la atmósfera estelar. Modelos  $0j$ .

$\alpha_{\text{MLT, atm}} = 1.25$  y  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 0.5$  que entre éstos y **FST**. No obstante, no hay ninguna contradicción, si tenemos en cuenta que lo que estamos analizando son los valores de  $\delta v$  y  $\delta b$ . En las definiciones de estas cantidades entran en juego tanto las derivadas del flujo y de los coeficientes de “limb-darkening”, como los valores de  $f_T$  y  $\Psi_T$ . Por tanto, aunque las derivadas en los casos  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 0.5$  y **FST** sean muy parecidas, las diferencias en los observables no adiabáticos hacen que  $\delta v$  y  $\delta b$  cambien bastante según el tratamiento de la convección utilizado, mientras que las pequeñas diferencias entre  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 1.25$  y  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 0.5$  se deben únicamente a las existentes entre las derivadas del flujo y los coeficientes de “limb-darkening” en la atmósfera.

Una vez visto cómo varían estas cantidades, pasamos a estudiar su influencia sobre los índices de color. Los resultados se muestran en la tabla 7.5. Analicemos en primer lugar la fase. Teniendo en cuenta que los resultados están expresados en grados, puede observarse que las diferencias de fase cambian muy poco, siendo estas variaciones indetectables observacionalmente. Esto es debido a que, aunque tanto la fase del filtro **v** como la del **b** sí se modifican sustancialmente, sus cambios se

$\alpha$ interior	$\alpha$ atm.	$\phi_v - \phi_y$	$A_v/A_y$	$\phi_b - \phi_y$	$A_b/A_y$
2.0	1.25	0.193	1.261	0.116	1.367
1.5	1.25	0.716	1.292	0.434	1.153
1.0	1.25	1.355	1.321	0.830	1.169
0.5	1.25	1.693	1.352	1.047	1.186
2.0	0.5	0.185	1.284	0.121	1.150
1.5	0.5	0.688	1.313	0.454	1.168
1.0	0.5	1.299	1.342	0.868	1.185
0.5	0.5	1.625	1.373	1.094	1.203
FST	FST	0.395	1.326	0.282	1.170

Tabla 7.5: Diferencias de fase y cocientes de amplitudes para los filtros **v** y **b**. Modelos  $0j$ .

desarrollan en el mismo sentido que el del filtro **y**, y aproximadamente en la misma cantidad, por lo que al tomar diferencias, estas variaciones dejan de apreciarse. El motivo de esto se debe en buena parte a que sus longitudes de onda se encuentran relativamente cerca unas de las otras. De hecho, si se usaran datos correspondientes al ultravioleta, se podrían apreciar mejor estas modificaciones en el desfase. Por tanto, aunque las variables que intervienen en la fórmula de Watson, y en particular los observables no adiabáticos, cambien significativamente, esto no se refleja en una variación apreciable de estas diferencias. Lo mismo podría decirse de los cocientes de amplitudes. Lo que ocurre en este caso es que estas variaciones, aunque pequeñas, sí pueden detectarse observacionalmente.

Pasamos ahora a analizar cómo se ve afectada la identificación de los modos según el valor de  $\alpha$  utilizado en la atmósfera. En la figura 7.14 se muestran las comparaciones entre las predicciones teóricas de los índices de color y los resultados experimentales para el grupo de modelos  $0j$ , cuando se utiliza  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 0.5$ . Puede observarse que en general no mejoran ni los resultados ni las identificaciones, que ya eran lo suficientemente buenas en la gráfica 7.9.

### 7.3.2. Evolución de los índices de color

A partir de los observables no adiabáticos estudiados en la Sec. 7.2.5, se ha obtenido la evolución de los índices de color correspondientes al modelo central. Nos hemos restringido solamente a este caso porque es el único para el que el modo fundamental radial tiene una frecuencia próxima a la observada,  $f_1$ . Para ello hemos calculado los índices de color **u**, **v** y **b**, usando tanto **MLT** (con  $\alpha_{\text{MLT}} = 1.0$ ), como **FST**. Los resultados se muestran en la figura 7.16, a partir de la cual se pueden obtener las siguientes conclusiones:

1. En primer lugar, se observa que durante la mayor parte de la evolución los modelos presentan unos índices de color que en absoluto concuerdan con los valores observados, por lo que podemos delimitar el rango de modelos que proporcionan resultados dentro de las barras de error correspondientes a la fase de cada filtro. Hemos elegido éste como parámetro discriminador, y no la amplitud, debido a que en este caso es más difícil conseguir valores compatibles con las observaciones, ya que las barras de error son más pequeñas. Además hemos impuesto que la frecuencia del modo fundamental radial esté próxima a la observada (dentro de un intervalo de  $\pm 5\%$  en torno a  $f_1$ ). Esto nos ha permitido obtener un rango de temperaturas y edades para los modelos compatibles con las observaciones. Los resultados para los modelos que incorporan la **MLT** se muestran en la tabla siguiente:

$\log T_{ef_{min}} = 3.849$
$\log T_{ef_{max}} = 3.860$
$\text{Edad}_{min} = 1190 \text{ Myr}$
$\text{Edad}_{max} = 1270 \text{ Myr}$

Para la mayor parte del “track” evolutivo del modelo calculado con **FST**, las diferencias de fase caen dentro de las barras de error experimentales, como puede observarse en la Fig. 7.16, sobre todo para el filtro **b**, por lo que no

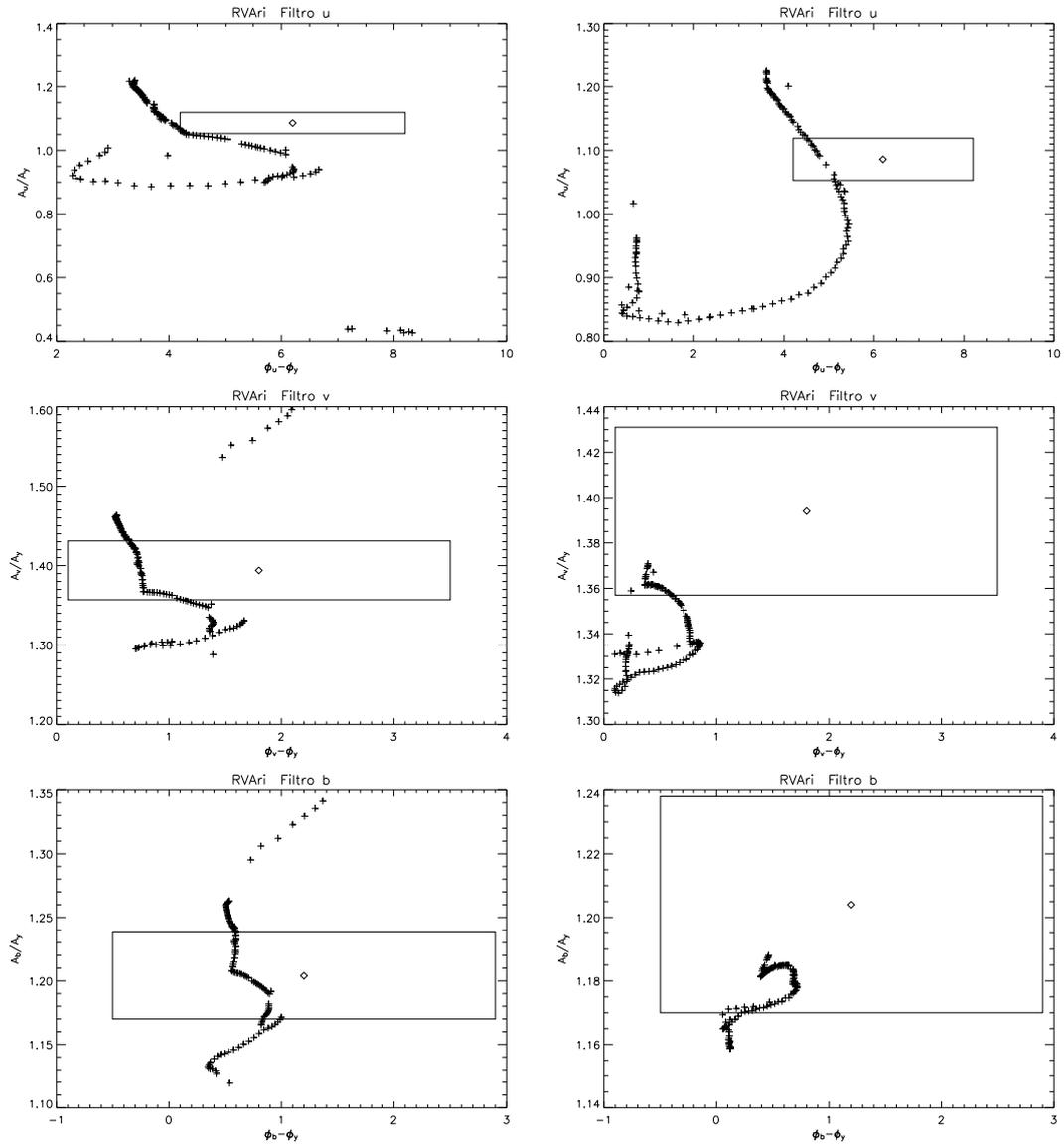


Figura 7.16: Diagramas fase-amplitud para el modo fundamental radial a lo largo de la evolución del modelo central. A la izquierda se muestran los resultados obtenidos con **MLT**, y a la derecha, con **FST**. El rectángulo muestra la caja de error observacional. Frecuencia  $f_1$ .

puede obtenerse información como en el caso anterior. Si nos restringimos a los modelos para los que la frecuencia del modo fundamental se diferencia de  $f_1$  en un 5% como máximo, encontramos los siguientes rangos de temperaturas y edades:

$\log T_{ef_{min}} = 3.836$
$\log T_{ef_{max}} = 3.850$
$Edad_{min} = 1060 \text{ Myr}$
$Edad_{max} = 1150 \text{ Myr}$

2. La segunda observación importante es que el comportamiento en el diagrama de color es completamente diferente entre **MLT** y **FST**, siendo en general los

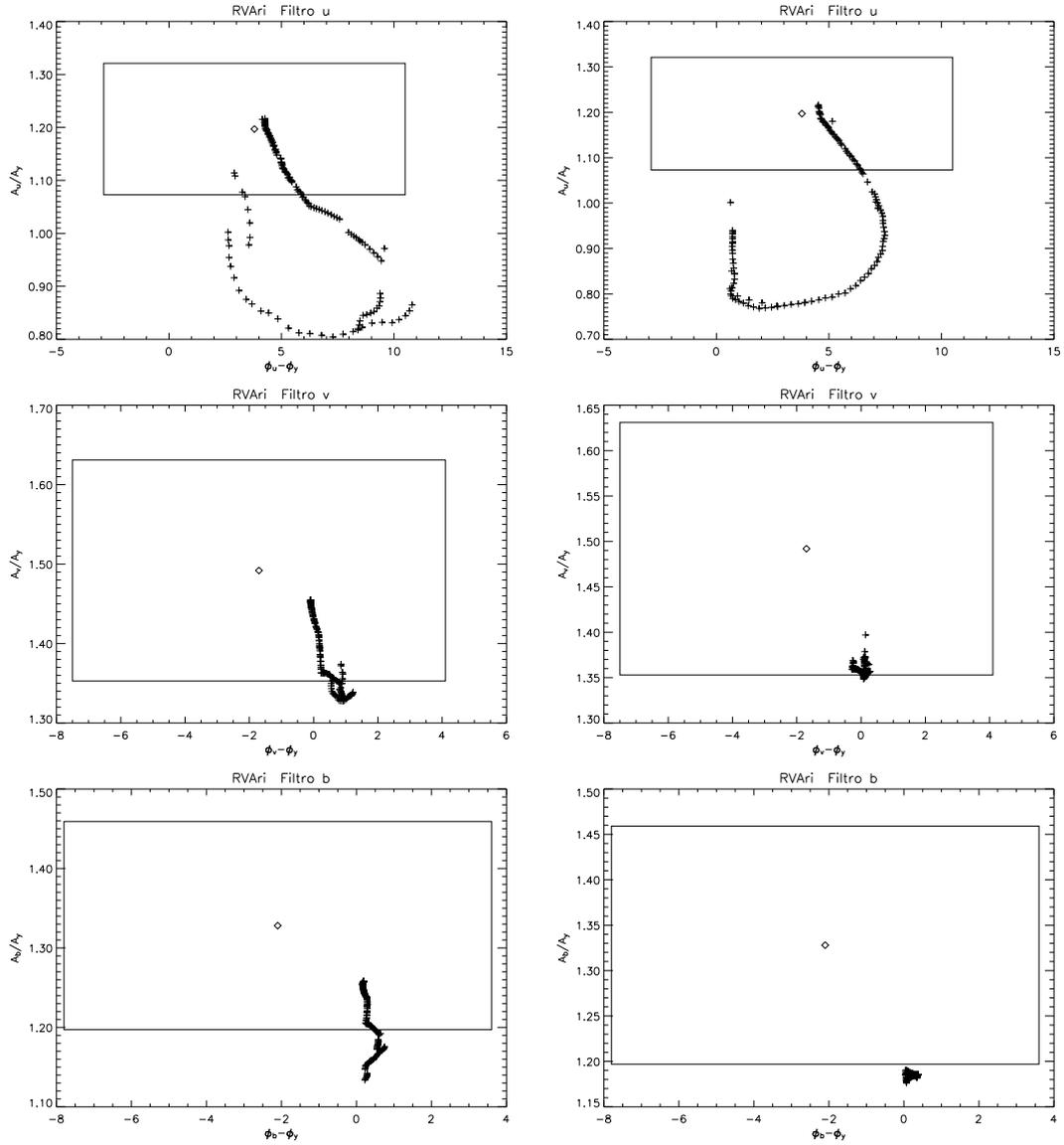


Figura 7.17: Igual que la Fig. 7.16, para la frecuencia  $f_2$ .

resultados bastante peores en este último caso.

Este estudio permite (para una cierta masa) delimitar el rango de temperaturas y edades (y por tanto, del resto de los parámetros físicos de la estrella), a un conjunto de valores más pequeño que los dados por la caja fotométrica. Además, en el primer caso (**MLT**), vemos que el valor observacional ( $\log T_{ef} = 3.859$ ) se encuentra dentro de este rango encontrado, cosa que no ocurre con la **FST**, por lo que estos valores han de ser tomados con cautela. Este resultado es esperable, ya que habíamos visto que esta teoría no parece describir bien la zona convectiva externa de esta estrella, al menos para el valor utilizado en este trabajo:  $\alpha_{FST} = 0.69$ .

Podemos repetir el procedimiento anterior para la segunda frecuencia. En la figura 7.17 se muestran los resultados obtenidos. En este caso puede observarse que los valores correspondientes a la **FST** están en general fuera de la caja de error, por lo que únicamente se pueden utilizar los del filtro **u**. Los rangos de edades y temperaturas obtenidos son los siguientes:

$\log T_{ef_{min}} = 3.836$
$\log T_{ef_{max}} = 3.841$
$\text{Edad}_{min} = 1020 \text{ Myr}$
$\text{Edad}_{max} = 1150 \text{ Myr}$

Los valores obtenidos para el modelo calculado con **MLT** concuerdan mejor con las cajas de error observacionales que en el caso de la **FST**. Los rangos de edades y de temperaturas obtenidos a partir de  $f_2$  son los mismos que para  $f_1$ .

### 7.3.3. Conclusiones

Hemos llevado a cabo una identificación de los modos observados a partir de la comparación de las predicciones teóricas con los resultados obtenidos de la fotometría Strömgren. Los resultados obtenidos son compatibles con la asignación de las dos frecuencias observadas a los modos fundamental radial y primer sobretono radial, lo cual viene avalado por el hecho de que el cociente entre sus frecuencias respectivas toma un valor igual a 0.772. Sin embargo, no hay que olvidar que el estudio ha revelado otras identificaciones posibles, en particular la asignación de modos no radiales a estas dos frecuencias. Por otra parte, este método presenta ciertas limitaciones, ya que es difícil, usando solamente la información proporcionada por los índices de color, seleccionar la teoría de la convección más adecuada (**MLT** o **FST**), o el valor más realista del parámetro  $\alpha$ . Para ello es necesario recurrir a las herramientas utilizadas en las secciones 7.2.2 y 7.2.4, que apuntan a valores de  $\alpha$  menores que 1.0. Sin embargo, en estos casos se pierde discriminación en la identificación los modos, de manera que los cocientes de amplitudes y las diferencias de fase observadas son compatibles con varios valores de  $\ell$ . Por otro lado, la identificación varía significativamente según el punto del diagrama HR que se considere. Es importante tener en cuenta que no sólo la asignación del orden radial,  $n$ , sino también la del grado angular,  $\ell$ , puede verse modificada debido a las imprecisiones existentes en la localización exacta del modelo en la caja fotométrica. Para los modelos más fríos puede ser importante la interacción de la convección con la pulsación (Dupret et al., 2005a), ya que la aproximación de la convección congelada empieza a perder validez.

## 7.4. Influencia de la composición química

Hasta ahora hemos estudiado la influencia de ciertos aspectos de la física estelar sobre las oscilaciones, y en particular, sobre la identificación de los modos, a través de la fotometría multicolor. Sin embargo, no hemos tenido en cuenta todavía la influencia que sobre ésta pueda tener la composición química de la estrella. Para ello hemos calculado nuevos modelos correspondientes al punto central de la caja fotométrica, con distintas metalicidades, pero manteniendo las mismas características que antes (convección tratada mediante **MLT**, interacción con la atmósfera, etc.). Se ha tomado un valor de  $\alpha = 1.0$ , que es uno de los más apropiados, como se vió en las secciones precedentes. En la tabla 7.6 se muestran las características más importantes de estos modelos.

Podemos observar, en primer lugar, que la frecuencia del modo fundamental radial aumenta conforme disminuye la metalicidad, siendo la variación relativa entre los casos extremos de un 8%. La causa de esto la encontramos en la correspondiente

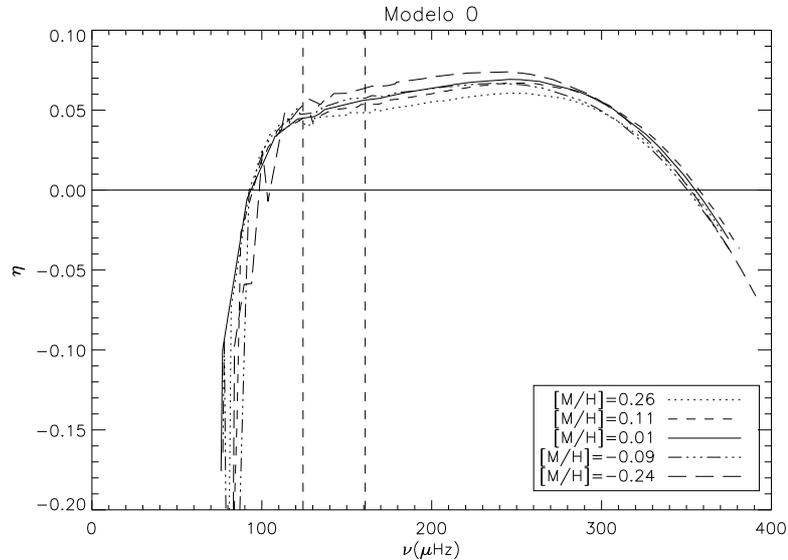


Figura 7.18: Rangos de inestabilidad del modelo central de la caja fotométrica calculado con distintas composiciones químicas. Para cada frecuencia se representa el *Growth Rate*. Las frecuencias observadas se muestran mediante líneas verticales.

disminución de la masa (necesaria para mantener fijo el punto del diagrama HR, variando la composición química), con el consiguiente aumento de la densidad media de los modelos.

Con objeto de estudiar la influencia de la metalicidad sobre los rangos de inestabilidad mostramos la figura 7.18, donde se representan los valores del *growth rate* en función de la frecuencia de los modos, para cada uno de los modelos. Se observa que ninguno de los dos límites (inferior y superior) se ven afectados sustancialmente por el valor de la metalicidad utilizado, de donde podemos concluir que mientras se utilice el mismo tratamiento de la convección para el cálculo de la estructura interna, y se mantenga constante el valor del parámetro  $\alpha$ , es la posición del modelo en el diagrama HR lo que afecta a los rangos de inestabilidad, y no la composición química que tenga la estrella (al menos en el rango de temperaturas y luminosidades considerado aquí).

	$M/M_{\odot}$	$\log T_{ef}$	$\log L/L_{\odot}$	[M/H]	$X_C$	Edad	$f_0$	$f_{min}$	$f_{max}$
05	1.86	3.859	1.16	0.26	0.333	950	127.2	95	353
06	1.80	3.859	1.14	0.11	0.320	1080	129.9	89	358
02	1.75	3.859	1.13	0.01	0.303	1186	131.1	95	355
07	1.73	3.857	1.11	-0.09	0.301	1226	132.2	93	350
08	1.62	3.858	1.09	-0.24	0.249	1478	134.6	106	352

Tabla 7.6: Modelos calculados para el punto central de la caja fotométrica, con distintas metalicidades. La convección ha sido tratada mediante la **MLT**, con  $\alpha_{MLT} = 1.0$ . La temperatura está dada en K (en escala logarítmica), la edad en millones de años, y las frecuencias en  $\mu\text{Hz}$ .  $f_0$  representa la frecuencia del modo fundamental radial, y  $f_{min}$  y  $f_{max}$  son, respectivamente, los límites inferior y superior del intervalo de inestabilidad.

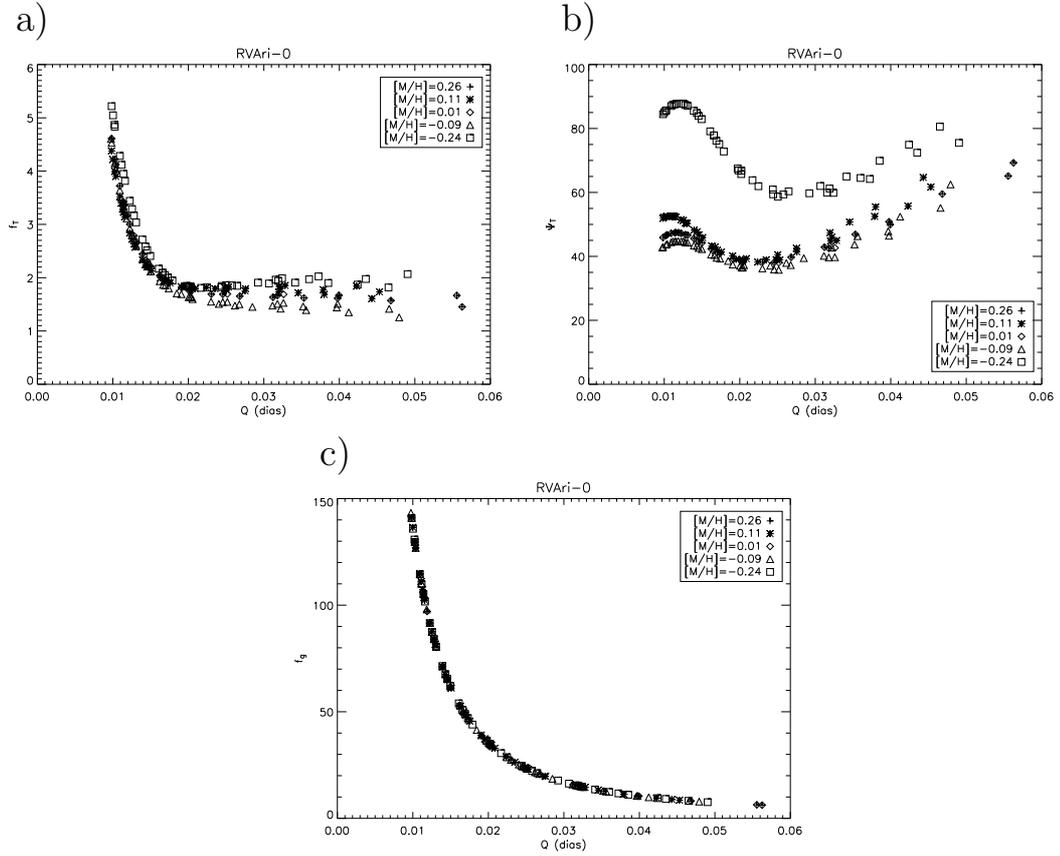


Figura 7.19: Observables no adiabáticos de los modelos de la tabla 7.6, en función de la constante de pulsación,  $Q$ . a)  $f_T$ , b)  $\Psi_T$ , c)  $f_g$ .

En la figura 7.19 se muestra el comportamiento de los observables no adiabáticos con la composición química de la estrella. Se puede apreciar, en primer lugar, que  $f_g$  no se modifica en absoluto, como ya esperábamos. Además,  $f_T$  depende poco de la metalicidad, salvo para valores de  $Q$  superiores a 0.03, esto es, para modos **g**. Con respecto al *phase lag*, nos encontramos con una pequeña variación entre unos modelos y otros, aunque no se observa una dependencia clara (monótona creciente o decreciente) con  $[M/H]$ . Nótese que los valores de  $\Psi_T$  para el modelo con  $[M/H]=-0.24$  están bastante alejados del resto. Vamos a explicar el comportamiento de este observable. Para ello se han comparado las eficiencias convectivas de los cinco modelos, como se muestra en la figura 7.20. Puede observarse que la eficiencia aumenta ligeramente conforme disminuye la metalicidad. Aunque esta pequeña variación pueda parecer en un primer momento insuficiente para explicar las diferencias observadas en el desfase, intentaremos analizar las causas de este incremento con algo más de detalle. Vamos a centrarnos en dos aspectos: la influencia de la opacidad y del gradiente de temperaturas. En la gráfica inferior izquierda de la Fig. 7.21 se muestra el valor de  $\kappa$  en función de la temperatura interna del modelo. Puede comprobarse que en la zona convectiva ( $\log T \gtrsim 4.3$ ) la opacidad es la misma en los cinco modelos, por lo que parece que las diferencias en la eficiencia convectiva no están causadas por esta variable. Por otro lado, en la gráfica inferior derecha se muestra el gradiente de temperaturas,  $\nabla$ , el cual difiere según el modelo como consecuencia de las variaciones en su estructura interna, provocadas en última instancia por las diferencias en la masa.

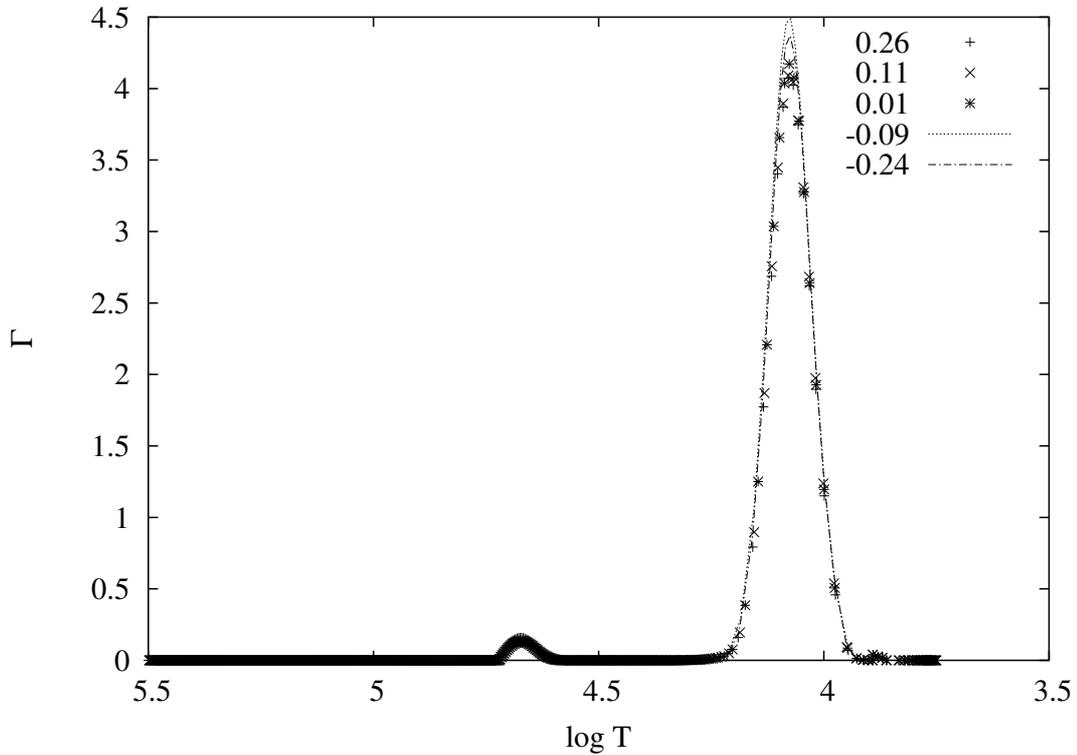


Figura 7.20: Eficiencia convectiva en función del logaritmo de la temperatura interna para cinco metalicidades distintas.

Por tanto, el origen de las diferencias encontradas en  $\Gamma$  se encuentra fundamentalmente en la zona convectiva y no tanto en la de ionización. Estas diferencias influyen a su vez sobre las autofunciones  $\delta T/T$  de los cinco modelos, como se muestra en la gráfica superior derecha, pudiendo observarse que en torno a  $\log T = 4$  aumenta su valor con la metalicidad. Nótese la presencia de un pequeño pico para temperaturas inferiores a  $\log T = 4$ , en los modelos correspondientes a  $[M/H]=-0.09$  y  $-0.24$  (esto es, menos masivos). Esta se debe a las distintas tablas de atmósfera que se utilizan en estos casos. Además, hay que tener en cuenta que la masa disminuye con la metalicidad, aumentando en consecuencia la frecuencia del modo fundamental radial. Esto provoca que la cantidad de calor intercambiada a lo largo de una pulsación sea menor que en los otros casos, y que por tanto el desfase se acerque a  $180^\circ$ . El salto que se produce para la metalicidad de  $[M/H]=-0.24$  es por la suma de todos los efectos mencionados.

En la gráfica superior izquierda se muestra el comportamiento de  $\phi_L \equiv \phi \left( \frac{\delta L_R}{L_R} \right) - \phi \left( \frac{\xi_r}{r} \right)$  (directamente relacionado con  $\Psi_T$ ) en función de la temperatura interior de la estrella. Para temperaturas ligeramente superiores a  $\log T = 4.5$  se produce una primera disminución de su valor, asociada al mecanismo  $\kappa$ , debido a la variación de la opacidad que tiene lugar en esa zona de ionización. Este es el principal mecanismo de intercambio de calor existente en las estrellas  $\delta$  Scuti, por lo que es el que define si un modo es estable o inestable, y depende de la temperatura y la densidad de la estrella, y no de la descripción de la zona convectiva. Dado que todos los modelos tienen la misma temperatura y luminosidad, y que su densidad varía solamente como consecuencia de la masa utilizada, estas diferencias en  $\kappa$  son pequeñas, como puede

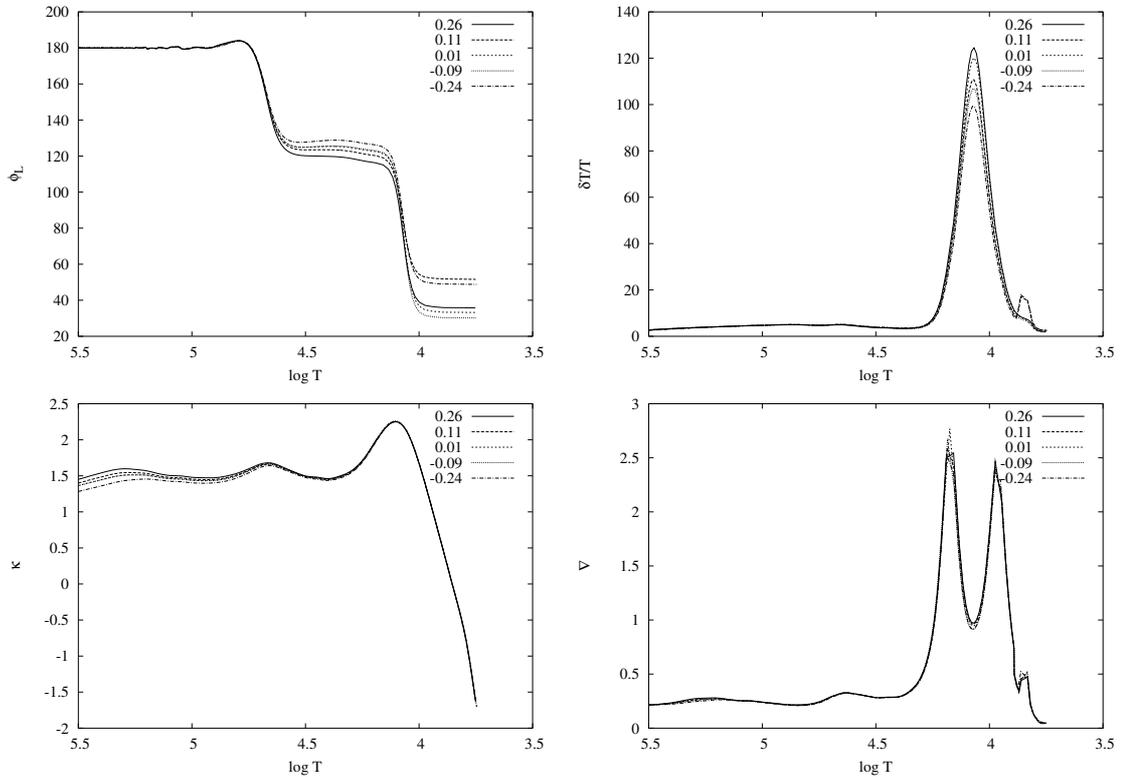


Figura 7.21: Valores del desfase (*arriba a la izquierda*), de  $\delta T/T$  (*arriba a la derecha*), de la opacidad (*abajo a la izquierda*) y del gradiente de temperatura (*abajo a la derecha*) en función de la temperatura interna, para los cinco modelos calculados.

observarse abajo a la izquierda. Sin embargo, son las responsables de la dispersión en el valor de  $\phi_L$  observada entre  $\log T = 4.5$  y  $4$ . Obsérvese que la disminución es menos acusada conforme disminuye la metalicidad (y por tanto la masa), ya que el aumento de la frecuencia del modo fundamental radial hace que el mecanismo  $\kappa$  en estas zonas sea cada vez menos eficiente. La segunda caída de la fase se produce en la zona convectiva más externa, tomando distintos valores como consecuencia de las diferencias existentes en el gradiente de temperaturas, en  $\delta T/T$ , y en menor medida, en el mecanismo  $\kappa$  de la zona de ionización del HI y HeI. El valor más elevado se encuentra para los modelos con  $[M/H]=0.11$  y  $-0.24$ , lo cual explica el comportamiento de  $\Psi_T$  en función de la metalicidad observado en la figura 7.19.

Por último, pasamos a estudiar cómo afecta la composición química a la identificación de los modos. En la figura 7.22 se muestran los cocientes de amplitudes y las diferencias de fase para todos los modelos que estamos considerando en esta sección, de forma que la metalicidad disminuye en sentido descendente. Dado que la variación en la frecuencia del modo fundamental radial es más elevada que en los casos en los que se modificaba el  $\alpha$  (tabla 7.6), hemos considerado todas las oscilaciones cuyas frecuencias se encuentran comprendidas dentro de un intervalo de un 10% en torno a las observadas. No se observan diferencias significativas entre unos modelos y otros. Tanto las amplitudes como las fases quedan prácticamente inalteradas, deduciéndose prácticamente la misma identificación modal que en la Sec. 7.3. Esto es particularmente cierto para los modos radiales con  $n = 1$  y  $n = 2$ , cuyos cocientes de amplitudes y diferencias de fase apenas cambian entre distintos modelos. Para

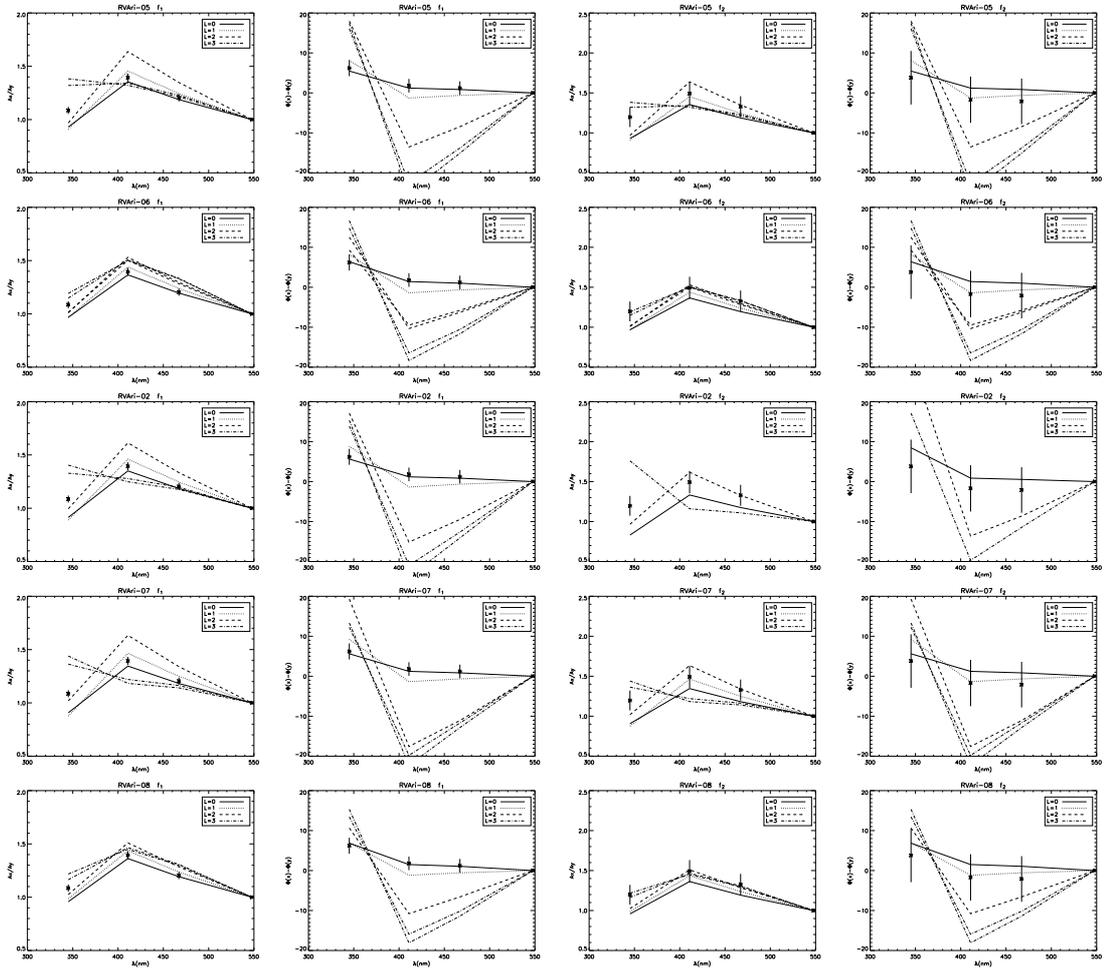


Figura 7.22: Cociente de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para las dos frecuencias observadas,  $f_1$  y  $f_2$ , del modelo central, con distintas metalicidades. En orden descendente:  $[M/H]=0.26, 0.11, 0.01, -0.09, -0.24$ .

los modos no radiales, las diferencias son mayores, siendo máximas para algunos con  $\ell = 2$  y  $\ell = 3$ . Esto se debe a las variaciones de masa y densidad, que producen una modificación de las frecuencia de estos modos, de tal manera que dentro del rango del 10% que hemos fijado aparecen pulsaciones con órdenes distintos, aunque con el mismo valor de  $\ell$ . A pesar de ello, la frecuencia  $f_1$  puede identificarse con el modo fundamental radial, y  $f_2$  con el primer sobretono radial, siendo también posible  $\ell = 1$ , y en el caso  $[M/H]=-0.24$ ,  $\ell = 2$ . Téngase en cuenta que se ha utilizado  $\alpha = 1.0$ , por lo que se produce una cierta pérdida de discriminación, como ya vimos en la Sec. 7.3.

Con todo lo anterior se puede concluir que la composición química parece no afectar significativamente a las propiedades de las oscilaciones estelares no adiabáticas, siendo mucho más importante el punto del diagrama HR en el que se encuentre el modelo, el tratamiento de la convección (**MLT** o **FST**), o el valor de  $\alpha$  que se utilice.

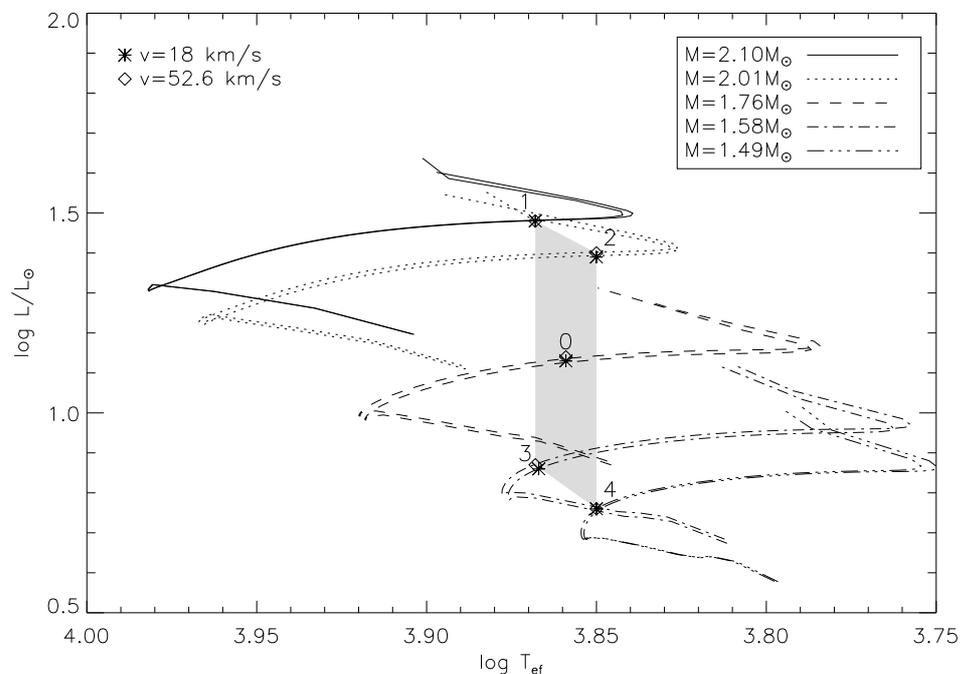


Figura 7.23: Diagrama HR de los modelos obtenidos sin atmósfera y con rotación. Para cada masa se muestran dos caminos evolutivos distintos: uno correspondiente a una velocidad de  $v = 52.6$  km/s ( $i = 20^\circ$ ), y otro para  $v = 18$  km/s ( $i = 90^\circ$ ). La zona sombreada representa la caja de error. Para la convección se ha utilizado  $\alpha = 0.5$ .

## 7.5. Oscilaciones adiabáticas con rotación

Con el objeto de estudiar los efectos de la rotación sobre las pulsaciones se han obtenido de nuevo los modelos de estructura, incluyendo ésta en los cálculos. Para ello se ha utilizado el código **CESAM**, el cual la tiene implementada mediante la aproximación denominada *pseudorotación* (Sec. 2.5), y permite utilizar las dos aproximaciones ya estudiadas: *rotación uniforme* (Sec. 2.5.1) y *rotación diferencial* (Sec. 2.5.2). En este trabajo se han considerado ambas, aunque en el primer caso se ha añadido una restricción adicional, ya que se ha impuesto además que la velocidad angular permanezca constante a lo largo de la evolución de la estrella, dando lugar a la denominada *rotación rígida*. Esto se ha hecho con el objeto de aislar el efecto de la rotación en un punto dado del diagrama HR de su variación a lo largo de la evolución. Con la segunda aproximación, la rotación diferencial, la velocidad angular disminuye debido a la redistribución del momento angular a lo largo de la estrella, que debe conservarse globalmente.

### 7.5.1. Modelos

Lo único que se conoce de la estrella a partir de las observaciones es el producto  $v \sin i$ , y no la velocidad de rotación real, por lo que solamente se tiene un valor mínimo para  $v$  de 18 km/s, correspondiente a un ángulo de observación de  $90^\circ$ . Hemos considerado dos posibles valores de  $i$ ,  $90^\circ$  y  $20^\circ$ , que dan lugar a unas velocidades de

		$M/M_{\odot}$	$\log T_{ef}$	$\log g$	$\log L/L_{\odot}$	$X_C$	Edad	$f_0$	$\nu_{\Omega}$
$\Omega = 18$	0	1.75	3.859	3.94	1.13	0.304	1182	130.85	1.8
	1	2.10	3.868	3.70	1.48	0.135	858	82.00	1.3
	2	2.00	3.850	3.70	1.39	0.126	994	82.26	1.3
	3	1.57	3.867	4.19	0.86	0.542	834	208.33	2.5
	4	1.49	3.850	4.20	0.76	0.554	920	202.46	2.6
$\Omega = 52.6$	0	1.76	3.859	3.94	1.14	0.305	1162	129.09	5.2
	1	2.10	3.868	3.70	1.48	0.141	854	82.22	3.6
	2	2.01	3.850	3.69	1.40	0.127	980	81.36	3.7
	3	1.58	3.868	4.19	0.87	0.543	815	210.00	7.3
	4	1.49	3.850	4.20	0.76	0.560	890	203.33	7.6

Tabla 7.7: Propiedades de los modelos obtenidos con las dos velocidades de rotación consideradas.  $\Omega$  representa la velocidad de rotación, en km/s. La temperatura efectiva está dada en grados K, la gravedad superficial  $g$  en el sistema cgs, y la edad en millones de años.  $X_C$  representa la fracción de Hidrógeno en el centro.  $f_0$  es la frecuencia del modo fundamental radial (en  $\mu\text{Hz}$ ), y  $\nu_{\Omega}$  es la frecuencia de rotación del modelo (también en  $\mu\text{Hz}$ ).

18 y 52.6 km/s, respectivamente. No es necesario considerar rotaciones más rápidas, que nos pueden acercar al límite de validez de la teoría perturbativa. Con estos dos valores se cubre prácticamente todo el rango de velocidades y ángulos esperados para las **HADS**.

Por otro lado, dado que  $\alpha$  es un parámetro libre (todos los modelos se han obtenido utilizando la **MLT**), se ha optado por un valor intermedio,  $\alpha = 1.0$ , que da buenos resultados, como se ha podido comprobar en las secciones anteriores.

En la tabla 7.7 se muestran las propiedades de los modelos encontrados para las dos velocidades de rotación consideradas. Una primera conclusión que se puede extraer es que los modelos no difieren significativamente cuando se modifica la velocidad de rotación. En general, todas las propiedades se mantienen prácticamente inalteradas, ya que la rotación es lenta.

### 7.5.2. Acoplamientos por rotación

A continuación mostramos los estudios realizados sobre el acoplamiento por rotación en todos los modelos calculados. Como ya hemos explicado (Sec. 5.4), la teoría de perturbaciones lleva a una degeneración accidental de los modos con frecuencias próximas entre sí. Las reglas de selección imponen, como ya sabemos, diferencias en  $\ell$  y  $m$  dadas por:  $\Delta\ell = 2$  y  $\Delta m = 0$ , aunque también pueden aparecer, en una proporción menor, casos en los que  $\Delta\ell = 0$  y  $\Delta m = 0$ . Estos acoplamientos hacen que un determinada oscilación ya no se pueda describir mediante un único armónico esférico, esto es, que no se pueda asociar un único valor de  $\ell$  a la autofunción correspondiente. Sin embargo, ésta todavía puede describirse como combinación lineal de varios armónicos esféricos, aunque en este trabajo nos ocuparemos del caso en que el acoplamiento se produzca entre parejas de modos únicamente. La inclusión de estos efectos en el cálculo de las oscilaciones es esencial para completar el formalismo, ya que afecta a la distribución de los componentes de los multipletes, y en particular, a

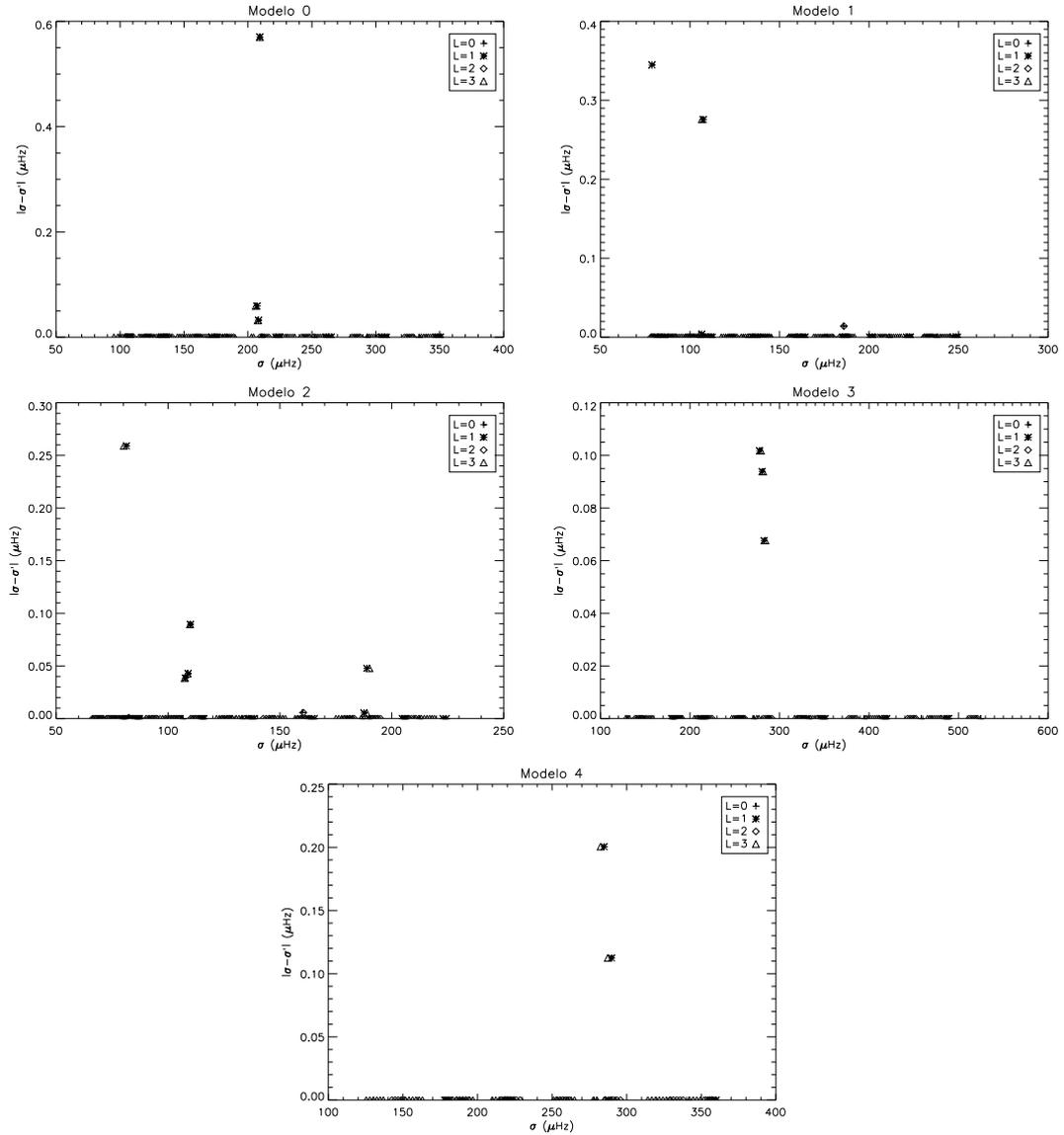


Figura 7.24: Diferencia de frecuencias  $|\sigma - \sigma'|$  para los cinco modelos de la caja fotométrica calculados con  $v = 18$  km/s frente a  $\sigma$  (la frecuencia de los modos calculada sin acoplamiento), para distintos valores de  $\ell$ .  $\sigma'$  es la frecuencia que se obtiene para cada modo cuando se incluye la degeneración accidental.

la simetría de los mismos, complicando aún más los ya de por sí complejos espectros de oscilación de las  $\delta$  Sct.

Estudiaremos el comportamiento general de los acoplamientos en los espectros individuales y haremos una primera valoración de las variaciones que sufre este efecto a lo largo de la evolución de un modelo.

Los resultados obtenidos con respecto a la variación de las frecuencias se representan en las Figs. 7.24 y 7.25. En ellas se muestran las diferencias de frecuencias  $|\sigma - \sigma'|$ , donde  $\sigma$  es la frecuencia del modo cuando se tiene en cuenta la rotación de la estrella pero no el acoplamiento, y  $\sigma'$  es la frecuencia del mismo modo cuando se ha incluido el acoplamiento. Esta diferencia, pues, da cuenta de cómo se modifican las frecuencias debido al acoplamiento entre los modos. Se puede apreciar en estas

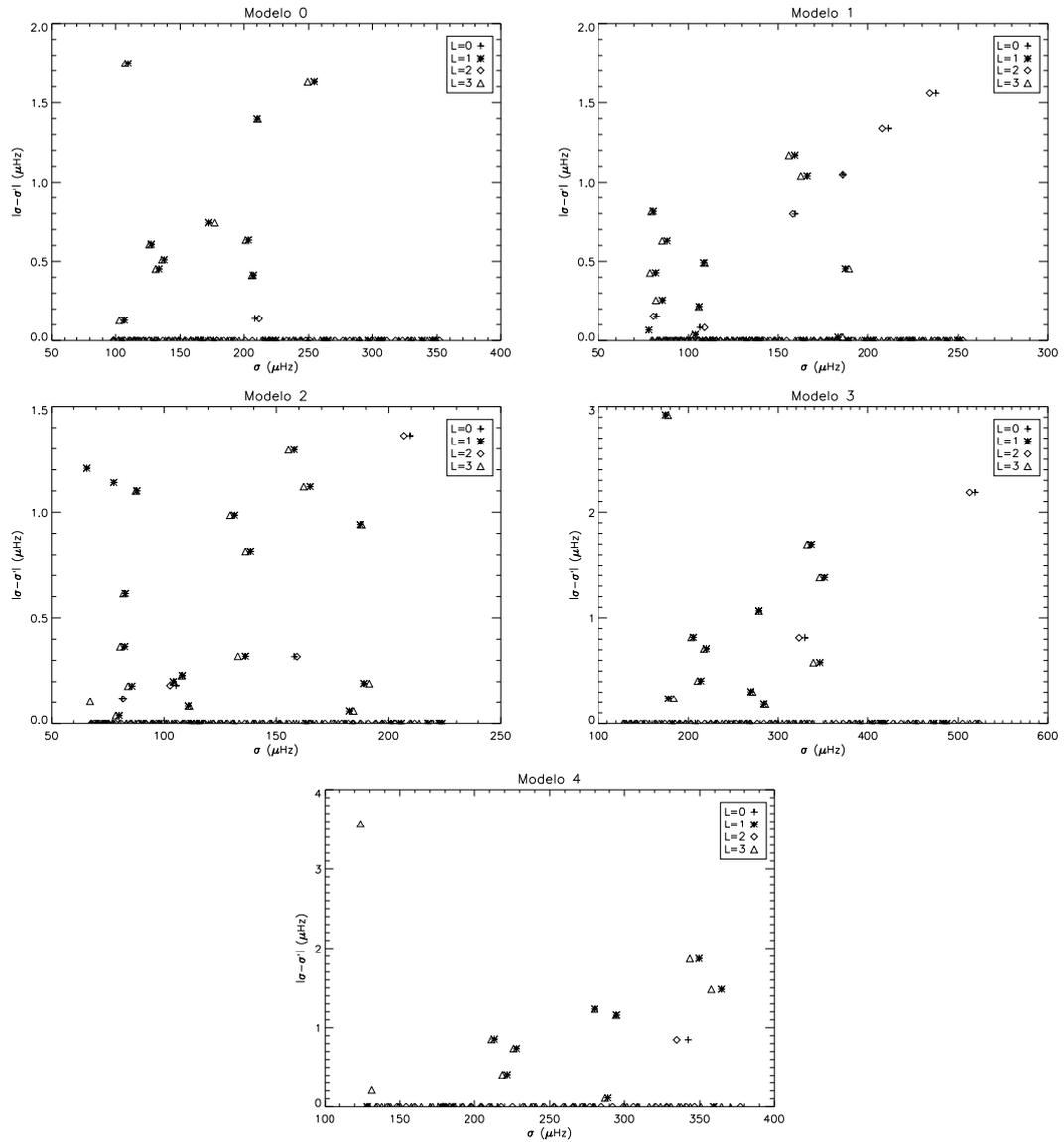


Figura 7.25: Igual que la gráfica 7.24, pero para los modelos con  $v = 52.6$  km/s.

gráficas que la variación en las frecuencias es cada vez mayor conforme aumenta el orden radial de los modos (esto es, su frecuencia). En las figuras correspondientes a  $v = 18$  km/s no se puede apreciar bien esto, debido a que la velocidad de rotación es bastante baja, y hay muy pocos modos acoplados, por lo que no se puede obtener una tendencia general. En el caso de  $v = 52.6$  km/s, aunque la velocidad todavía es pequeña, se tienen ya suficientes valores como para observar este hecho. Se puede notar en estas figuras la presencia de toda una serie de puntos con ordenada cero, correspondientes a los modos que no sufren acoplamiento, y que por tanto, no han visto modificada su frecuencia.

Con el objeto de conocer el grado de mezcla de los armónicos esféricos, se han estudiado los *coeficientes de contaminación*, definidos en la ecuación (5.162), de cada uno de los modos afectados por el acoplamiento. En las Figs. 7.26 y 7.27 se muestran estos coeficientes. Para cada modelo aparecen dos gráficas, una correspondiente al acoplamiento entre los modos con  $\ell = 0$  y  $\ell = 2$ , y otra para los modos  $\ell = 1$

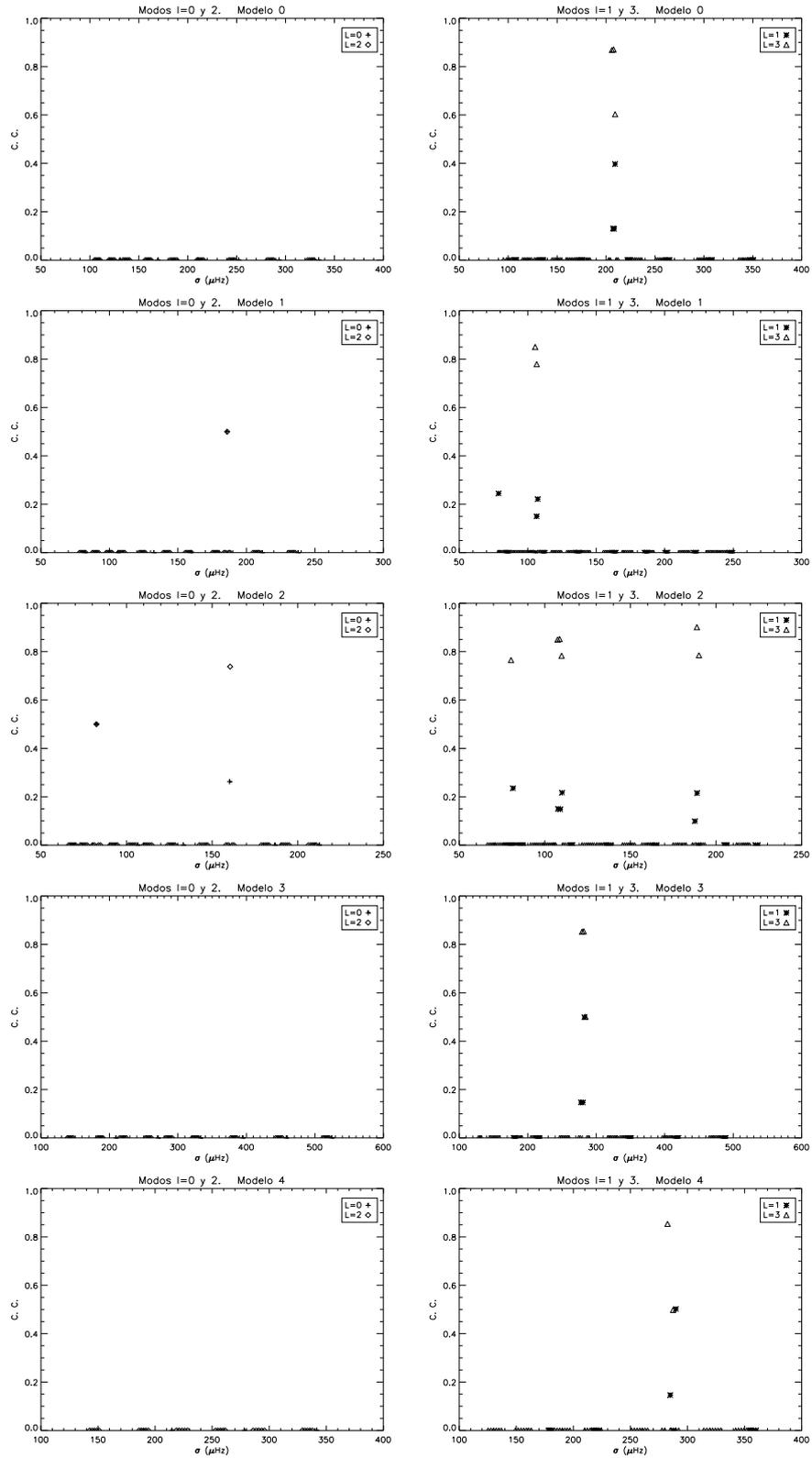


Figura 7.26: Coeficientes de contaminación para los cinco modelos de la caja fotométrica, calculados con  $v = 18$  km/s, frente a la frecuencia de los modos. *Izquierda*: valores obtenidos para las parejas  $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . *Derecha*: valores correspondientes a las parejas  $(\ell, \ell') = (1, 3)$ .

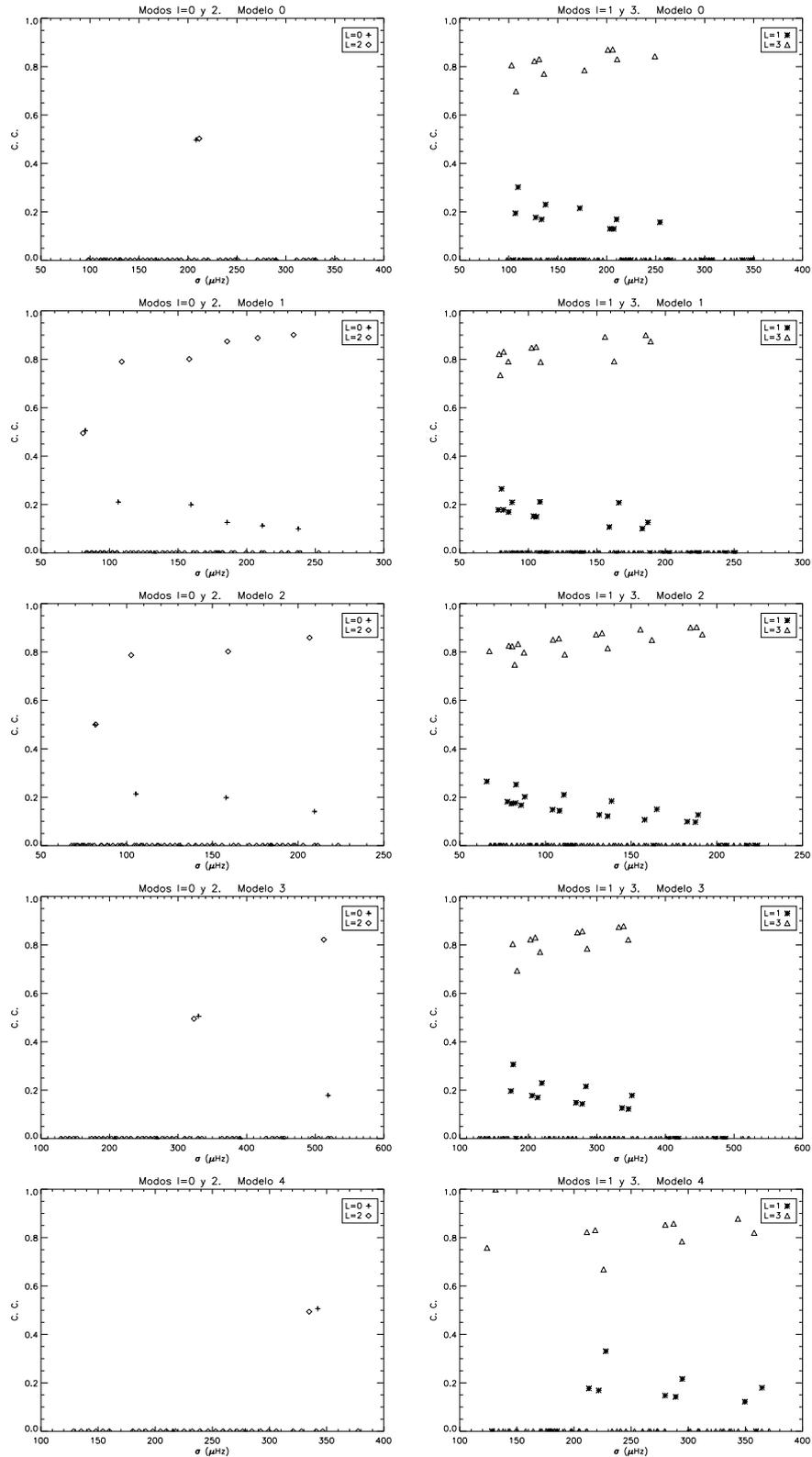


Figura 7.27: Igual que la gráfica 7.26, para los modelos con  $v = 52.6$  km/s.

y  $\ell = 3$ , aunque en cada una de ellas aparecerán algunos puntos (muy pocos), correspondientes al acoplamiento entre modos con el mismo  $\ell$ .

En las tablas 7.8 y 7.9 se muestran los modos cuyas frecuencias son cercanas

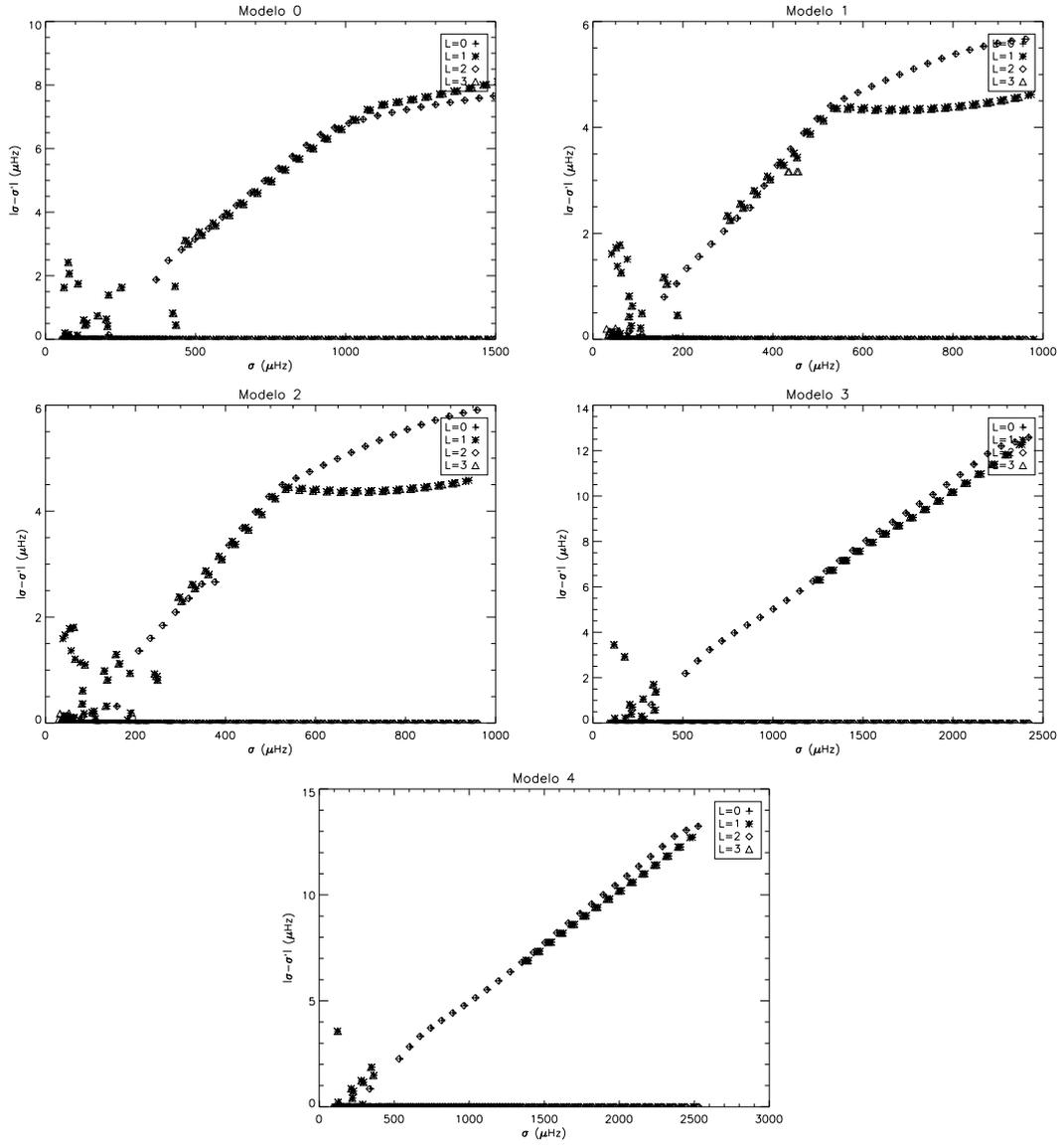


Figura 7.28: Diferencia de frecuencias  $|\sigma - \sigma'|$  para los cinco modelos de la caja fotométrica calculados con  $v = 52.6$  km/s frente a  $\sigma$  (la frecuencia de los modos calculada sin acoplamiento), para distintos valores de  $\ell$ . Se muestra todo el espectro de pulsación. El significado de cada uno de los símbolos es el mismo que para la Fig. 7.24.

Modelo	$n, \ell, m$	$\sigma$ ( $\mu\text{Hz}$ )	Acoplado con:	$ \sigma - \sigma' $ ( $\mu\text{Hz}$ )	$\beta$
<b>2</b>	4, 0, 0	160.17	1, 2, 0	0.01	0.26
<b>2</b>	1, 2, 0	160.47	4, 0, 0	0.01	0.74

Tabla 7.8: Parejas de modos acoplados con frecuencias cercanas (en torno a un 5%) a las observadas,  $f_1$  y  $f_2$ , para los modelos con  $v = 18$  km/s.  $\beta$  denota los valores de los coeficientes de contaminación.

a alguna de las observadas, y que presentan acoplamiento. Como es de esperar, el número de parejas afectadas aumenta con la rotación, por lo que nos centraremos

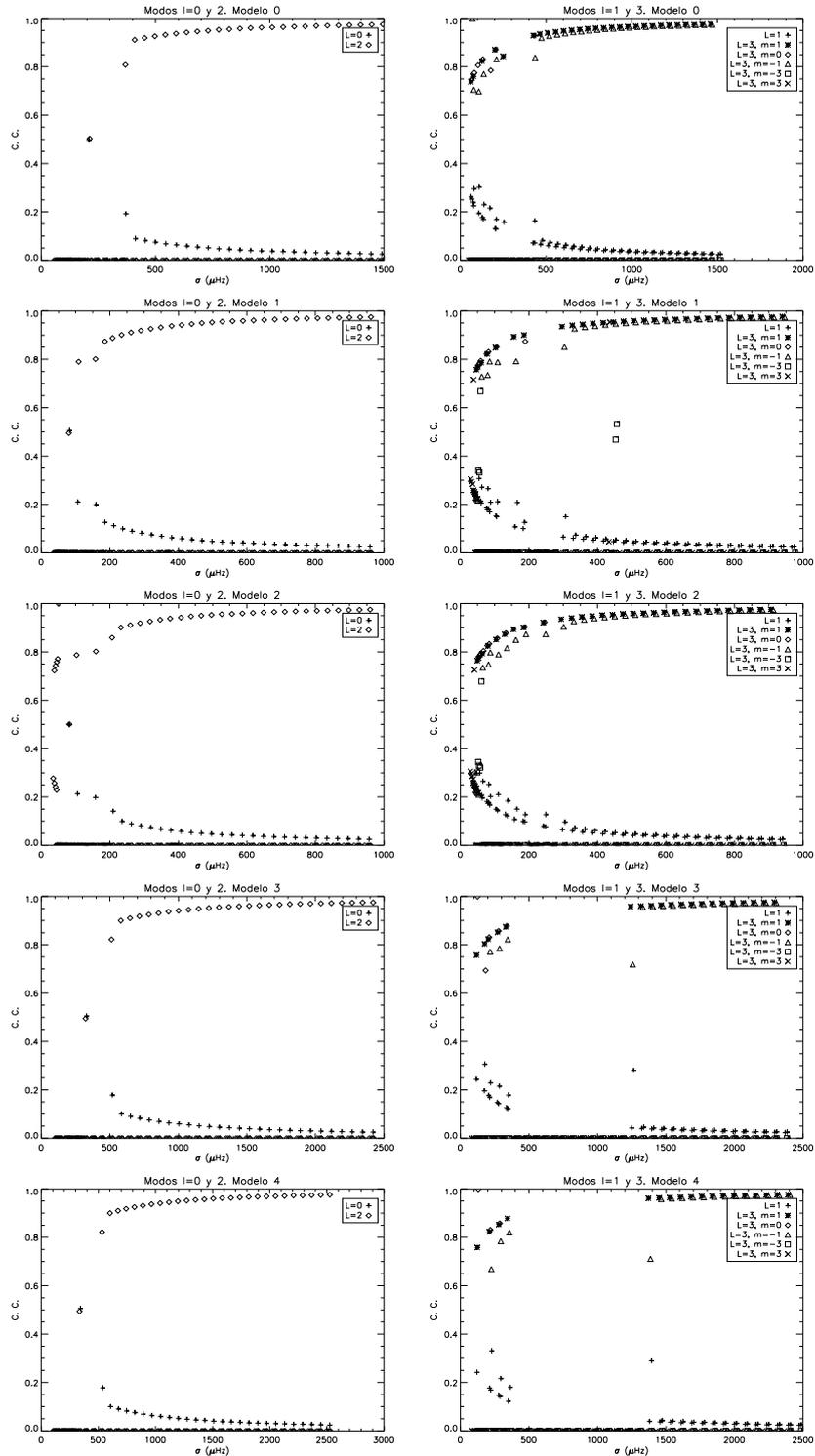


Figura 7.29: Coeficientes de contaminación para los cinco modelos de la caja fotométrica, calculados con  $v = 52.6$  km/s, frente a la frecuencia de los modos cuando no se tiene en cuenta el acoplamiento,  $\sigma$ . Se muestra todo el espectro de pulsación. *Izquierda*: valores obtenidos para las parejas  $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . *Derecha*: valores correspondientes a las parejas con  $(\ell, \ell') = (1, 3)$ .

en el caso  $v = 52.6$  km/s, del que se puede extraer más conclusiones.

Con el objeto de estudiar con más profundidad cómo se comportan  $|\sigma - \sigma'|$  y

Modelo	$n, \ell, m$	$\sigma$ ( $\mu\text{Hz}$ )	Acoplado con:	$ \sigma - \sigma' $ ( $\mu\text{Hz}$ )	$\beta$
<b>0</b>	-1, 1, 1	127.63	-4, 3, 1	0.61	0.18
<b>0</b>	-1, 1, 0	133.52	-4, 3, 0	0.45	0.17
<b>0</b>	-4, 3, 1	116.27	-1, 1, 1	0.61	0.82
<b>0</b>	-4, 3, 0	131.00	-1, 1, 0	0.45	0.83
<b>1</b>	4, 0, 0	159.37	1, 2, 0	0.80	0.20
<b>1</b>	2, 1, 1	159.16	0, 3, 1	1.17	0.11
<b>1</b>	2, 1, -1	166.07	0, 3, -1	1.04	0.21
<b>1</b>	1, 2, 0	158.12	4, 0, 0	0.80	0.80
<b>1</b>	0, 3, 1	155.91	2, 1, 1	1.17	0.89
<b>1</b>	0, 3, -1	162.56	2, 1, -1	1.04	0.79
<b>2</b>	4, 0, 0	159.95	1, 2, 0	0.32	0.20
<b>2</b>	2, 1, -1	164.95	0, 3, -1	1.12	0.15
<b>2</b>	2, 1, 1	157.89	0, 3, 1	1.30	0.11
<b>2</b>	1, 2, 0	159.15	4, 0, 0	0.32	0.80
<b>2</b>	-2, 3, 1	129.53	-3, 1, 1	0.99	0.87
<b>2</b>	0, 3, -1	162.10	2, 1, -1	1.12	0.85
<b>2</b>	0, 3, 1	155.38	2, 1, 1	1.30	0.89
<b>4</b>	-2, 1, 1	120.94	-2, 1, 1	3.57	0.24
<b>4</b>	-5, 3, 1	123.91	-2, 1, 1	3.57	0.76

Tabla 7.9: Igual que la tabla 7.8, para los modelos con  $v = 52.6$  km/s.  $\beta$  denota los valores de los coeficientes de contaminación.

los coeficientes de contaminación, incluimos de nuevo las correspondientes gráficas para todos los modelos con  $v = 52.6$  km/s, pero esta vez para todo el espectro de frecuencias. Hay que tener en cuenta que la mayoría de los modos se encuentran fuera del rango de inestabilidad, y por tanto serán modos estables. Estos resultados se muestran en las Figs. 7.28 y 7.29. Se puede observar que, tal y como ya apuntábamos anteriormente, la diferencia de frecuencias,  $|\sigma - \sigma'|$  aumenta con el orden del modo para todos los valores de  $\ell$ . También puede comprobarse en la Fig. 7.28 que, a partir de una determinada frecuencia, los valores de las diferencias de frecuencias para los modos con  $\ell = 1$  y  $\ell = 3$  se separan de los correspondientes a  $\ell = 0$  y  $\ell = 2$ , aunque por debajo de ese punto ambas líneas permanecieran unidas.

Con respecto al coeficiente de contaminación se puede decir que en todo el espectro de frecuencias se observa que el armónico esférico con mayor peso es el que tiene  $\ell$  mayor ( $\ell = 2$  ó  $\ell = 3$ ). La principal explicación de esto es la mayor inercia que poseen estos modos. Además, los coeficientes de contaminación de estos valores de  $\ell$  tienden asintóticamente a 1, mientras que los de  $\ell = 0$  y  $\ell = 1$  tienden a cero.

Vemos entonces que para órdenes muy altos, aunque el grado de acoplamiento es cada vez menor (Suárez et al., 2006), la influencia sobre la frecuencia de los modos es más elevada, y el grado de mezcla de ambos es cada vez menor, teniendo cada vez más peso los  $\ell = 2$  y  $\ell = 3$ . Esto es debido a que conforme aumenta la frecuencia, la diferencia entre la inercia de los modos, aunque tengan distintos valores de  $\ell$ , es menor, mientras que para órdenes bajos, ésta es más elevada.

Se puede observar en la figura 7.29 que aparecen varias ramas diferentes para

$n, \ell, m$	$\sigma$ ( $\mu\text{Hz}$ )	Acoplado con:	$ \sigma - \sigma' $ ( $\mu\text{Hz}$ )	$\beta$
12, 3, -3	453.10	13, 3, -3	3.17	0.47
12, 3, 3	433.45	13, 3, 3	3.17	0.05
13, 3, -3	456.65	12, 3, -3	3.17	0.53
13, 3, 3	453.27	12, 3, 3	3.43	0.95

Tabla 7.10: Propiedades de los acoplamientos entre parejas de modos con el mismo valor de  $\ell$  para los modelos con  $v = 52.6$  km/s.

Modelo	$n, \ell, m$	$\sigma$ ( $\mu\text{Hz}$ )	Acoplado con:	$ \sigma - \sigma' $ ( $\mu\text{Hz}$ )	$\beta$
<b>0</b>	3, 0, 0	208.30	1, 2, 0	0.14	0.50
<b>0</b>	1, 2, 0	211.54	3, 0, 0	0.14	0.50
<b>1</b>	1, 0, 0	82.31	-5, 2, 0	0.15	0.50
<b>1</b>	-5, 2, 0	80.65	1, 0, 0	0.15	0.50
<b>2</b>	1, 0, 0	81.44	-5, 2, 0	0.12	0.50
<b>2</b>	-5, 2, 0	81.95	1, 0, 0	0.12	0.50
<b>3</b>	3, 0, 0	329.61	2, 2, 0	0.81	0.51
<b>3</b>	2, 2, 0	323.10	3, 0, 0	0.81	0.49
<b>4</b>	3, 0, 0	342.19	2, 2, 0	0.85	0.51
<b>4</b>	2, 2, 0	334.68	3, 0, 0	0.85	0.49

Tabla 7.11: Propiedades de los acoplamientos entre modos mixtos con  $(\ell, \ell') = (0, 2)$  para los modelos con  $v = 52.6$  km/s.

cada  $\ell$ , al menos en el caso de acoplamiento entre modos con  $\ell = 1$  y  $\ell = 3$ , una para  $m = -1$ , y otra en la que se mezclan  $m = 0$  y  $m = 1$ . La primera, para  $\ell = 3$ , siempre se encuentra por debajo de las otras dos, y tienden a unirse para frecuencias elevadas. Para  $\ell = 1$  ocurre al revés. Esto indica que los coeficientes de contaminación se comportan de forma diferencial para cada valor de  $m$ , lo que se debe en parte a la existencia de las reglas de selección que los acopla.

Se han encontrado también acoplamientos entre algunos modos con el mismo valor de  $\ell$ . Mostramos algunos ejemplos en la tabla 7.10, correspondientes a modos  $p$  del modelo **1** con  $v = 52.6$  km/s. Se observa que una de las parejas sigue el régimen general del resto (un coeficiente de contaminación mucho mayor para uno de los modos que para el otro), y de hecho, el (12, 3, 3) se encuentra en la rama de  $\ell = 1$ , y el (13, 3, 3), en la rama de  $\ell = 3$ . Esto es, el primero se comporta, *con respecto a los coeficientes de contaminación*, como un  $\ell = 1$ , y el segundo, como un  $\ell = 3$ . La otra pareja no sigue la norma general, con  $\beta \approx 0.5$ .

También hemos observado que en el caso de los acoplamientos  $(\ell, \ell') = (0, 2)$ , se encuentra una pareja de modos con coeficientes de contaminación cercanos a 0.5 en todos los modelos. Se corresponden con modos  $p$  y  $g$  de órdenes bajos, y en numerosas ocasiones es la primera pareja acoplada que nos encontramos con estos valores de  $\ell$ . Mostramos los resultados para los modelos con velocidad de rotación más alta ( $v = 52.6$  km/s) en la tabla 7.11.

Pensamos que el comportamiento de estas parejas podría estar relacionado con el hecho de que se tratan de modos mixtos, o sea, que se comportan como modos  $p$

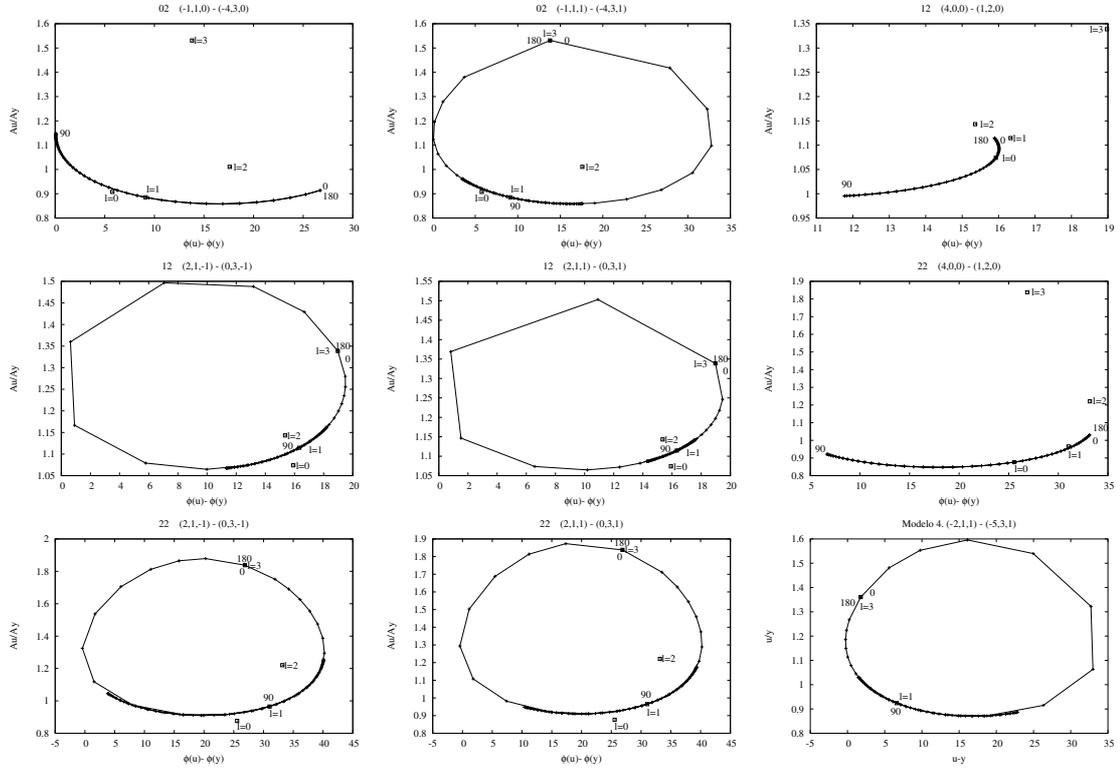


Figura 7.30: Diagramas fase-amplitud para el filtro  $u$  de las parejas que se muestran en la tabla 7.9. Los valores que se obtienen cuando no se tiene en cuenta la rotación se muestran mediante cuadrados, etiquetados según su valor de  $\ell$ .  $u - y$  y  $u/y$  representan, respectivamente, las diferencias  $\phi_u - \phi_y$  y los cocientes  $A_u/A_y$ .

en la envoltura de la estrella, y como modos  $g$  en el interior profundo. Además, se ven afectados por el *avoided crossing*, y sus frecuencias se encuentran muy próximas entre sí.

### 7.5.3. Fotometría multicolor

Con el objeto de llevar a cabo una identificación de los modos que tenga en cuenta los efectos de la rotación, estudiaremos cómo afecta la degeneración accidental por rotación a los índices de color en los filtros de la fotometría Strömgren. Como se explicó en la Sec. 6.4, las predicciones teóricas que se obtienen para los distintos valores de  $\ell$ , basadas en los diagramas fase-amplitud, dependen del ángulo de inclinación,  $i$ . Para ello, hay que modificar la fórmula de Watson, en la que ahora el ángulo que forma la visual con el eje de rotación de la estrella aparece explícitamente (ver Sec. 6.4). La modificación del valor de éste da lugar a la aparición de una curva en dichos diagramas. Adoptando las figuras que aparecen en Daszyńska-Daszkiewicz et al. (2002), fabricaremos estas curvas variando  $i$  entre  $-180^\circ$  y  $180^\circ$ , con pasos en  $\cos i$  de 0.02. Cuando tengamos dos modos acoplados, representaremos únicamente el diagrama correspondiente al valor de  $\ell$  menor, ya que la forma del otro es muy parecida.

Empezaremos por los modos acoplados que se muestran en la tabla 7.9, con frecuencias cercanas a las observadas. Se ha tomado únicamente el caso  $v = 52.6$  km/s, ya que es el más interesante, puesto que para  $v = 18$  km/s se encuentran

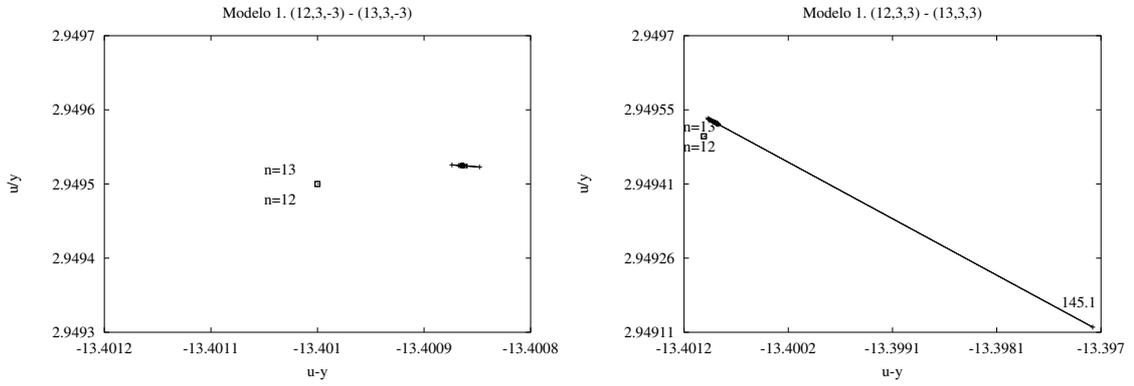


Figura 7.31: Diagramas fase-amplitud para el filtro  $\mathbf{u}$  de los modos mostrados en la tabla 7.10. Igual que antes, se muestran los puntos correspondientes a las predicciones sin rotación, representados mediante cuadrados.

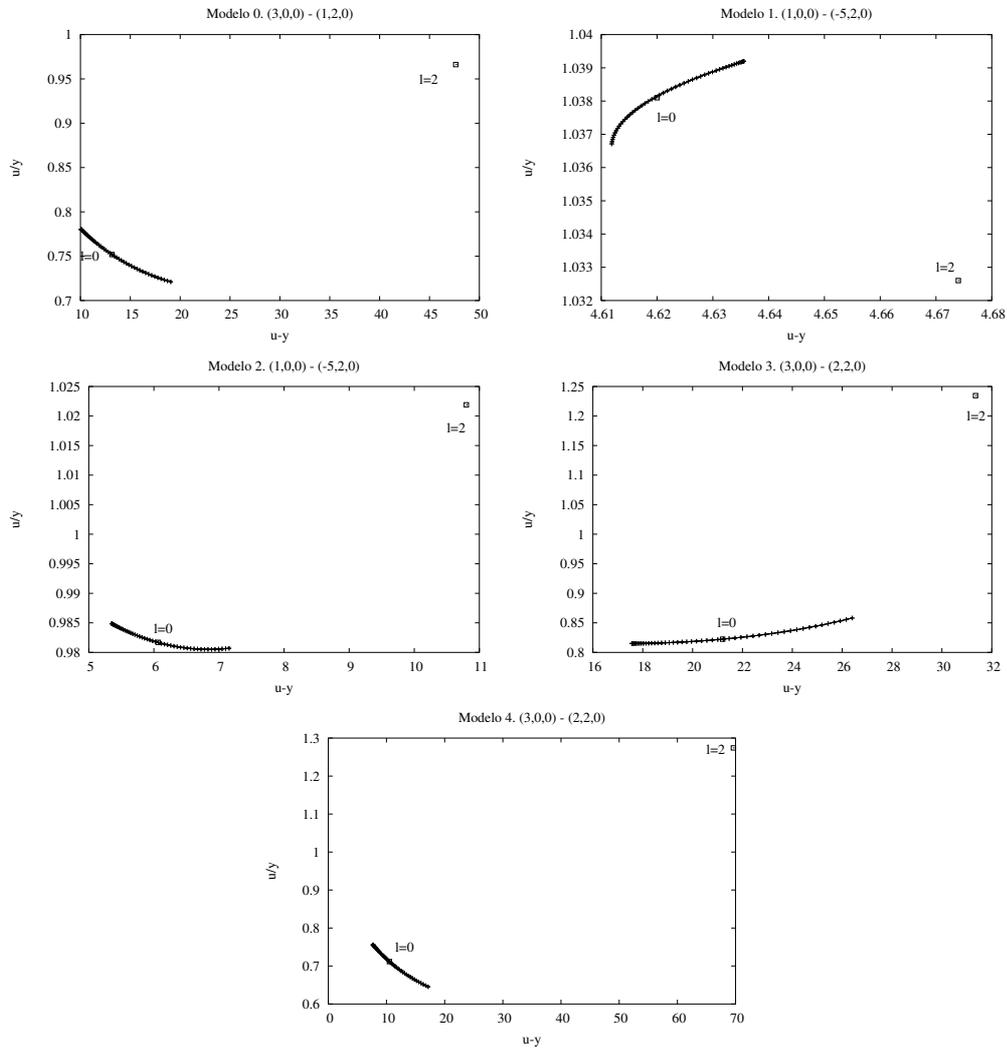


Figura 7.32: Diagramas fase-amplitud para el filtro  $\mathbf{u}$  de los modos mixtos mostrados en la tabla 7.11. Como en las dos Figs. anteriores, se muestran los puntos correspondientes a las predicciones sin rotación, representados mediante cuadrados.

muy pocos acoplamientos. Las curvas descritas en los diagramas de color para el filtro **u** se muestran en la Fig. 7.30, donde cada punto corresponde a un valor de  $i$ . Los cuadrados identifican los valores de la fase y la amplitud que se obtienen si no se tiene en cuenta la rotación. A partir de ahora,  $u - y$  y  $u/y$  representan la diferencia de fases  $\phi_u - \phi_y$  y el cociente de amplitudes  $A_u/A_y$ , respectivamente. La densidad de puntos varía a lo largo de la línea, lo que quiere decir que para un gran número de ángulos se obtienen valores próximos entre sí. Además, salvo algunas excepciones, esa zona con mayor densidad se encuentra en torno al punto que se obtendría sin rotación, si se considerara el  $\ell$  menor. Las curvas pasan por los puntos correspondientes a  $\ell = 2$  ó  $\ell = 3$  solamente en los casos de ángulos cercanos a  $\pm 180^\circ$ , a pesar de que para estos modos el coeficiente de contaminación es cercano a la unidad, por lo que su contribución es mayor. Podemos concluir de aquí que, de dos modos acoplados por rotación, aquél con mayor valor de  $\ell$  es el que más contribuye, aunque esto no es visible para ángulos intermedios. Por lo tanto, al observar esta estrella, es probable que el modo se identifique con el  $\ell$  más bajo en vez de con el  $\ell$  mayor. Sin embargo, como puede observarse en la Fig. 7.30, las curvas pasan, para ciertos ángulos de inclinación, cerca de los valores correspondientes a otros modos, lo que podría llevar a una identificación errónea. Por ejemplo, la asociada al modo  $(-1, 1, 0)$ , para  $i \geq 90^\circ$ , toma valores cercanos a los del modo fundamental radial. Así pues, si se observan los índices de color, y esta estrella tuviera un ángulo de inclinación elevado, podríamos identificar esta frecuencia como un  $\ell = 0$ , cuando en realidad sería un  $\ell = 1$  (con mezcla de  $\ell = 3$ ). Esto nos da idea de la complejidad inherente a la identificación modal en estrellas rotantes. No obstante, esta técnica también permite obtener información adicional sobre la velocidad de rotación de la estrella, y como consecuencia de esto, sobre la metalicidad, como veremos en la sección 7.7.3.

Con respecto a la morfología de las curvas, vemos que existen dos tipos: abiertas y cerradas. La diferencia entre ellas no parece que sea debida al valor de  $\ell$ , ya que puede observarse que, por ejemplo, para  $\ell = 1$ , las curvas se comportan de distinta manera, según sea  $m = 0$  ó  $m = 1$ . Así pues, nos encontramos curvas abiertas para  $m = 0$  y cerradas para  $m = \pm 1$  (modos axisimétricos). Estas últimas pasan siempre por los puntos obtenidos con los dos valores de  $\ell$  sin rotación, mientras que las abiertas solamente pasan por el punto correspondiente al  $\ell$  menor.

Puesto que hemos encontrado varios tipos de parejas de modos acoplados, sería interesante extender el estudio del diagrama de color a éstos, con el objeto de encontrar nuevos resultados. El siguiente paso podría ser entonces comprobar qué ocurre para los modos acoplados con el mismo  $\ell$ . Habíamos encontrado dos de tales modos en el modelo **1**, con valores de  $n = 12$  y  $13$ . En la Fig. 7.31 se muestran los resultados. Estos modos están débilmente acoplados, algo que puede verse en la diferencia de frecuencias: no supera el 0.7%. Ambos modos muestran valores iguales para la fase y la amplitud, de ahí que se vea un sólo cuadrado. Una pareja (la que tiene  $m = -3$ ) muestra unos coeficientes de contaminación muy parecidos, y próximos a 0.5. La otra ( $m = 3$ ) presenta coeficientes muy diferentes. En ambos casos se obtiene que la longitud de la curva en el diagrama fase-amplitud es muy pequeña, esto es, los índices de color cambian muy poco. Además, las curvas no pasan por los puntos que se obtendrían si no se tiene en cuenta la rotación. En el segundo caso se encuentra un punto algo más alejado que el resto, correspondiente a  $-180^\circ$ .

Por último, podemos estudiar los diagramas correspondientes a los modos mixtos

con  $\beta = 0.5$ , correspondientes a parejas  $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . Estos modos se sitúan fuera del rango de inestabilidad, por lo que no son observables. En la Fig. 7.32 mostramos los correspondientes diagramas de color. Puede observarse que las curvas se corresponden con la tipología que hemos denominado “*abiertas*”, y que pasan por los valores obtenidos sin rotación asociados a  $\ell = 0$ . Tanto la diferencia de fases como el cociente de amplitud varía ligeramente con el ángulo de inclinación, obteniéndose una densidad de puntos elevada.

#### 7.5.4. Conclusiones

En esta sección se ha llevado a cabo un estudio de cómo afecta la rotación a los modos a través del acoplamiento cuadrático. En primer lugar, se ha analizado su influencia sobre la frecuencia, encontrándose que la variación de la misma aumenta con el orden de los modos. Se ha encontrado también que el grado de mezcla entre parejas de modos acoplados, dado por el coeficiente de contaminación, sigue una pauta bien definida, presentando cierta dependencia con el valor del número  $m$ . Este parámetro muestra que la mayor contribución proviene siempre del  $\ell$  mayor.

En principio se ha llevado a cabo este estudio para dos velocidades:  $\Omega = 18$  km/s y 52.6 km/s. Se observa que el número de acoplamientos aumenta sustancialmente con la velocidad de rotación.

El aumento de la diferencia  $|\sigma - \sigma'|$  con la frecuencia de los modos implica que hacia órdenes altos las frecuencias se ven afectadas cada vez más por el acoplamiento. En este régimen, además, el peso del  $\ell$  mayor es cada vez más importante, hasta llegar a un punto en el que, de los dos armónicos esféricos que hay sumados, prácticamente toda la contribución proviene de los que tienen  $\ell = 2$  y  $\ell = 3$ , debido a la disminución de la diferencia entre la inercia de los modos.

El estudio de la fotometría en función del ángulo de observación revela que, a pesar de lo anterior, el modo se observará con un  $\ell$  bajo, 0 ó 1, prácticamente para todos los ángulos.

Por el momento, el grado de complejidad introducido por la rotación no nos permite identificar con claridad algunos de los comportamientos aquí expuestos, como es el caso del aumento de la diferencia  $|\sigma - \sigma'|$  con la frecuencia. Tampoco podemos por ahora dar respuesta a la forma de las gráficas de los índices de color en función del ángulo, y a las distintas tipologías que se observan en función del valor de  $m$  utilizado y del tipo de pareja que se esté estudiando. En efecto, se han encontrado tres tipos de modos acoplados: modos **p** y **g** de órdenes intermedios, no afectados por el *avoided crossing*, modos **p** de órdenes altos, que se acoplan entre sí con  $\ell = 3$ , y modos **p** y **g** de órdenes bajos, afectados por el *avoided crossing*, y con coeficientes de contaminación cercanos a 0.5. La causa de estos comportamientos son desconocidas por ahora, a pesar de haber ampliado los estudios realizados en trabajos anteriores (Daszyńska-Daszkiewicz et al., 2002).

Sin embargo, todo esto constituye un reto muy importante para el futuro, ya que el análisis de cada uno de estos fenómenos por separado nos ayudará a entender mejor el comportamiento pulsacional en presencia de rotación.

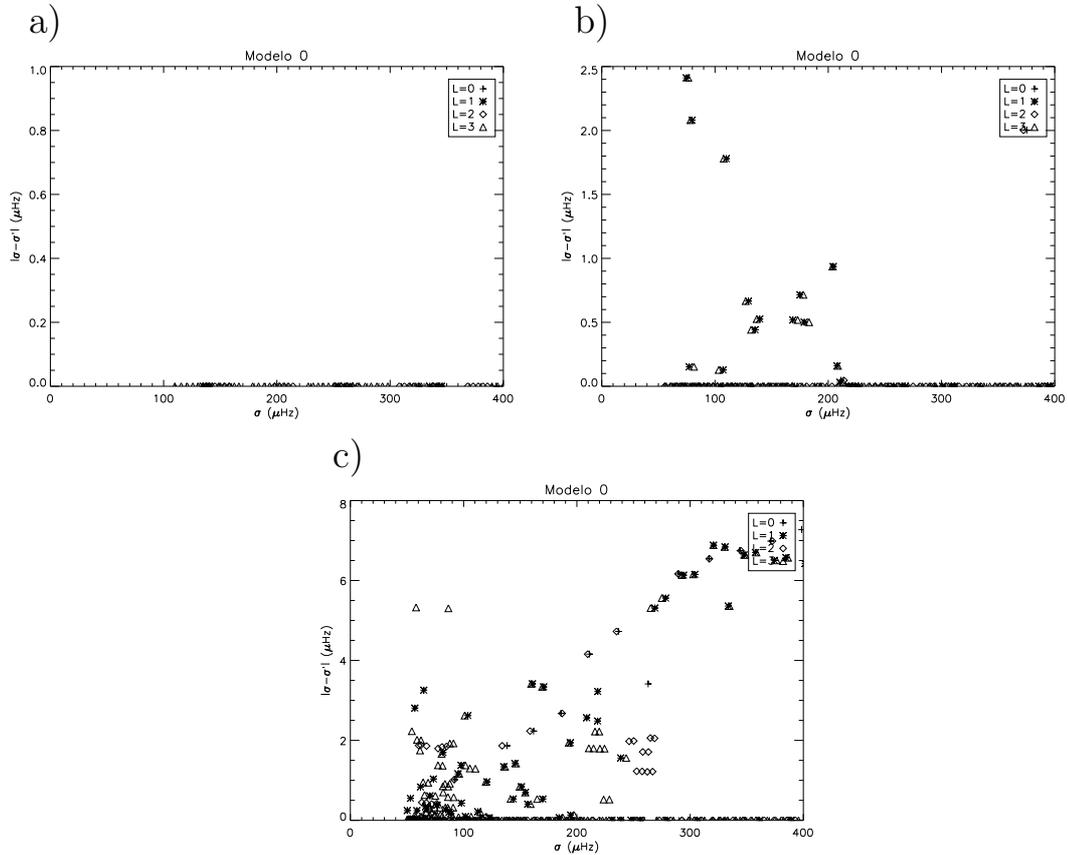


Figura 7.33: Diferencias  $|\sigma - \sigma'|$  para tres puntos del camino evolutivo obtenido con rotación rígida, en función de la frecuencia de los modos: a) 50 millones de años,  $v = 34.0$  km/s; b) 1160 millones de años,  $v = 52.4$  km/s; c) 1570 millones de años, prácticamente al final de la secuencia principal,  $v = 77.7$  km/s.

## 7.6. Efectos de la evolución sobre los acoplamientos por rotación

Las condiciones físicas y estructurales de las estrellas varían en su evolución. Sabemos que esto provoca un cambio en la cavidad resonante de los modos propios de la estrella. La rotación es uno de los factores que contribuyen a esta variación. Con el objeto de estudiar cómo se modifican los acoplamientos, y en concreto, los coeficientes de contaminación a lo largo de la vida de la estrella, se ha obtenido el camino evolutivo del modelo central teniendo en cuenta la rotación, y haciendo uso de las dos aproximaciones ya utilizadas: *rotación rígida* y *rotación diferencial* (Secs. 2.5.1 y 2.5.2).

### 7.6.1. Rotación rígida

Bajo esta hipótesis, la velocidad angular de la estrella se mantiene constante a lo largo de la evolución. Hemos utilizado una velocidad angular en la ZAMS de tal manera que la velocidad de rotación en el punto del diagrama HR dado por las observaciones sea de 52.6 km/s, que sería la que tendría la estrella si se observara con un ángulo de  $20^\circ$ .

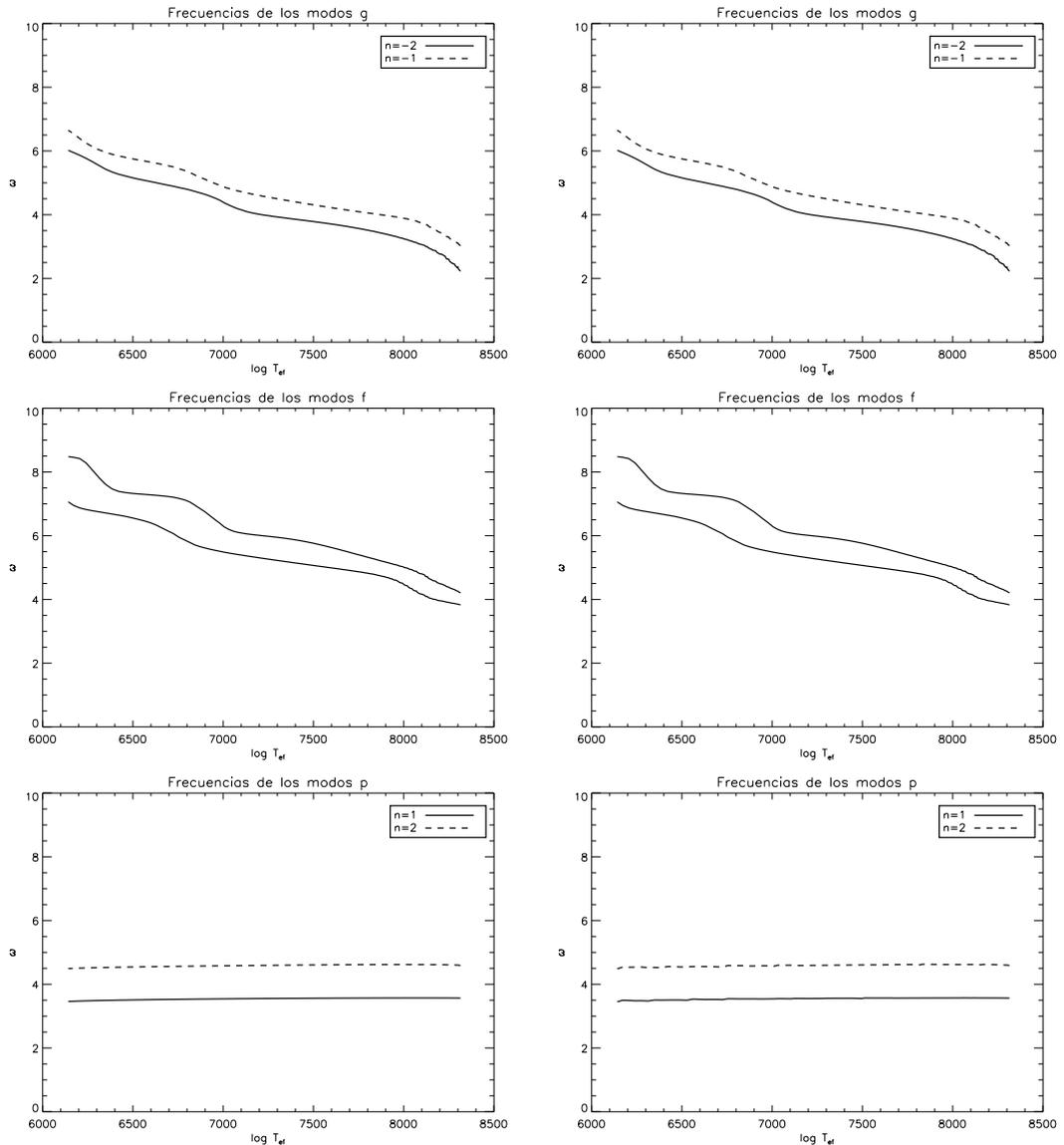


Figura 7.34: Evolución de la frecuencia adimensional de algunos modos **g** (gráficas superiores), **f** (gráficas centrales) y **p** (gráficas inferiores) para el modelo calculado con rotación rígida. A la izquierda se muestran las frecuencias calculadas teniendo en cuenta la rotación, pero no el acoplamiento. En las gráficas de la derecha ya se han incluido los efectos de éste.

En primer lugar se han obtenido los acoplamientos en tres momentos de la evolución: uno en la ZAMS, con una edad de 50 millones de años; otro con 1160 millones de años, correspondiente al punto dado por las observaciones; y por último otro justo antes de que se acabe el hidrógeno en el núcleo de la estrella (punto de *turn-off*), con una edad de 1570 millones de años. En la Fig. 7.33 se muestra la diferencia de frecuencias  $|\sigma - \sigma'|$  de los modos acoplados. Como es de esperar, éstos van apareciendo a medida que la estrella evoluciona. El *avoided-crossing* comienza a aparecer aproximadamente a mitad de su vida, y cerca del *turn-off* la densidad de modos debida a la evolución es tal, que el efecto de la rotación sobre las frecuencias está determinado por el acoplamiento.

En la Fig. 7.34 se muestra la variación de las frecuencias de un número reducido

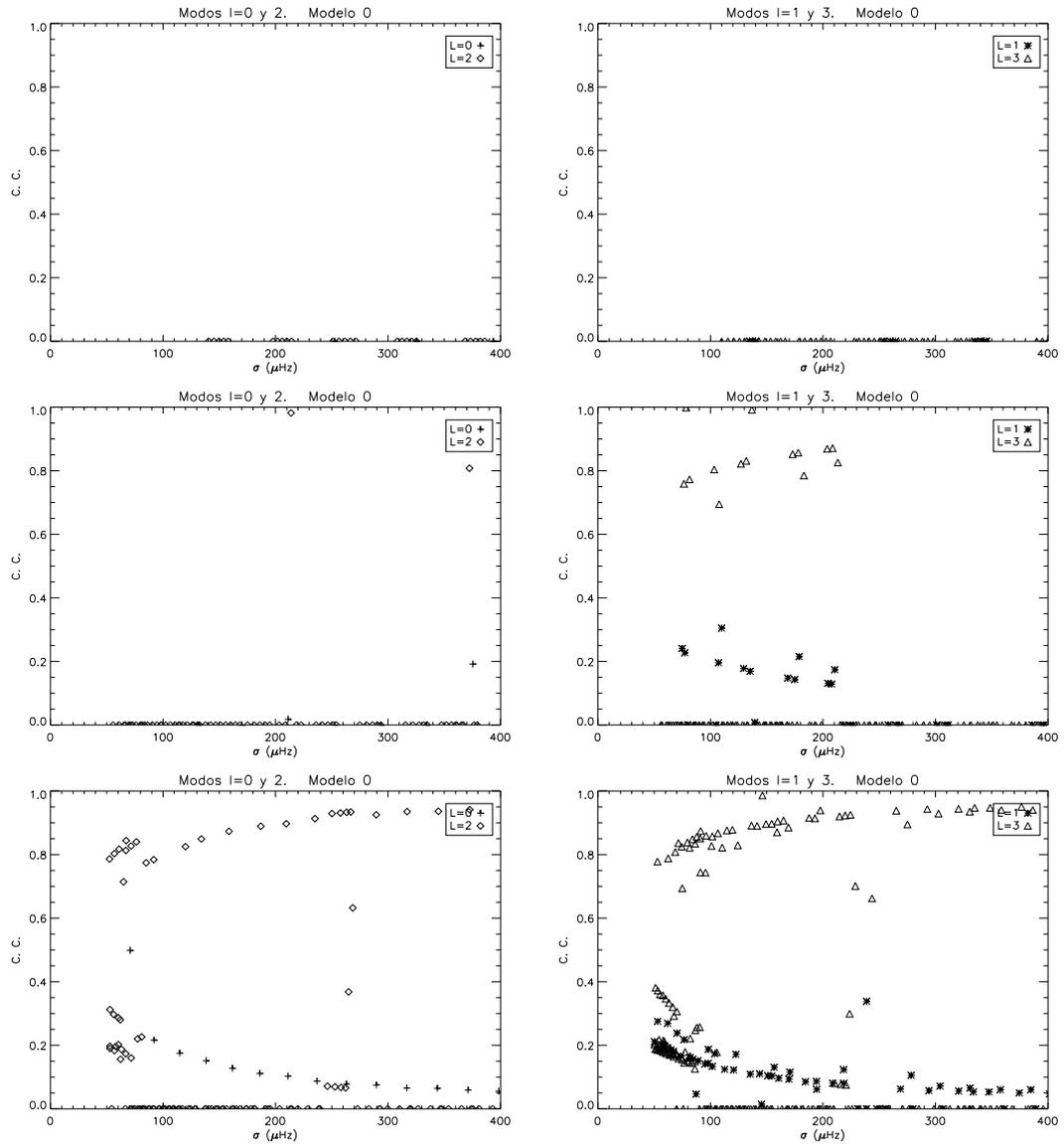


Figura 7.35: Coeficientes de contaminación para los tres puntos del camino evolutivo anteriores, en función de la frecuencia de los modos. *Izquierda*: valores obtenidos para las parejas  $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . *Derecha*: lo mismo, pero para las parejas  $(\ell, \ell') = (1, 3)$ . En orden descendente: modelos con 50, 1160 y 1570 millones de años.

de modos debida a la rotación. No se han elegido todos los valores posibles de  $\ell$  y  $m$ , sino únicamente un par de ejemplos para cada tipo de modo (**g**, **f** ó **p**), con el objeto de aumentar la claridad de las figuras. Las frecuencias que se muestran son adimensionales (ver Sec. 3.3.1), pues de esta forma se consigue eliminar la influencia de la variación de la densidad media de la estrella a lo largo de la evolución. A la izquierda se representan las frecuencias que se obtienen teniendo en cuenta únicamente la rotación, y a la derecha se muestra cómo varían éstas mismas cuando están afectadas por el acoplamiento. Se puede observar el efecto del *avoided crossing*, presente conforme la estrella evoluciona (esto es, se mueve de derecha a izquierda de la gráfica). Como puede comprobarse, las diferencias entre ambas gráficas son mínimas, esto es, la degeneración accidental apenas afecta a las frecuencias. Esto se debe a dos causas

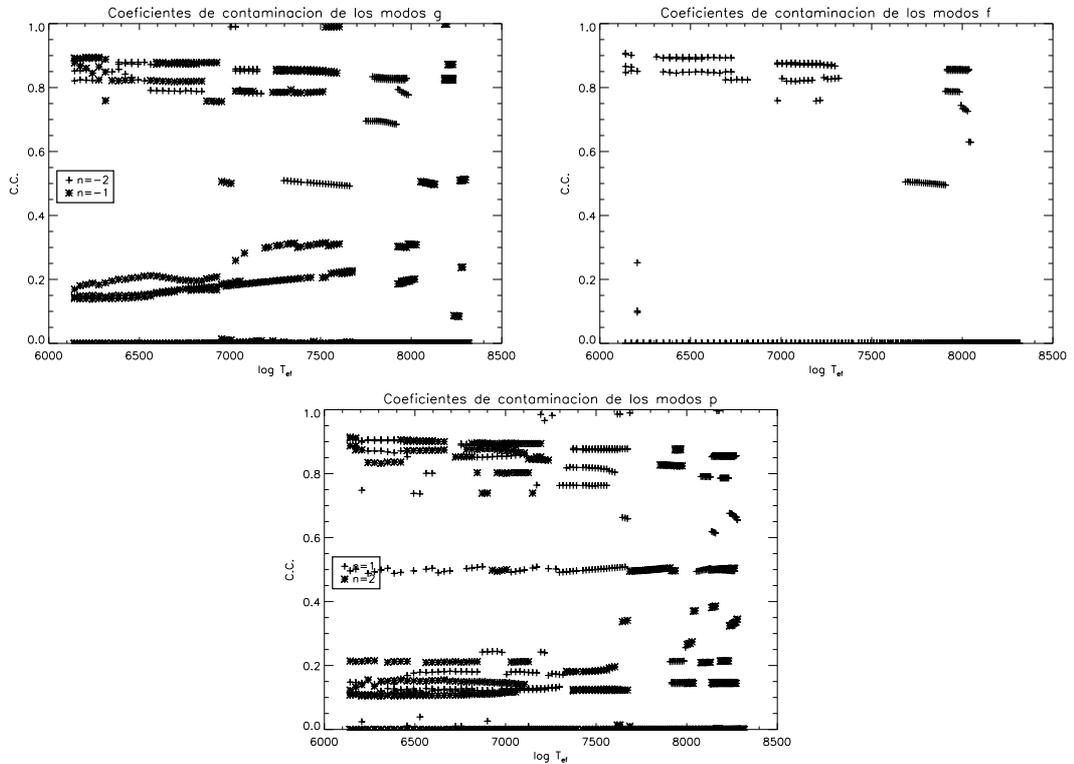


Figura 7.36: Evolución de los coeficientes de contaminación de los modos **g**, **f** y **p** para el modelo central de la caja fotométrica evolucionado con rotación rígida. La evolución viene caracterizada por la temperatura efectiva.

diferentes: primero, a las relativamente bajas velocidades que estamos utilizando, y en segundo lugar, al estar utilizando rotación rígida, la velocidad angular de la estrella a lo largo de la evolución nunca es lo suficientemente elevada como para que este efecto sea notable. Como comprobaremos más adelante (Sec. 7.6.2), cuando se utilice la rotación diferencial, las diferencias sí serán notables.

Veamos ahora cómo se modifican los coeficientes de contaminación. El comportamiento de éstos con la frecuencia sigue la pauta general expuesta hasta ahora, como puede observarse de la Fig. 7.35. Para el modelo más joven, como ya se ha comentado, no se encuentran modos acoplados, lo que da lugar a que no se observe ningún punto en la gráfica correspondiente. El modelo con 1160 millones de años ya fue estudiado en profundidad en la Sec. 7.5.2, por lo que no abundaremos más en su estudio, y por último, para el modelo más evolucionado, aparte del comportamiento general descrito en dicha sección, y de una mayor densidad de modos, se observa además la aparición de numerosos acoplamientos entre modos con el mismo  $\ell$ , en concreto,  $\ell = 3$ . Esto se debe a la proximidad de sus frecuencias como consecuencia del *avoided crossing*. Lo interesante de esta figura es que muestra que a pesar del enorme incremento en el número de modos acoplados, el comportamiento general de los coeficientes se mantiene invariable.

Finalmente, en la Fig. 7.36 se muestra la evolución de los coeficientes de contaminación de todos los modos con órdenes entre  $n = -2$  y  $n = 2$ . A partir de ella se deduce que a lo largo de la vida de la estrella, cada modo mantiene su coeficiente de contaminación aproximadamente constante (siempre que no se llegue a un punto en el que no esté acoplado con ningún otro, en cuyo caso éste valdrá, lógicamente, cero).

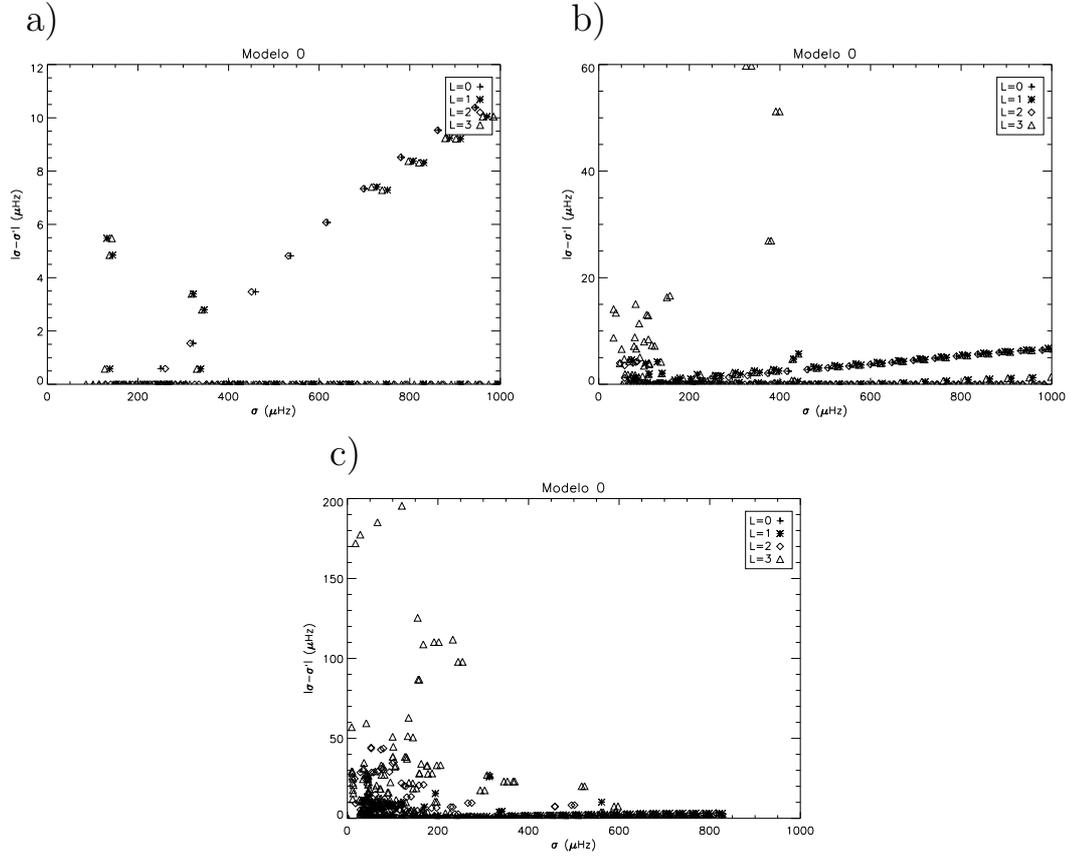


Figura 7.37: Diferencias  $|\sigma - \sigma'|$  para tres puntos del camino evolutivo obtenido con rotación diferencial, en función de la frecuencia de los modos: a) 50 millones de años,  $v = 81.1$  km/s; b) 1160 millones de años,  $v = 52.7$  km/s; c) 1570 millones de años, prácticamente al final de la secuencia principal,  $v = 35.5$  km/s.

Estos pueden tomar valores cercanos a 0.8, 0.5 ó 0.2. Los primeros corresponderán, como ya sabemos, a modos con  $\ell = 2$  o  $\ell = 3$ , mientras que los últimos tendrán  $\ell = 0$  o  $\ell = 1$ . Puede observarse que en éstos disminuye ligeramente su coeficiente de contaminación a lo largo de la evolución (en sentido de  $\log T_{ef}$  decreciente), mientras que en aquéllos aumenta. Con respecto a los modos para los que toma un valor próximo a 0.5 (modos mixtos con  $\ell = 0$  y  $\ell = 2$ ), se observa que sus coeficientes apenas se modifican, aunque conforme evoluciona la estrella, algunos desaparecen y otros aparecen. En concreto, los modos **g** y **f** no presentan modos con este tipo de acoplamiento a partir de un cierto punto, mientras que éstos sí se encuentran presentes en los casos  $n = 1$  y  $n = 2$  a lo largo de toda la vida de la estrella. Para poder comprender estos comportamientos, habría que identificar con detalle cada pareja de modos, y cómo van variando sus propiedades a lo largo de la evolución, algo que queda fuera de los objetivos de este trabajo.

## 7.6.2. Rotación diferencial

En esta segunda hipótesis extrema se supone que el momento angular se conserva localmente. Esto implica que la velocidad angular de rotación variará en capas distribuidas a lo largo del radio estelar con la evolución estelar. Se tiene que elegir,

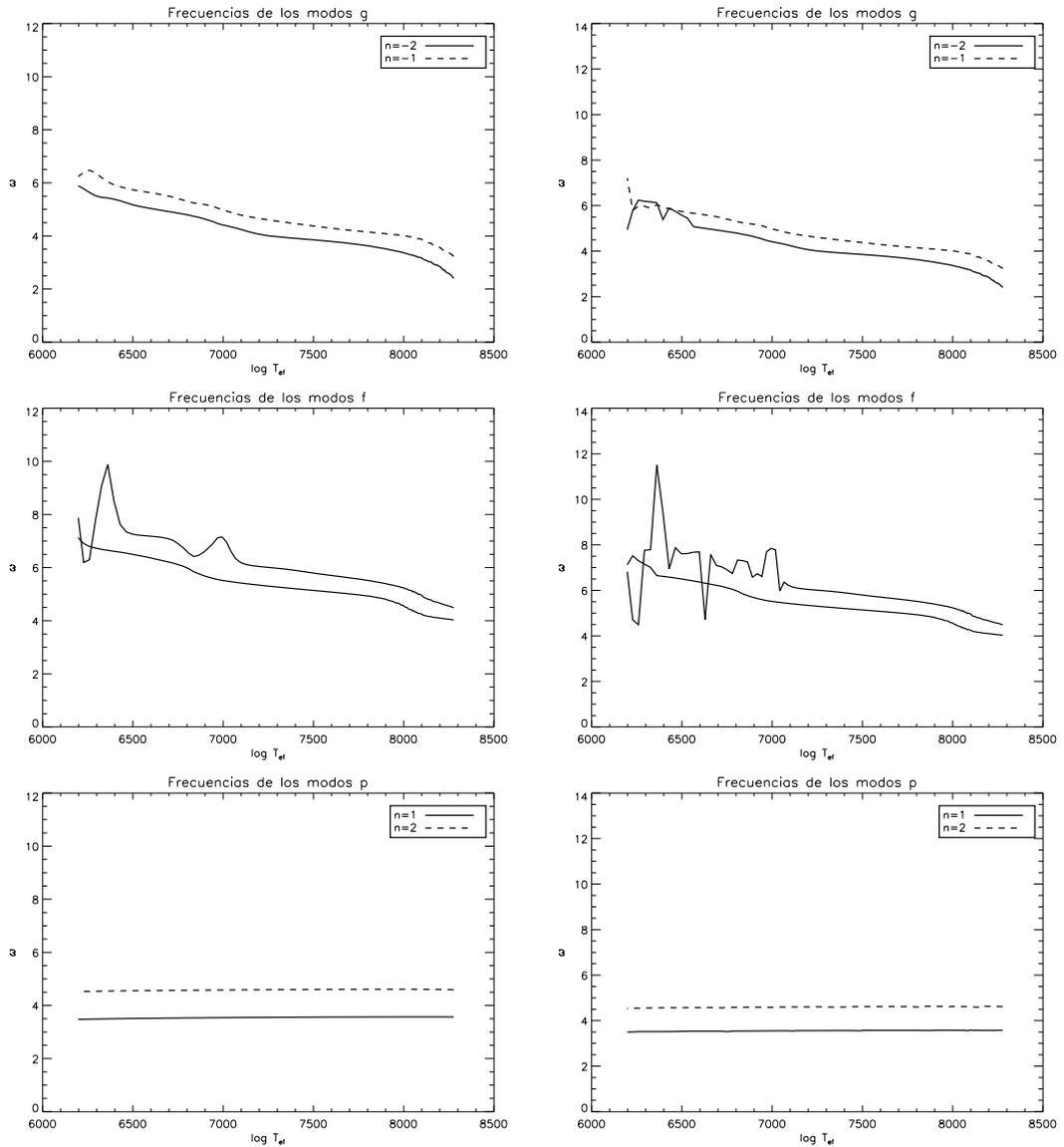


Figura 7.38: Evolución de la frecuencia adimensional de algunos modos **g** (gráficas superiores), **f** (gráficas centrales) y **p** (gráficas inferiores) para el modelo calculado con rotación diferencial. A la izquierda se muestran las frecuencias calculadas teniendo en cuenta la rotación, pero no el acoplamiento. En las gráficas de la derecha ya se han incluido los efectos de éste.

pues, la velocidad inicial de tal manera que cuando la temperatura efectiva y la gravedad coincidan con las observadas, la velocidad de rotación sea de 52.6 km/s (la que tendría la estrella si se observara desde un ángulo de  $20^\circ$ ). Si observamos cómo se acoplan los modos en tres puntos del “track” evolutivo (Fig. 7.37), vemos que  $|\sigma - \sigma'|$  aumenta de forma lineal con la frecuencia a partir de unos 400  $\mu\text{Hz}$  para el modelo más joven, de 50 millones de años. Conforme nos movemos hacia modelos más evolucionados, aumenta el número de modos acoplados, a pesar de que la velocidad de rotación va disminuyendo. Sin embargo, como ya sabemos, el *avoided crossing* provoca el empaquetamiento de los modos, por lo que, el número de los acoplamientos aumenta. De hecho, cuando la estrella está muy evolucionada,

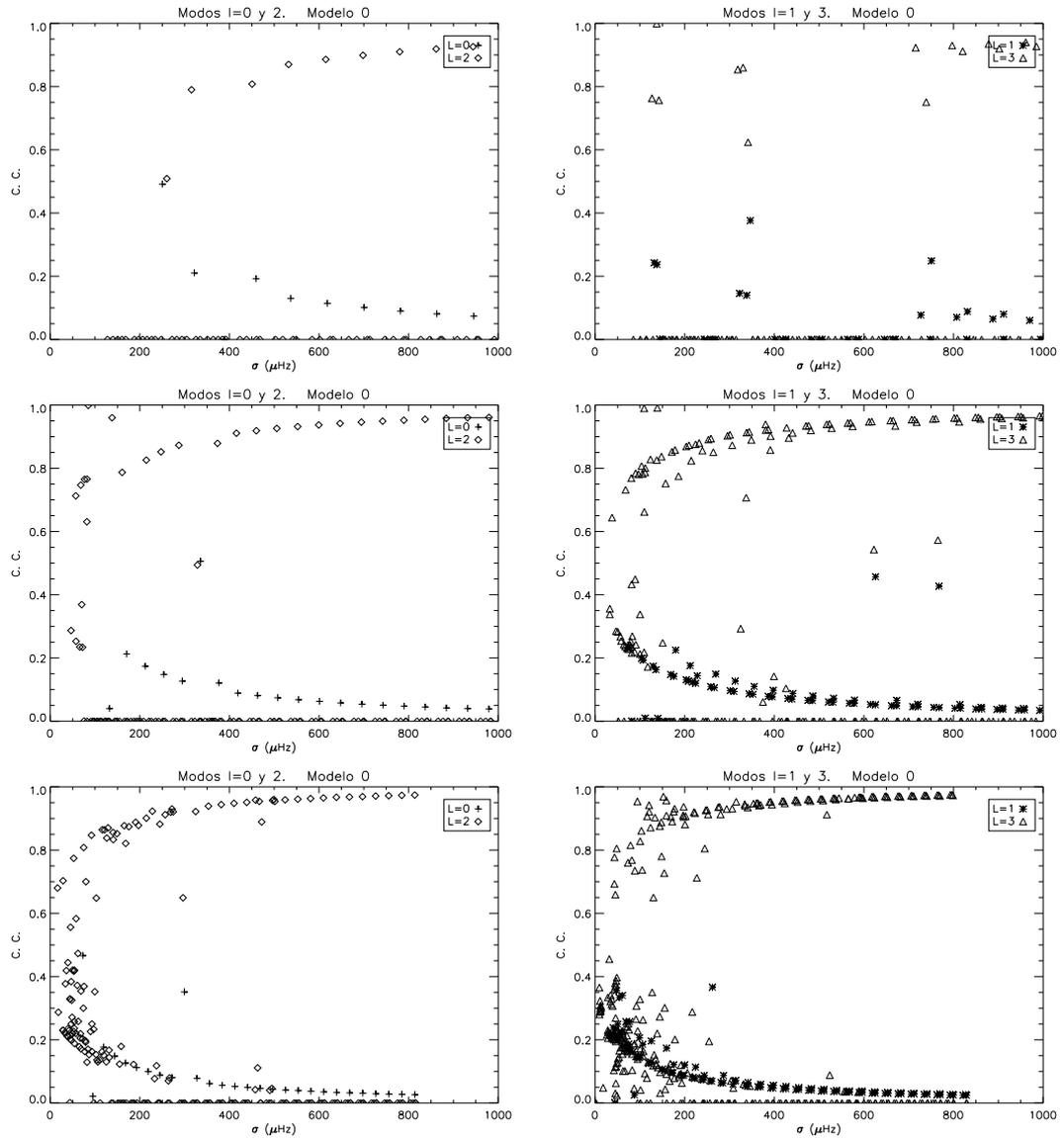


Figura 7.39: Coeficientes de contaminación para los tres puntos del camino evolutivo anteriores, en función de la frecuencia de los modos. *Izquierda*: valores obtenidos para las parejas  $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . *Derecha*: lo mismo, pero para las parejas  $(\ell, \ell') = (1, 3)$ . En orden descendente: modelos con 50, 1160 y 1570 millones de años.

la gran densidad de modos hace que el espectro pulsacional esté dominado por la degeneración accidental.

En cada uno de estos tres momentos de la vida de la estrella se observa una tendencia lineal, de modo que  $|\sigma - \sigma'|$  crece con la frecuencia, y otra superpuesta a ella, en la que esta diferencia se comporta de forma aleatoria, sobre todo para órdenes radiales bajos.

En la Fig. 7.38 se muestra cómo varían las frecuencias a lo largo de la vida de la estrella. Puede comprobarse que la forma de las líneas, cuando se tiene en cuenta el acoplamiento, es más irregular que cuando no se incluye este efecto. Esto es debido a que en el primer caso la frecuencia se modifica bruscamente cuando dos modos se acercan y sufren degeneración accidental, mientras que en el segundo

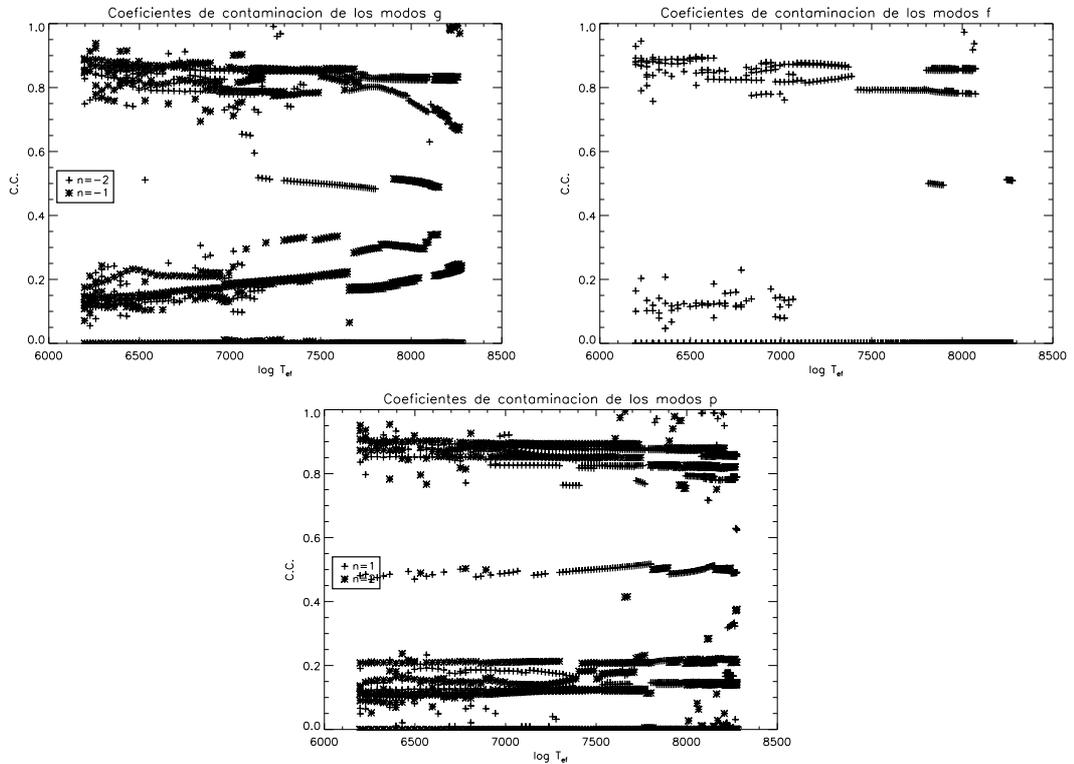


Figura 7.40: Evolución del coeficiente de contaminación de los modos **g**, **f** y **p** para el modelo central de la caja fotométrica evolucionado con rotación diferencial. La evolución viene caracterizada por la temperatura efectiva.

varían suavemente conforme la estrella evoluciona.

Veamos ahora cómo se comportan los coeficientes de contaminación. De nuevo, si analizamos los tres modelos (al inicio, aproximadamente a la mitad, y al final de la vida de la estrella en la Secuencia Principal), vemos que su comportamiento con la frecuencia es el mismo que se presentó en la Sec. 7.5. En el modelo más evolucionado encontramos un elevado número de puntos debido a la gran cantidad de acoplamientos presentes en el espectro pulsacional, muchos de los cuales corresponden a parejas con el mismo valor de  $\ell$ . Con respecto a la evolución de este parámetro a lo largo de la vida de la estrella (Fig. 7.40), se observa que las gráficas son muy parecidas a las que se tenían con rotación rígida, aunque con un número mayor de puntos en todos los estadios evolutivos (la disminución de la velocidad de rotación con la edad se contrarresta con el empaquetamiento de los modos).

## 7.7. Diagramas de Petersen para RV Ari

En esta sección se ha llevado a cabo el estudio de los diagramas de Petersen para la estrella **RV Ari**, y en particular de los efectos de la variación de la masa, la metalicidad y la rotación sobre los cocientes de frecuencias de modos radiales, con el objetivo de acotar estas magnitudes.

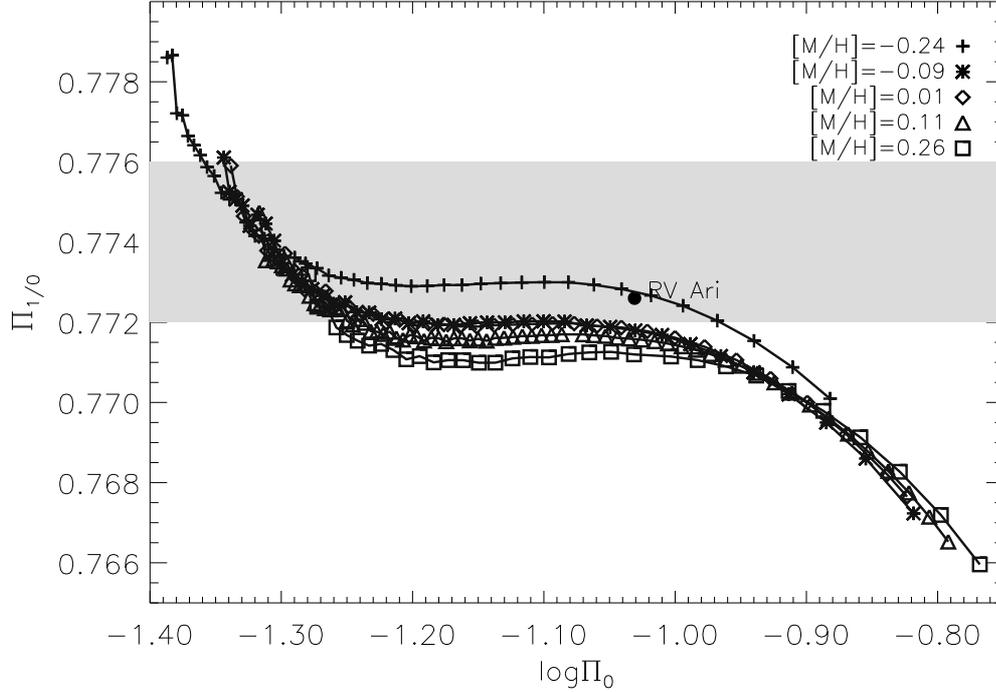


Figura 7.41: Diagramas de Petersen clásicos para **RV Ari**. Se representan los tracks del modelo central con distintas metalicidades, desde  $[M/H]=-0.50$  hasta  $[M/H]=+0.50$ , sin rotación. El círculo representa el valor observado del cociente de frecuencias. El área sombreada corresponde a los valores típicos encontrados para estrellas de Población I.  $\Pi_0$  está en días.

### 7.7.1. Introducción

Los Diagramas de Petersen muestran el cociente entre las frecuencias del modo fundamental radial y de su primer sobretono, como función de la frecuencia de aquél, y se han usado de forma exhaustiva en estrellas pulsantes con dos modos radiales, y de forma específica en *Cefeidas*, *RR Lyrae* y en estrellas  $\delta$  *Scuti* de gran amplitud (**HADS**). Recientemente, el análisis de datos procedentes de proyectos de gran escala como **OGLE** (**O**ptical **G**ravitational **L**ensing **E**xperiment; Szymanski, 2005; Udalski et al., 1997), **NSVS** (**N**orthern **S**ky **V**ariability **S**urvey; Woźniak et al., 2004), **ASAS** (**A**ll **S**ky **A**utomated **S**urvey; Pojmanski, 2002, 2003), o **MACHO** (Alcock et al., 2000), ha permitido conocer mejor las propiedades de estas estrellas doblemente pulsantes.

Los cocientes de frecuencias fueron estudiados por primera vez por Petersen (1973, 1978), y fueron utilizados como indicadores de la metalicidad de las estrellas, como función de su masa y su edad, y para comprobar relaciones masa-luminosidad y/o radio-luminosidad, e incluso, para fijar distancias (Kovács, 2000).

Mientras que estrellas como las  $\beta$  Cephei o las  $\delta$  Scuti de pequeña amplitud (**LADS**) generalmente muestran velocidades de rotación moderadas y altas, las doblemente pulsantes se pueden considerar estrellas con rotación moderadamente lenta. Con respecto a las HADS, solamente hay medidas de  $v \sin i$  para un pequeño porcentaje de las mismas.

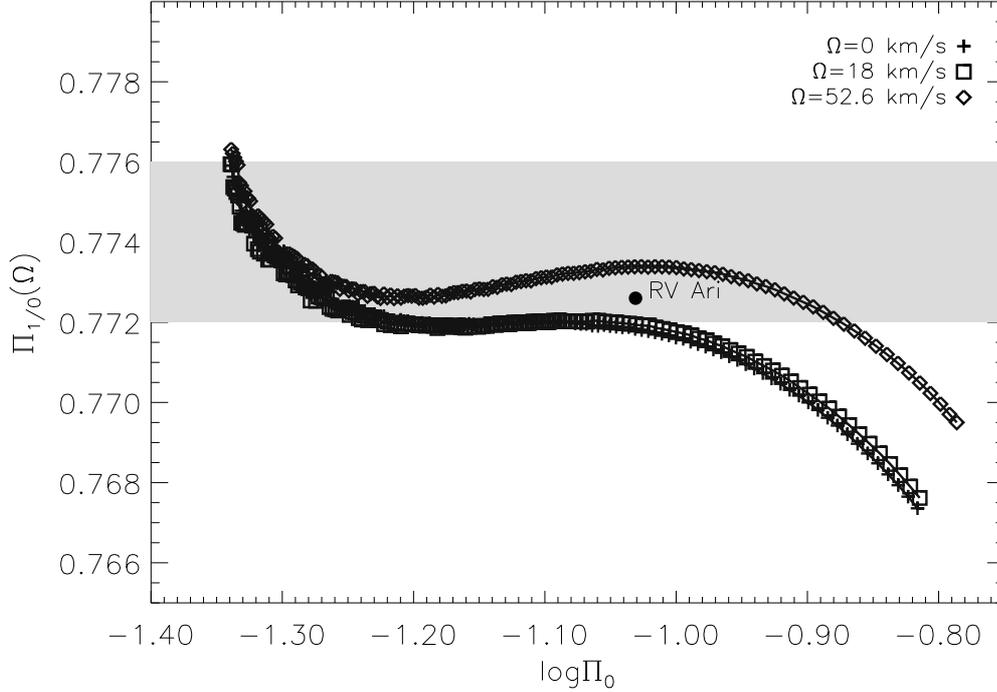


Figura 7.42: Diagramas de Petersen rotacionales para **RV Ari**. Se han utilizado tres velocidades de rotación (aproximación de rotación rígida), sin tener en cuenta los efectos de la degeneración por cercanía de los modos. El valor de la metalicidad utilizado ha sido el observado:  $[M/H]=0.01$ . El círculo representa el valor observado para el cociente de frecuencias. Al igual que antes,  $\Pi_0$  está en días.

Desde el punto de vista teórico, hasta ahora se han realizado pocos estudios de los efectos de la rotación sobre los cocientes de frecuencias. En Pérez Hernández et al. (1995) se tuvieron en cuenta los efectos de segundo orden de la rotación con el objeto de discriminar entre modos radiales y no radiales. Posteriormente, Pamyatnykh (2003) estudió el comportamiento de los cocientes de los modos radiales afectados por la degeneración accidental debida a la rotación para un modelo de una  $\delta$  Scuti típica de  $1.8M_{\odot}$ , encontrando que tenían lugar perturbaciones muy grandes e irregulares sobre dichos cocientes. Más recientemente, Suárez et al. (2005) propusieron un límite de validez de la teoría de perturbaciones (hasta segundo orden) en términos de la velocidad de rotación. Este límite está dado por el cociente de los periodos cuando se considera la degeneración accidental, lo que complica la interpretación de los diagramas de Petersen. Además, Suárez et al. (2006) analizaron las consecuencias de despreciar los efectos de la rotación sobre los cocientes de periodos de modos radiales incluso para velocidades de rotación bajas. En este trabajo se encontró que no sólo la metalicidad, como ya era conocido (Petersen, 1973; Petersen y Christensen-Dalsgaard, 1996, 1999), sino también la rotación de los modelos, eran factores que afectaban al comportamiento de estos diagramas. El primero de ellos, la composición química, afecta en el sentido de que una disminución de la metalicidad conlleva un aumento de los cocientes, de modo que se tiene una herramienta para discriminar, para pulsantes radiales, estrellas de Población I de las de Población II. Por otro lado, si se tiene en cuenta la rotación de los modelos, se obtiene un cociente

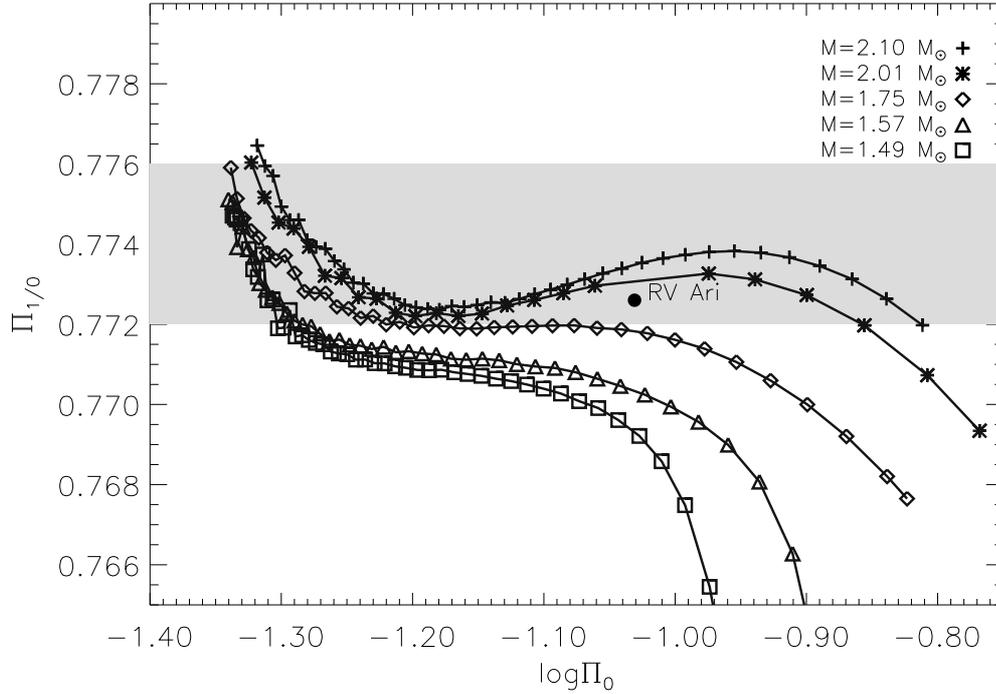


Figura 7.43: Diagramas de Petersen clásicos para los tracks de los cinco modelos de la caja fotométrica, obtenidos sin rotación y con la metalicidad observada:  $[M/H]=0.01$ . El círculo representa el valor observado para el cociente de frecuencias.  $\Pi_0$  está en días.

de periodos que varía con la evolución de la estrella, y con la velocidad angular considerada. Representando este cociente,  $\Pi_{1/0}(\Omega)$  frente al logaritmo del periodo,  $\log \Pi_0$ , se obtienen los denominados *diagramas de Petersen rotacionales*. La conclusión obtenida del estudio fue que el cociente  $\Pi_{1/0}(\Omega)$  aumenta con la velocidad de rotación, siendo el efecto similar a disminuir la metalicidad en los diagramas de Petersen clásicos.

La estrella **RV Ari** reúne las características mencionadas en Suárez et al. (2006), a saber: rotación moderadamente lenta y probablemente pulsa en sus modos radiales fundamental y primer sobretono (**HADS**). Hemos creído, pues, oportuno utilizar este tipo de diagramas con rotación (**RPD**), con el objeto de acotar simultáneamente los valores de  $\Omega$ ,  $M$  y  $Z$ .

Para ello se han obtenido tres conjuntos de caminos evolutivos, de modo que cada uno de ellos permita estudiar cada efecto por separado: el primero tiene en cuenta la variación de la metalicidad para un modelo situado en el punto central de la caja fotométrica, calculado sin rotación, mientras que en el segundo conjunto de caminos se mantiene constante la composición química, pero tiene en cuenta la variación en la velocidad de rotación del modelo (situado siempre en el punto central de la caja fotométrica). De la misma manera que en Suárez et al. (2006), no incluimos el efecto de los acoplamientos en los periodos teóricos de oscilación, ya que éste está aún en fase de estudio por parte de los autores. El último conjunto de caminos evolutivos contiene los tracks correspondientes al modelo central y a las cuatro esquinas de la caja fotométrica, calculados todos con la misma metalicidad (la proporcionada por

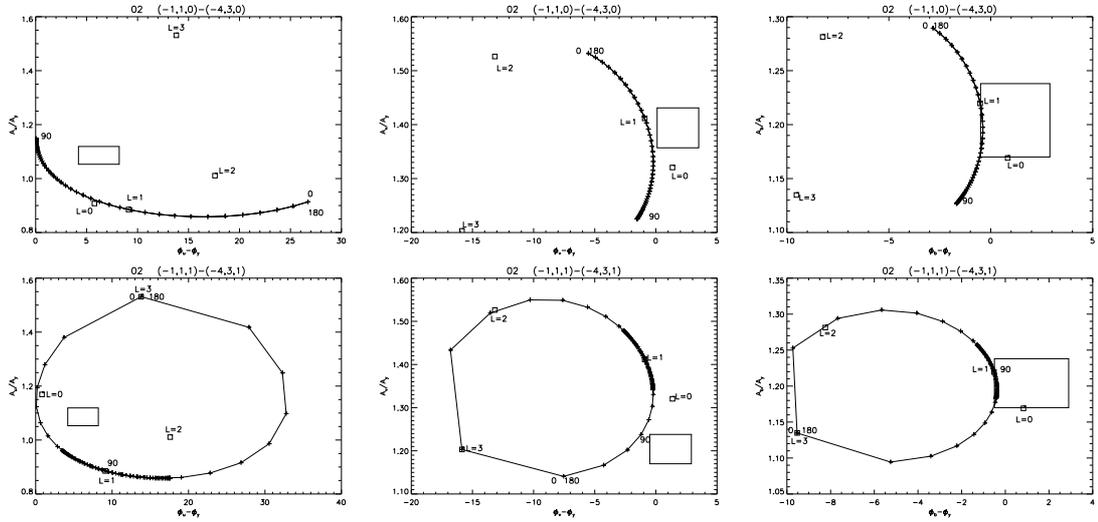


Figura 7.44: Diagramas fase-amplitud para los filtros  $u$ ,  $v$  y  $b$  de las parejas  $(-1, 1, 0) - (-4, 3, 0)$  y  $(-1, 1, 1) - (-4, 3, 1)$  del modelo central. El rectángulo muestra la caja de error de los índices de color observados.

las observaciones), y sin rotación.

## 7.7.2. Resultados obtenidos.

Se han calculado los cocientes de periodos para todos los caminos evolutivos, y se han representado los correspondientes diagramas de Petersen (clásicos y rotacionales) con el objeto de estudiar cada efecto por separado.

En primer lugar se ha tenido en cuenta la metalicidad. Para ello se han obtenido 7 tracks: los cinco utilizados en la Sec. 7.4 más otros dos adicionales, con metalicidades de  $[M/H] = -0.50, +0.50$ . Estos valores se encuentran bastante alejados del proporcionado por las observaciones, sin embargo se han incluido con el objeto de analizar el comportamiento de los diagramas de Petersen en un rango de metalicidades lo más amplio posible. No se ha tenido en cuenta la rotación en el cálculo de estos modelos. Dado que se ha mantenido fijo el punto del diagrama HR que se está estudiando, la variación en la composición química conlleva un cambio en la masa de los modelos, desde  $1.50M_{\odot}$  para  $[M/H] = -0.50$  hasta  $1.91M_{\odot}$  para  $[M/H] = +0.50$ . Los diagramas de Petersen obtenidos se han agrupado en una única gráfica, que se muestra en la Fig. 7.41, en la que cada línea corresponde a un camino evolutivo de un modelo distinto. La zona sombreada corresponde a los valores típicos para estrellas de población I. Como puede observarse, el cociente de periodos aumenta cuando disminuye la metalicidad, como se esperaba. Por otro lado, el track que mejor se ajusta al punto observado corresponde a una metalicidad subsolar,  $[M/H] = -0.24$ ,  $M = 1.62M_{\odot}$ . Sin embargo, hay que tener en cuenta que la rotación aumentará también el valor de estos cocientes, por lo que es de prever que el resultado combinado de los dos efectos dé un mejor ajuste para valores entre  $-0.09$  y  $0.11$ . Esto es, puede confirmarse mediante estos diagramas que la metalicidad de esta estrella es de tipo solar, acotándose a un rango menor al que proporciona la barra de error estándar, de aproximadamente  $\pm 0.20$  dex.

Con respecto a la rotación, se han obtenido tres caminos evolutivos distintos,

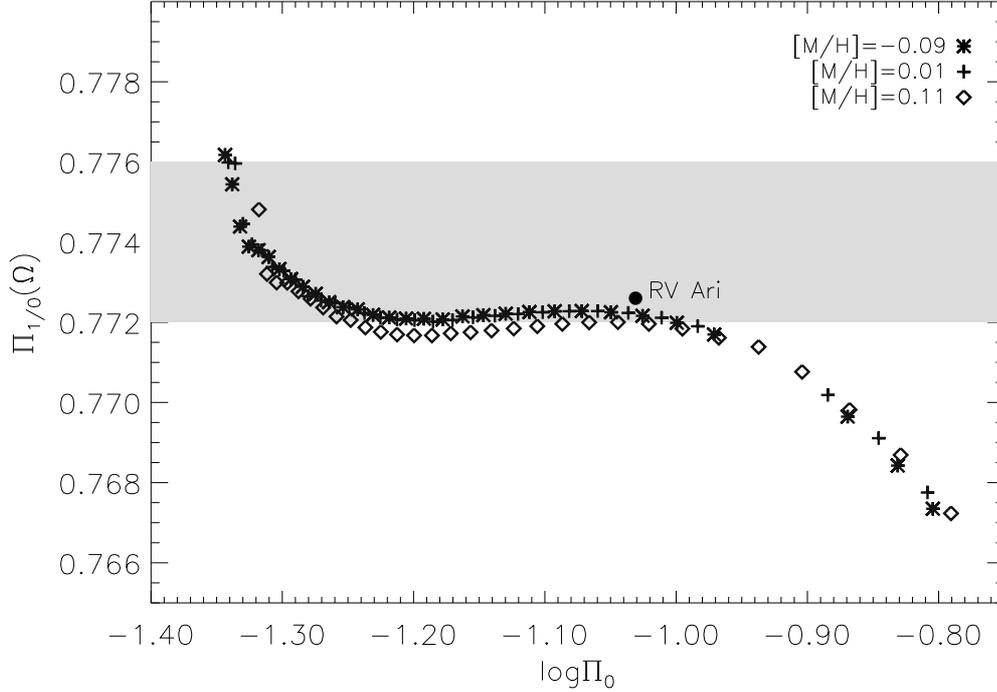


Figura 7.45: Diagramas de Petersen rotacionales para **RV Ari**,  $\Omega = 25$  km/s. Se representan los tracks del modelo central con distintas metalicidades, desde  $[M/H]=-0.09$  hasta  $[M/H]=+0.11$ . El círculo representa el valor observado del cociente de frecuencias. El área sombreada corresponde a los valores típicos encontrados para estrellas de Población I.  $\Pi_0$  está en días.

para el mismo punto del diagrama HR, pero con distintas velocidades de rotación:  $v = 18, 52.6$  y  $70$  km/s. La aproximación utilizada ha sido la de *rotación rígida*, y la metalicidad utilizada ha sido la observada:  $[M/H]=0.01$ . Los resultados se muestran en la Fig. 7.42. Puede observarse que el efecto de aumentar la velocidad de rotación consiste en un aumento a su vez de los cocientes, como se predice en Suárez et al. (2006). Por otro lado, el valor observado para  $\Pi_{1/0}(\Omega)$  se encuentra entre los caminos correspondientes a  $18$  km/s y  $52.6$  km/s. Teniendo en cuenta que la metalicidad es de tipo solar, y por tanto, las curvas no se desplazarán significativamente por esta causa, podemos aceptar estos valores como límites adecuados a la velocidad de rotación de esta estrella. Este resultado tiene una consecuencia doblemente importante: por un lado podemos acotar la velocidad de rotación de **RV Ari**, y por otro, como consecuencia directa, su ángulo de inclinación "i". Si estimamos que el valor real se encuentra a mitad de camino entre los tracks de  $18$  y  $52.6$  km/s, esto es, unos  $36$  km/s, entonces el ángulo de inclinación ha de situarse cerca de los  $30^\circ$ . Así, nuevas medidas fotométricas y espectroscópicas más precisas podrían permitirnos restringir aún más estos parámetros.

Por último, en la Fig. 7.43 se muestran los diagramas de Petersen para los cinco modelos, calculados con metalicidad  $[M/H]=0.01$  y sin rotación. En este caso se predice que **RV Ari** está situada entre los caminos asociados a  $1.75M_\odot$  y  $2.01M_\odot$ . Considerando que la inclusión de la rotación aumenta el valor de los cocientes, podemos considerar que estos dos límites de la masa son adecuados, aunque el valor

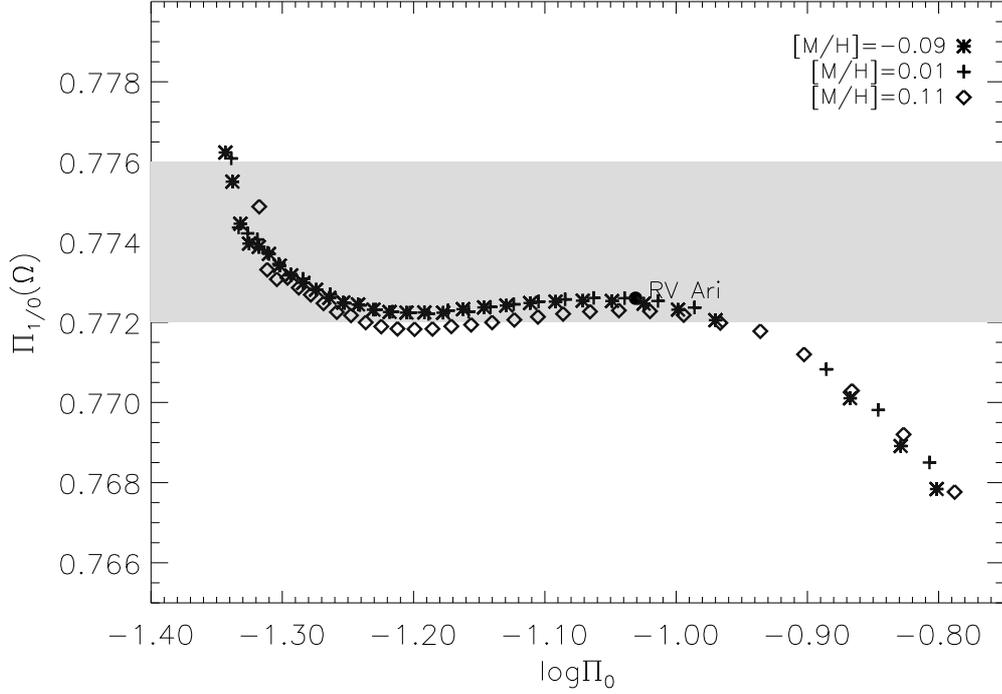


Figura 7.46: Igual que la figura 7.45, para los modelos evolucionados con una velocidad de rotación de  $\Omega = 35$  km/s.

observado se situará más cerca del segundo que del primero.

### 7.7.3. DP y diagramas de color en presencia de rotación

Como ya vimos en la Sec. 7.5.3, al tener en cuenta la degeneración accidental sobre los índices de color, se obtienen curvas en el diagrama fase-amplitud que pueden complicar la identificación modal de las frecuencias observadas. No obstante, este tipo de gráficas también puede aportar información adicional. Observemos la Fig. 7.44. Se muestran las curvas dependientes del ángulo de inclinación que ya aparecieron en la Fig. 7.30, junto con los valores asociados a los modelos sin rotación. Se añaden las cajas de error asociadas a cada filtro. Podemos ver cómo, para el filtro **b**, existe un rango de ángulos para los que se obtienen valores compatibles con las observaciones. Esto restringiría los valores de  $i$  al intervalo  $[40.5^\circ, 53.1^\circ]$ , lo que llevaría a que la velocidad de rotación estaría comprendida entre los valores  $\Omega = 22.5$  y  $28$  km/s. Podemos considerar una velocidad intermedia, por ejemplo:  $\Omega \approx 25$  km/s ( $i = 46^\circ$ ). Este procedimiento, por tanto, proporciona velocidades de rotación compatibles con las obtenidas mediante los Diagramas de Petersen.

Más aún, podemos considerar los Diagramas de Petersen de una serie de modelos obtenidos con una velocidad de  $\Omega \approx 25$  km/s, pero con distintas metalicidades, lo que nos permitiría afinar algo más los valores de metalicidad compatibles con las observaciones. En la figura 7.45 se muestra el cociente  $\Pi_{1/0}(\Omega)$  para tres valores distintos:  $[M/H] = -0.09, 0.01, 0.11$ . Puede observarse que todavía no se tienen valores concordantes con el observado, lo que apunta a velocidades algo mayores que la considerada aquí. No obstante, hemos comprobado cómo a partir de dos estudios

independientes (diagramas de color en presencia de rotación y Diagramas de Petersen) se pueden obtener resultados compatibles para la velocidad de rotación de la estrella.

Por último, nótese que este proceso puede repetirse de forma iterativa, ya que si construimos los diagramas de color equivalentes a los de la figura 7.44 a partir de modelos calculados con una velocidad de  $\Omega = 25$  km/s, podemos obtener un nuevo rango de velocidades de rotación plausibles. El intervalo obtenido ha sido más estrecho aún, seleccionando un valor de 35 km/s, con un error de  $\pm 0.02$  km/s,  $i \in [30.7^\circ, 36.9^\circ]$ . Los Diagramas de Petersen correspondientes a esta velocidad, con las tres metalicidades anteriores, se muestran en la figura 7.46, donde puede observarse que la metalicidad compatible con las observaciones se sitúa ahora entre los valores  $[M/H]=0.01$  y  $[M/H]=-0.09$ .

#### 7.7.4. Conclusiones

En esta sección se han utilizado los diagramas de Petersen clásicos y rotacionales para acotar los valores de la metalicidad, velocidad de rotación y masa de los modelos, parámetros que no podían ajustarse usando solamente las propiedades pulsacionales de la estrella. Esto nos ha llevado a concluir que los valores reales de la metalicidad, velocidad de rotación y masa deben estar situados entre  $[M/H]=-0.09$  y  $0.11$ ,  $\Omega = 18$  y  $52.6$  km/s, y  $M = 1.75$  y  $2.01 M_\odot$ , respectivamente.

Hay que tener en cuenta, como se ha mostrado en las gráficas anteriores, que las variaciones en los valores del cociente son muy pequeñas, del orden de algunas milésimas. Sin embargo, como en este caso se trata de una **HADS**, los valores de las frecuencias están determinados experimentalmente con gran precisión, por lo que puede utilizarse esta herramienta para llevar a cabo el estudio realizado. No obstante, para otras estrellas habría que tener cuidado en la interpretación de los resultados, ya que los errores observacionales son mayores, y pudiera no tener sentido llevar a cabo este tipo de análisis.

### 7.8. Conclusiones generales para RV Ari

Se ha llevado a cabo en este capítulo un estudio completo de las propiedades pulsacionales de la estrella **RV Ari**, y de cómo se ven afectadas por distintos aspectos físicos de los modelos, como la inclusión del tratamiento de la atmósfera, la teoría de la convección utilizada, la anchura de la zona convectiva externa, la composición química y la rotación. Las herramientas empleadas permiten obtener conclusiones que completan los resultados obtenidos mediante la fotometría multicolor únicamente, proporcionando información sobre la estructura interna de la estrella (Casas et al., 2006).

Algunas de las conclusiones obtenidas, sin embargo, están limitadas por las aproximaciones utilizadas en el cálculo tanto de los modelos en equilibrio como de las pulsaciones, como puede ser la no inclusión de la interacción entre la convección y las oscilaciones, o el tipo de rotación empleada. El avance en estas áreas de la Física Estelar permitirá un mejor conocimiento de las propiedades de las oscilaciones estelares, y por tanto, de la estructura interna de las estrellas.

# Capítulo 8

## 29 Cyg

### 8.1. Datos de la estrella

**29 Cyg** (HD 192640, HR 7736,  $\alpha = 20^h14^m32.0^s$ ,  $\delta = 36^\circ48'.4$ ,  $\lambda$  Boo; Rodríguez et al. 2000) es una variable pulsante de tipo  $\delta$  Scuti multiperiodica de pequeña amplitud ( $\Delta V \sim 0.^m02$ ). Desde el punto de vista espectroscópico, **29 Cyg** pertenece al grupo de estrellas tipo  $\lambda$  Bootis, es decir, objetos de población I que muestran peculiaridades en la morfología de algunas líneas metálicas, así como diferencias en abundancias metálicas, excepto para los elementos C, N, O y S. De hecho, fue la primera estrella de este tipo a la que se le detectó carácter pulsante (Gies y Percy, 1977). Sus colores en fotometría Johnson son:  $B - V = 0.^m15$  y  $U - B = 0.^m01$  (Rodríguez et al., 2000), y su magnitud absoluta, calculada a partir de la paralaje trigonométrica medida por el satélite HIPPARCOS ( $\pi = 24.37 \pm 0.55$  msa; ESA (1997)) es de  $M_V = 1.^m86 \pm 0.05$ , que está en muy buen acuerdo con su magnitud absoluta fotométrica ( $M_V = 1.^m80$ ) obtenida a partir de fotometría Strömrgren (Rodríguez y Breger, 2001).

Winzer (1974) estudió **29 Cyg** buscando variaciones en una escala de tiempo de un día o más, no encontrando ninguna evidencia de variaciones de luz de periodos cortos. Finalmente, Gies y Percy (1977) descubrieron su carácter pulsacional, estimando un periodo de unos 45 minutos. A partir de sus observaciones, los autores estimaron que la amplitud de la oscilación en el filtro  $V$  era del orden de 0.02 mag.

Posteriormente, Handler y Paunzen (1995) confirmaron su variabilidad, estableciendo su multiperiodicidad con un periodo dominante de 39 minutos. Kusakin y Mkrtichian (1996) encontraron siete frecuencias, mientras que Paunzen y Handler (1996) concluyeron que sus resultados eran consistentes con los de Gies y Percy (1977). Rolland et al. (2002) llevaron a cabo una campaña coordinada entre los observatorios de Sierra Nevada del Instituto de Astrofísica de Andalucía y el de San Pedro Mártir, en México, en el año 1996, encontrando 14 frecuencias significativas. En este trabajo hemos utilizado las 3 para las cuales los desfases entre distintos filtros pueden ser estimados con suficiente precisión como para realizar un estudio astrosismológico no adiabático. A continuación mostramos las principales características de esta estrella (Rodríguez et al., 2000; Rolland et al., 2002; Rodríguez, 2005):

$T_{ef}$	7980 K
$\log g$	4.12
[M/H]	-0.44
(X, Y, Z)	(0.7438, 0.2496, 0.0066)
$v \sin i$	80 km/s

**Frecuencias observadas y datos fotométricos**(Rodríguez 2005, a partir de los datos de Rolland et al., 2002):

Frecuencia	P (d)	$\nu$ (c/d)	$\nu$ ( $\mu$ Hz)	$A_v$ (mag)	$f_1/f_i$
$f_1$	0.0336	29.7760	344.63	0.0039	
$f_2$	0.0288	34.7104	401.74	0.0056	0.858
$f_3$	0.0267	37.4259	433.17	0.0127	0.796
$f_4$	0.0397	25.1913	291.57	0.0035	1.182
$f_5$	0.0364	27.5067	318.37	0.0032	1.083
$f_6$	0.0393	25.4631	294.71	0.0021	1.169
$f_7$	0.0316	31.6514	366.34	0.0021	0.941
$f_8$	0.0301	33.2451	384.78	0.0020	0.896
$f_9$	0.0304	32.9112	380.92	0.0017	0.905
$f_{10}$	0.0368	27.1457	314.19	0.0014	1.097
$f_{11}$	0.0492	20.3431	235.45	0.0014	1.464
$f_{12}$	0.0317	31.5841	365.56	0.0013	0.943
$f_{13}$	0.0359	27.8326	322.14	0.0012	1.070
$f_{14}$	0.0279	35.8477	414.90	0.0011	0.831

	$\phi_u - \phi_y$	$\phi_v - \phi_y$	$\phi_b - \phi_y$	$A_u/A_y$	$A_v/A_y$	$A_b/A_y$
$f_1$	$9.5 \pm 5.0$	$-0.9 \pm 3.9$	$0.6 \pm 3.9$	$1.241 \pm 0.112$	$1.345 \pm 0.080$	$1.207 \pm 0.076$
$f_2$	$5.4 \pm 3.6$	$-2.5 \pm 1.7$	$-1.3 \pm 2.7$	$1.195 \pm 0.078$	$1.366 \pm 0.058$	$1.243 \pm 0.055$
$f_3$	$6.9 \pm 1.5$	$-1.6 \pm 1.2$	$-0.6 \pm 1.2$	$1.165 \pm 0.033$	$1.309 \pm 0.024$	$1.186 \pm 0.023$

### Caja fotométrica:

$$\log g = 4.32 - 3.92 \quad (\Delta \log g = \pm 0.20)$$

$$\log T_{ef} = 3.910 - 3.894 \quad (\Delta T_{ef} = \pm 150 \text{ K})$$

## 8.2. Oscilaciones no adiabáticas sin rotación

### 8.2.1. Modelos

Al igual que para la estrella anterior, hemos obtenido una serie de modelos para **29 Cyg**, uno en el centro de la caja fotométrica, y otros cuatro, uno por cada esquina de la misma. En principio se utilizó la caja de error estándar:  $\Delta \log g = \pm 0.25$ ,  $\Delta T_{ef} = \pm 150$  K. Sin embargo, los modelos correspondientes a las esquinas inferiores estaban situados por debajo de la ZAMS, por lo que se optó por reducir su tamaño. En principio se ha descartado la rotación, que será incluida en la Sec. 8.4, y para la convección se ha utilizado únicamente la teoría **MLT**, con  $\alpha = 1.5, 1.0$  y  $0.5$ , ya que, como vimos en el capítulo anterior, la **FST**, con  $\alpha_{\text{FST}} = 0.69$ , era inadecuada para describir la zona convectiva externa, al menos para estrellas con temperaturas del orden de la de **RV Ari** o mayores. En consecuencia, para la atmósfera se han

	$M/M_{\odot}$	$\log T_{ef}$	$\log g$	$\log L/L_{\odot}$	$X_C$	Edad	$\alpha$	$f_{min}$	$f_{max}$
00	1.57	3.902	4.12	1.08	0.359	1284	1.5	188	661
01	1.57	3.902	4.12	1.08	0.361	1284	1.0	158	685
02	1.57	3.902	4.12	1.08	0.360	1282	0.5	148	727
10	1.81	3.910	3.92	1.37	0.198	1045	1.5	153	456
11	1.81	3.910	3.92	1.37	0.198	1045	1.0	146	460
12	1.81	3.910	3.92	1.37	0.198	1045	0.5	135	465
20	1.72	3.894	3.92	1.28	0.195	1213	1.5	134	439
21	1.72	3.894	3.92	1.28	0.195	1213	1.0	129	448
22	1.72	3.894	3.92	1.28	0.195	1213	0.5	129	448
30	1.48	3.910	4.32	0.88	0.588	772	1.5	249	988
31	1.48	3.910	4.32	0.88	0.588	772	1.0	246	1030
32	1.48	3.910	4.32	0.88	0.588	772	0.5	170	1092
40	1.42	3.894	4.31	0.81	0.575	935	1.5	198	831
41	1.42	3.894	4.31	0.81	0.575	935	1.0	198	870
42	1.42	3.894	4.31	0.81	0.575	938	0.5	198	947

Tabla 8.1: Modelos calculados para **29 Cyg**, con atmósfera y sin rotación. La convección se ha tratado con **MLT**. La temperatura está dada en grados K, la gravedad superficial  $g$  en el sistema cgs, y la edad en millones de años.  $X_C$  representa la fracción de Hidrógeno en el centro.  $f_{min}$  y  $f_{max}$  muestran los límites inferior y superior del intervalo de inestabilidad ( $\mu\text{Hz}$ ).

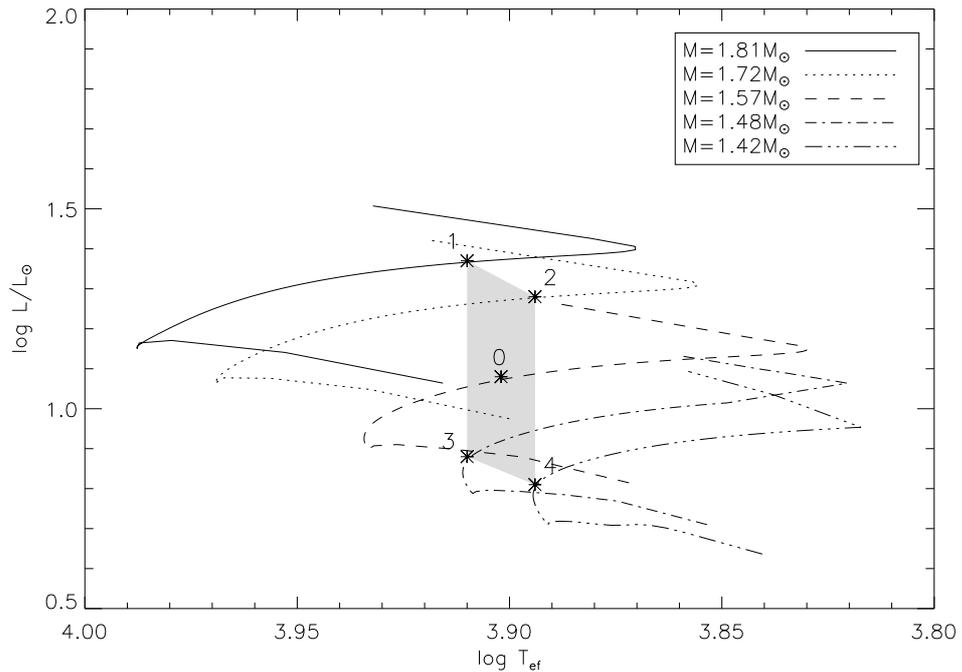


Figura 8.1: Diagrama HR de los modelos *i2* ( $\alpha = 0.5$ ), representados por asteriscos, con sus caminos evolutivos correspondientes. El área sombreada representa la caja de error.

	$\alpha$	$\Delta z/H_p$	%	$f_0$
0	1.5	0.84	0.14	186.22
01	1.0	0.82	0.13	186.10
02	0.5	0.74	0.12	186.52
1	1.5	0.86	0.16	126.42
11	1.0	0.85	0.16	126.43
12	0.5	0.76	0.14	126.43
2	1.5	0.80	0.16	129.03
21	1.0	0.78	0.18	129.03
22	0.5	0.70	0.13	129.03
3	1.5	0.85	0.12	268.15
31	1.0	0.84	0.11	268.15
32	0.5	0.78	0.10	268.15
4	1.5	0.83	0.12	265.27
41	1.0	0.82	0.12	265.28
42	0.5	0.78	0.11	265.08

Tabla 8.2: Valores de  $\alpha_{\max} = \Delta z/H_p$  y del tanto por ciento del radio estelar que ocupa la zona convectiva para cada uno de los modelos calculados.  $f_0$  representa la frecuencia del modo fundamental radial, en  $\mu\text{Hz}$ .

utilizado solamente los modelos de Kurucz. Inicialmente hemos considerado la metalicidad observada (subsolar), con el objeto de realizar una primera aproximación a la identificación modal de esta estrella. Sin embargo, dado que pertenece al grupo de las  $\lambda$  Bootis, posteriormente (Sec. 8.7) mostraremos los resultados que se obtienen cuando se considera una metalicidad solar en el interior y subsolar en la atmósfera, y compararemos las predicciones que se derivan en ambos casos.

En la tabla 8.1 se muestran las principales características de los modelos calculados. Como antes, los límites inferior y superior del rango de inestabilidad,  $f_{\min}$  y  $f_{\max}$ , se han obtenido interpolando el *growth rate*, y determinando las frecuencias para la que éste cambia de signo. En la Fig. 8.1 se muestra el diagrama HR de los modelos con  $\alpha = 1.0$ , con sus correspondientes caminos evolutivos.

### 8.2.2. Rangos de inestabilidad

En la Fig. 8.2 se muestran los rangos de inestabilidad para todos los valores de  $\alpha$  utilizados, mediante la representación del *growth rate*,  $\eta$ , de cada modo. Como ya sabemos, cuando  $\eta > 0$ , el modo es inestable, y cuando  $\eta < 0$ , es estable. En este caso, al contrario de lo que ocurría con **RV Ari**, se observa cierta dependencia del límite inferior con el valor del parámetro  $\alpha$ , excepto en el caso de los modelos  $4j$ . Puede comprobarse también que las frecuencias del modo fundamental radial predichas teóricamente no se acercan a los valores observados, quedando bastante por debajo de éstos. Lo mismo ocurre con las frecuencias del primer sobretono radial de cada modelo.

La dependencia del límite superior con el valor de  $\alpha$  es bastante acusada para todos los modelos, excepto para los  $1j$ . En general, las predicciones para  $\alpha = 0.5$  difieren significativamente de las obtenidas con  $\alpha = 1.0$  y  $1.5$ . Además, puede com-

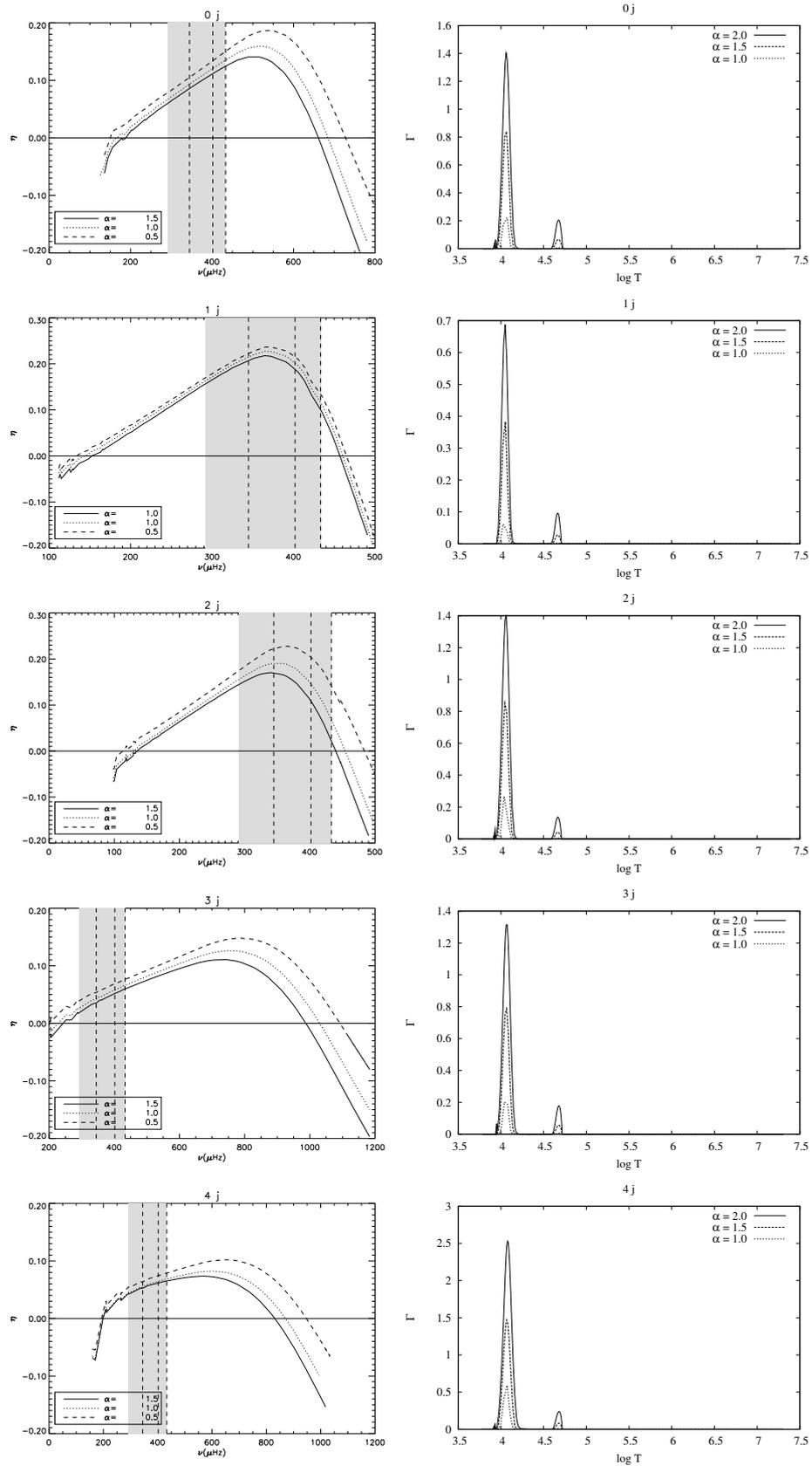


Figura 8.2: *Izquierda:* *growth rate* de cada modo frente a su frecuencia del mismo, para distintos valores de  $\alpha$ . En líneas verticales se muestran las tres frecuencias consideradas. La zona sombreada muestra el intervalo de frecuencias de los modos detectados observacionalmente. *Derecha:* Eficiencia convectiva, en función de  $\log T$ , de cada modelo.

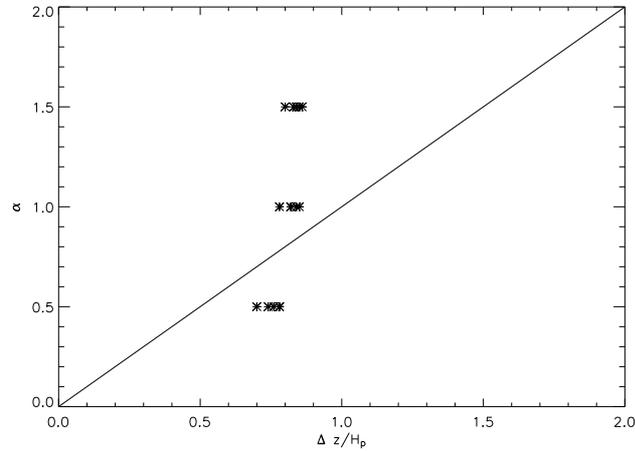


Figura 8.3: Valor de  $\alpha$  utilizado en el cálculo de los modelos, frente al tamaño de la zona convectiva más externa (en unidades de  $H_p$ ). La línea representa los puntos en los que  $\alpha = \Delta z/H_p$ .

probarse que disminuyendo este parámetro, los límites superiores se desplazan hacia frecuencias más altas, con lo que los modos de órdenes elevados se van estabilizando. Si se analizan las gráficas de la derecha, donde se muestra la eficiencia convectiva en función del logaritmo de la temperatura, se observa que los modelos más masivos son aquellos para los que la convección es menos eficiente. Esto explicaría por qué, para éstos, el límite superior del rango de inestabilidad es prácticamente independiente del valor de  $\alpha$ . La eficiencia convectiva alcanza los valores máximos para los modelos menos masivos ( $4j$ ), precisamente los que presentan mayor dependencia de  $f_{max}$  con  $\alpha$ .

Al igual que se hizo en la anterior estrella, podemos preguntarnos en qué casos se están utilizando valores de  $\alpha$  demasiado grandes. Para ello hay que analizar los resultados mostrados en la tabla 8.2. Vemos que para todos los modelos, en los casos en los que se ha utilizado  $\alpha = 1.5$  y  $\alpha = 1.0$ , estos valores son mayores que los de  $\Delta z/H_p$ , donde  $\Delta z$  es el tamaño de la zona convectiva, como ya sabemos, y  $H_p$  es la escala de presiones. Por lo tanto, en todos estos casos se están utilizando valores demasiado grandes, y se está extendiendo de forma artificial el tamaño de la zona convectiva. Además, se observa que los valores de  $\Delta z/H_p$  son muy parecidos en estos casos, mientras que cuando  $\alpha$  disminuye a 0.5, se obtiene un valor significativamente menor del tamaño de la zona convectiva. Esto nos explicaría por qué los límites superiores que se están estudiando son más parecidos entre sí en los casos de  $\alpha \geq 1$  que entre cualquiera de éstos y  $\alpha = 0.5$ . Por tanto, podemos concluir que los valores que parecen ser más coherentes (en el sentido de que se obtiene  $\alpha < \Delta z/H_p$ ) son aquellos para los que se utiliza  $\alpha = 0.5$  ( $j = 2$ ). En efecto, obsérvese que en la Fig. 8.3, donde se muestran los tamaños de las zonas convectivas frente a los valores de  $\alpha$  utilizados, éstos son los únicos modelos situados por debajo de la línea dada por ( $\alpha = \Delta z/H_p$ ). La explicación a esto la encontramos nuevamente en la delgadez de las zonas convectivas y en la pequeña eficiencia existente en las mismas. Resultados parecidos habían sido obtenidos ya para **RV Ari**, lo que lleva a concluir que se hace necesario un estudio cuidadoso de los valores de  $\alpha$  que se utilizan en los cálculos de estructura estelar, y que generalmente no se realizan.

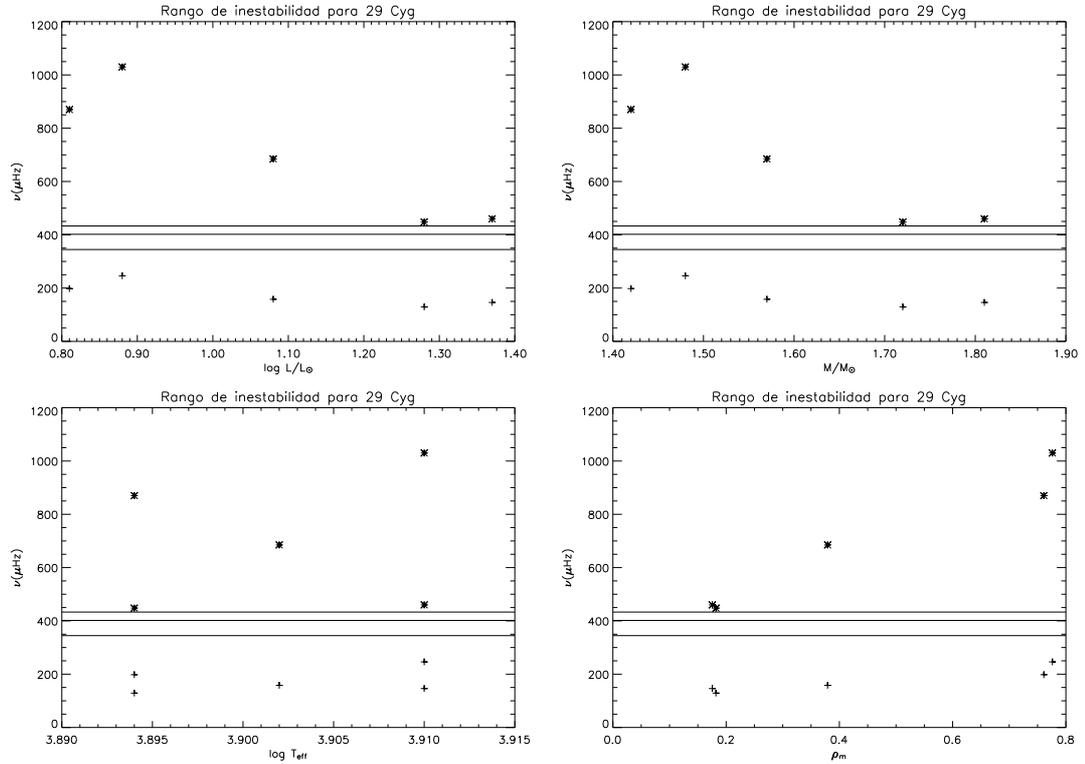


Figura 8.4: Variación de los límites de los rangos de frecuencias inestables en función de la luminosidad (*arriba a la izquierda*), la masa (*arriba a la derecha*), la temperatura efectiva (*abajo a la izquierda*), y la densidad media (*abajo a la derecha*) de los modelos. Se representan también las tres frecuencias observadas mediante líneas horizontales. Se muestran solamente los resultados para  $\alpha = 1.0$ , por claridad de las figuras.

Para todos los modelos calculados se predice que las 14 frecuencias observadas son inestables, por lo que pueden considerarse válidos. Se puede observar en la Fig. 8.2 que para los más masivos dichas frecuencias se encuentran cerca de  $f_{max}$ , mientras que para los menos masivos se aproximan a  $f_{min}$ . En el caso de los  $2j$ , la frecuencia  $f_3$  se sitúa cerca del límite superior, aunque sigue prediciéndose inestable, por lo que pueden seguir considerándose válidos. Por otra parte, hemos comprobado que, como ya ocurría con **RV Ari**, estos límites aumentan con la densidad media, mientras que no dependen de la temperatura efectiva (ver Fig. 8.4).

### 8.2.3. Observables no adiabáticos

En la Fig. 8.5 se presentan los valores de los observables no adiabáticos  $f_T$  y  $\Psi_T$  de los modelos calculados. Dado que  $f_g$  no depende de los parámetros que estamos considerando, como ya se comentó en la Sec. 7.2.4, no lo hemos incluido en este estudio. Analicemos los resultados:

- $f_T$

En primer lugar, se puede comprobar que este observable apenas depende de  $\alpha$ , aunque aumenta ligeramente conforme disminuye el valor de dicho parámetro. Este comportamiento está asociado a la mayor temperatura efectiva que tiene

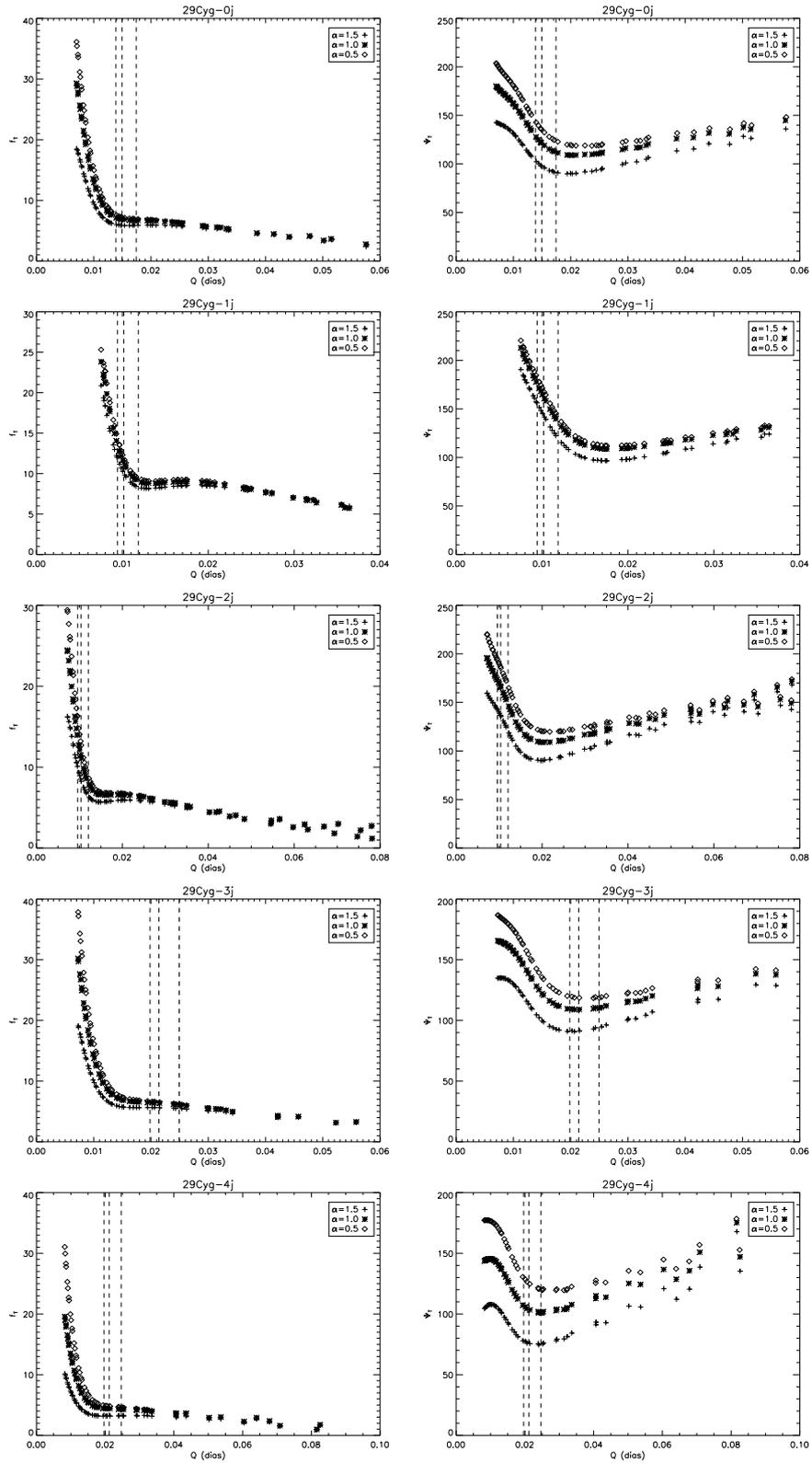


Figura 8.5: Observables no adiabáticos de los distintos modelos obtenidos para la estrella **29 Cyg**, en función de la constante de pulsación,  $Q$ . A la izquierda se muestra  $f_T$  y a la derecha el desfase,  $\Psi_T$ . Los valores asociados a los modos observados se muestran mediante líneas verticales.

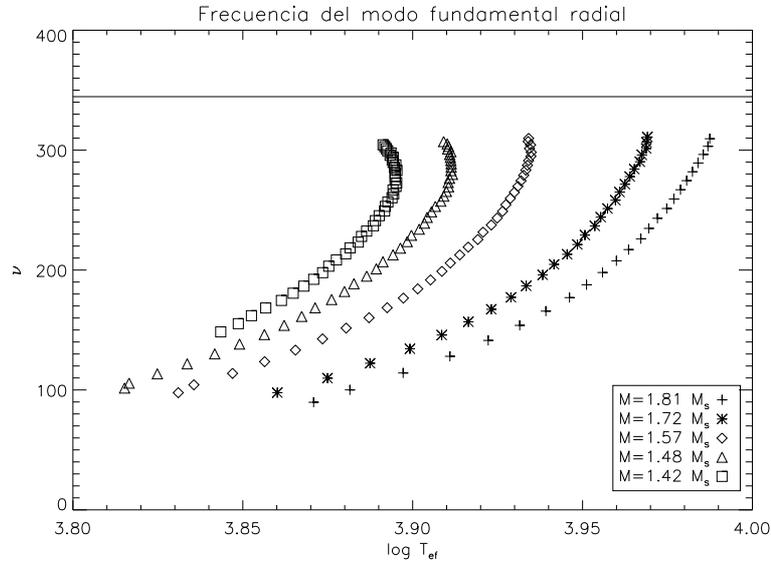


Figura 8.6: Frecuencia del modo fundamental radial a lo largo de la evolución de los distintos modelos, realizada con  $\alpha = 0.5$ . La línea horizontal muestra el valor de la frecuencia  $f_1$  observada.

esta estrella. En efecto, como ya encontró Moya et al. (2004a,b), a partir de  $\log T_{ef} \approx 3.94$ , los observables no adiabáticos dependen muy débilmente de  $\alpha$ . Por otro lado, notemos que  $f_T$  toma valores algo mayores que en el caso de **RV Ari**, resultado también conocido de los trabajos anteriormente citados, en los que se demuestra que su valor aumenta con la temperatura efectiva del modelo.

#### ■ $\Psi_T$

En este caso se obtienen valores algo más elevados que los de la estrella anterior, debido de nuevo a la mayor temperatura efectiva de **29 Cyg**. Así, se observa que incluso para  $\alpha = 1.5$ ,  $\Psi_T$  toma un valor en torno a los  $100^\circ$  para el modo fundamental radial. Estos resultados son compatibles con los de Moya et al. (2004a,b), los cuales encuentran que este observable aumenta con la temperatura efectiva. Así pues, en este caso los valores se acercan a  $180^\circ$  (valor adiabático de  $\Psi_T$  para el modo fundamental radial), aunque todavía son algo bajos (se espera que el grado de no adiabaticidad no sea demasiado elevado). Se observa también que  $\Psi_T$  aumenta conforme disminuye  $\alpha$ , resultado también conocido de los trabajos anteriores y de la estrella **RV Ari**. La forma general de las curvas (tanto para este observable como para  $f_T$ ) sigue, pues, la pauta general de todos los estudios realizados hasta ahora.

### 8.2.4. Variación de los observables no adiabáticos a lo largo de la evolución estelar

Vamos a estudiar de nuevo cómo varían los observables no adiabáticos para el modo fundamental radial a lo largo de los tracks evolutivos asociados a cada uno de los modelos que estamos considerando. En este caso se han llevado a cabo los

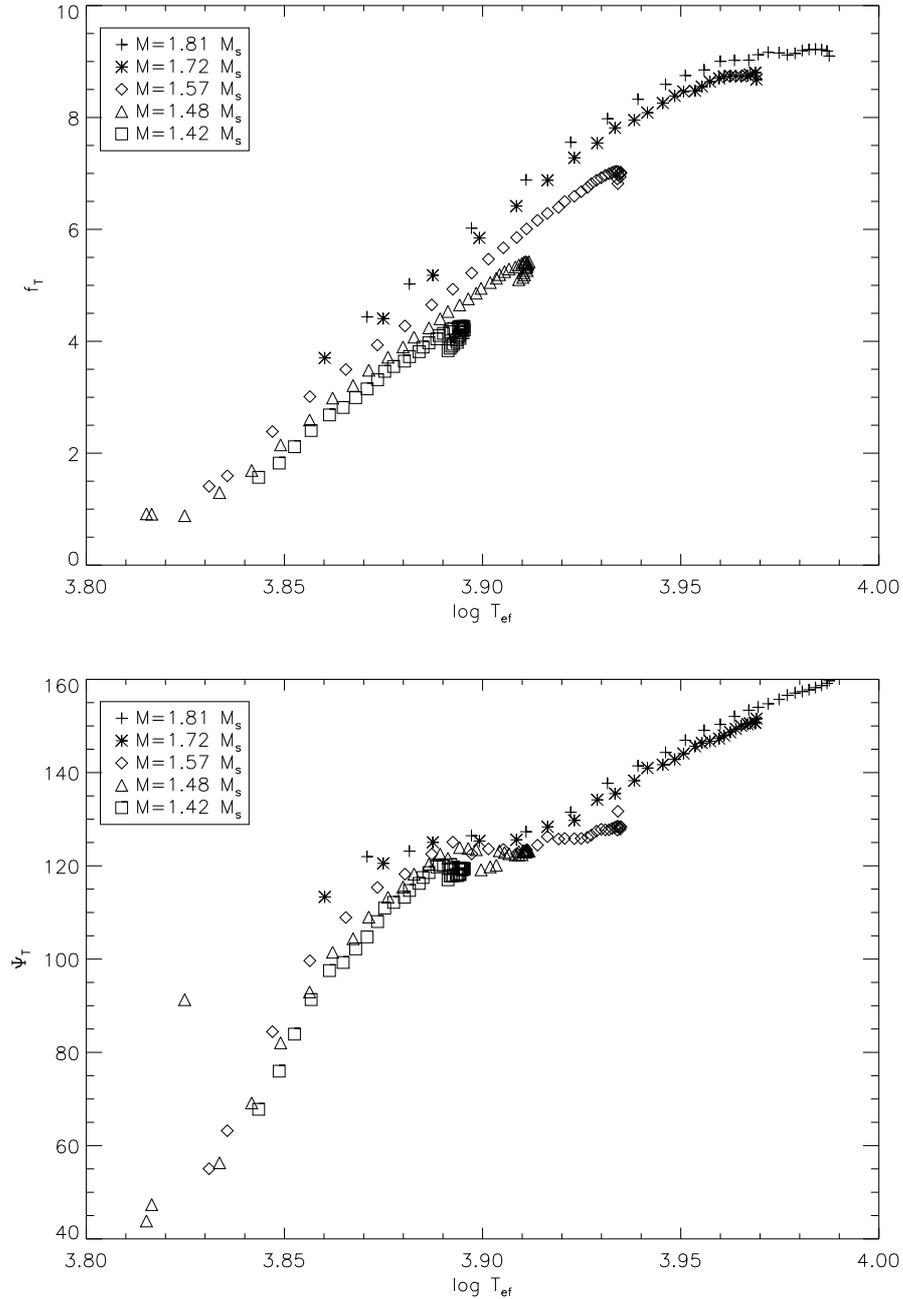


Figura 8.7: Observables no adiabáticos para el modo fundamental radial a lo largo de la evolución de los distintos modelos. Se han obtenido utilizando la **MLT** con  $\alpha = 0.5$ . En la gráfica superior se muestra  $f_T$ , y en la inferior,  $\Psi_T$ .

cálculos utilizando únicamente la **MLT**, con un valor de  $\alpha = 0.5$ , que como hemos visto, es el que mejor describe las propiedades de estas estrellas.

En la Fig. 8.6 se muestra la evolución de la frecuencia del modo fundamental radial a lo largo de los cinco caminos evolutivos. Por un lado, se observa que, como en el caso de la estrella anterior, y como es esperable, su valor disminuye conforme evoluciona la estrella. Por otro, vemos que  $f_1$  se encuentra por encima de estas frecuencias para todos los modelos, lo que indica que en ningún caso podrá identificarse ésta con el modo fundamental, que de hecho, se predice estable.

En la Fig. 8.7 se muestra el comportamiento de los observables no adiabáticos  $f_T$  y  $\Psi_T$  del modo fundamental radial a lo largo de la evolución. En primer lugar, podemos comentar que, como se había obtenido hasta ahora, conforme la estrella evoluciona disminuyen los valores tanto de  $f_T$  como de  $\Psi_T$ . Este comportamiento es sobradamente conocido y no insistiremos más en él.

Para  $f_T$  se observa un máximo en la zona de altas temperaturas, debida a la forma que presentan los tracks. En efecto, en la Fig. 8.1 puede observarse que, excepto para el más masivo, los modelos aumentan su temperatura efectiva en las fases iniciales de la evolución, apareciendo un máximo en el diagrama HR, a temperaturas más bajas cuanto menor es la masa. Por otro lado, nótese que para temperaturas elevadas (por encima de  $\log T_{ef} \approx 3.94$ ), este observable apenas depende de la masa del modelo, mientras que entre este valor y  $\log T_{ef} \approx 3.85$ , las curvas se separan, (en este rango  $f_T$  aumenta con la masa), volviéndose a unir para  $\log T_{ef} \lesssim 3.85$ .

Con respecto a  $\Psi_T$ , se obtienen también resultados esperados, aunque las curvas se encuentran algo más próximas entre sí que en el caso de **RV Ari**, de nuevo como consecuencia de las mayores temperaturas consideradas. Se observa además que la dependencia de este observable con la masa empieza por debajo de  $\log T_{ef} \approx 3.88$ , temperatura algo menor que los valores encontrados hasta ahora. Esta diferencia podría estar relacionada con la metalicidad de los modelos, que en este caso es subsolar, y por tanto bastante diferente a la de **RV Ari** y a las utilizadas en Moya et al. (2004a,b). En efecto, con el objeto de obtener la temperatura efectiva y la gravedad observadas, se han tenido que utilizar masas menores a las requeridas en el caso de que la metalicidad hubiera sido la solar. Esto conlleva que las densidades medias de los modelos sean mayores, derivándose algunas diferencias en los comportamientos de los observables. Sin embargo, éstas son relativamente pequeñas, siendo las propiedades generales las mismas que las obtenidas anteriormente.

### 8.2.5. Conclusiones

Los resultados obtenidos están en plena concordancia con los conocidos hasta ahora, aunque en este caso, al tratarse de una estrella algo más caliente que **RV Ari**, se tienen comportamientos más parecidos a los estudiados por Moya et al. (2004a,b) que en el caso anterior. Por otra parte, aunque todavía se espera que el tratamiento de la interacción de la convección con la pulsación pueda proporcionar alguna mejora de los resultados, podemos aventurar que ésta no será tan importante como para la estrella anterior, ya que las zonas convectivas externas son en general bastante más pequeñas, y la eficiencia menor.

## 8.3. Identificación de los modos

### 8.3.1. Fotometría Strömgren

Pasamos ahora a estudiar los índices de color para la fotometría Strömgren, con el objeto de comparar con los resultados experimentales. Se ha utilizado para la atmósfera la teoría **MLT**, con  $\alpha_{\text{atm}} = 1.25$ . Al igual que en el caso de la estrella anterior, las frecuencias para las que se lleva a cabo este estudio son las más cercanas a las observadas, dentro de un rango de un 5% en torno a cada una de ellas. Ya

se comprobó en el capítulo anterior que este criterio era adecuado para seleccionar solamente ciertos modos.

- **Modelos  $0j$**

Como puede apreciarse en la Fig. 8.8, los diagramas de color predicen para las dos frecuencias  $f_1$  y  $f_2$ , dos posibilidades:  $\ell = 0$  y  $2$ . Al no poder discriminar entre ambos valores de  $\ell$ , ninguna de ellas puede identificarse de manera unívoca. Por otra parte, no hay ningún modo compatible con los valores observados para  $f_3$ , por lo que tampoco en este caso puede realizarse la identificación. Puede comprobarse que la dependencia de los valores de los cocientes de amplitud y las diferencias de fase de los modos radiales con el valor de  $\alpha$  es menor que la de los modos no radiales. Este resultado ya se encontró en el estudio de **RV Ari**, por lo que podemos deducir que las pulsaciones radiales son menos sensibles a este parámetro (y a las diferencias en la estructura interna que conlleva su variación) que los no radiales. Además, se puede comprobar que las predicciones teóricas obtenidas para  $\alpha = 1.0$  y  $0.5$  son más parecidas entre sí que las correspondientes a  $\alpha = 1.5$ , siendo mejor la correspondencia con los índices observados para  $\alpha \leq 1.0$ , aunque en este caso se pierde discriminación (este resultado también fue encontrado para la estrella **RV Ari**). Analicemos los resultados para cada frecuencia por separado.

Para  $f_1$  se tiene, con  $\alpha = 1.5$ , que solamente el tercer sobretono radial ( $n = 4$ ) es compatible con las observaciones. Sin embargo, para  $\alpha = 1.0$  y  $0.5$  también cabe otra posibilidad, el modo  $(2, 2)$ , aunque las predicciones en este caso son algo peores. Para  $f_2$  se encuentran tres posibilidades:  $(5, 0)$ ,  $(3, 2)$  y  $(4, 2)$ , aunque los modos no radiales son candidatos solamente para  $\alpha \leq 1.0$ . Por último, para  $f_3$  no tenemos ningún modo, aunque el  $(5, 1)$  presenta unos valores en las fases compatibles con los observados. Sin embargo, esto no es suficiente, pues los correspondientes a las amplitudes quedan lejos de las barras de error, lo que descarta este modo en la identificación.

- **Modelos  $1j$**

En este caso las predicciones para  $f_1$  son diferentes según se tenga  $\alpha = 1.5$  o  $\alpha \leq 1.0$ . En el primer caso se puede identificar con  $\ell = 1$ , mientras que en el segundo con el modo radial  $n = 7$ . Conforme disminuye el valor de  $\alpha$  los resultados de las fases mejoran algo. Para  $f_2$  tenemos dos posibilidades para  $\alpha = 1.0$ : los modos  $(8, 0)$  y  $(6, 2)$ . Sin embargo, los resultados para  $\alpha = 0.5$  son bastante peores, ya que en este caso los valores de las fases varían lo suficiente como para no permitir la identificación. Por último, para  $f_3$  no se tiene ningún modo compatible con los índices de color observados, por lo que tampoco en este caso se puede realizar la identificación modal.

- **Modelos  $2j$**

En este grupo de modelos podemos asociar  $f_1$  con  $\ell = 1$  y  $2$ , para  $\alpha \leq 1.0$ . Para  $f_2$  tenemos dos posibilidades:  $\ell = 0$  y  $2$ , aunque esta última solamente para  $\alpha = 1.0$ . Por último, para  $f_3$  no aparece ningún candidato, ya que los resultados teóricos no concuerdan con los experimentales. Tanto para estos modelos como para los  $1j$  se obtienen mejores predicciones con  $\alpha = 0.5$  para

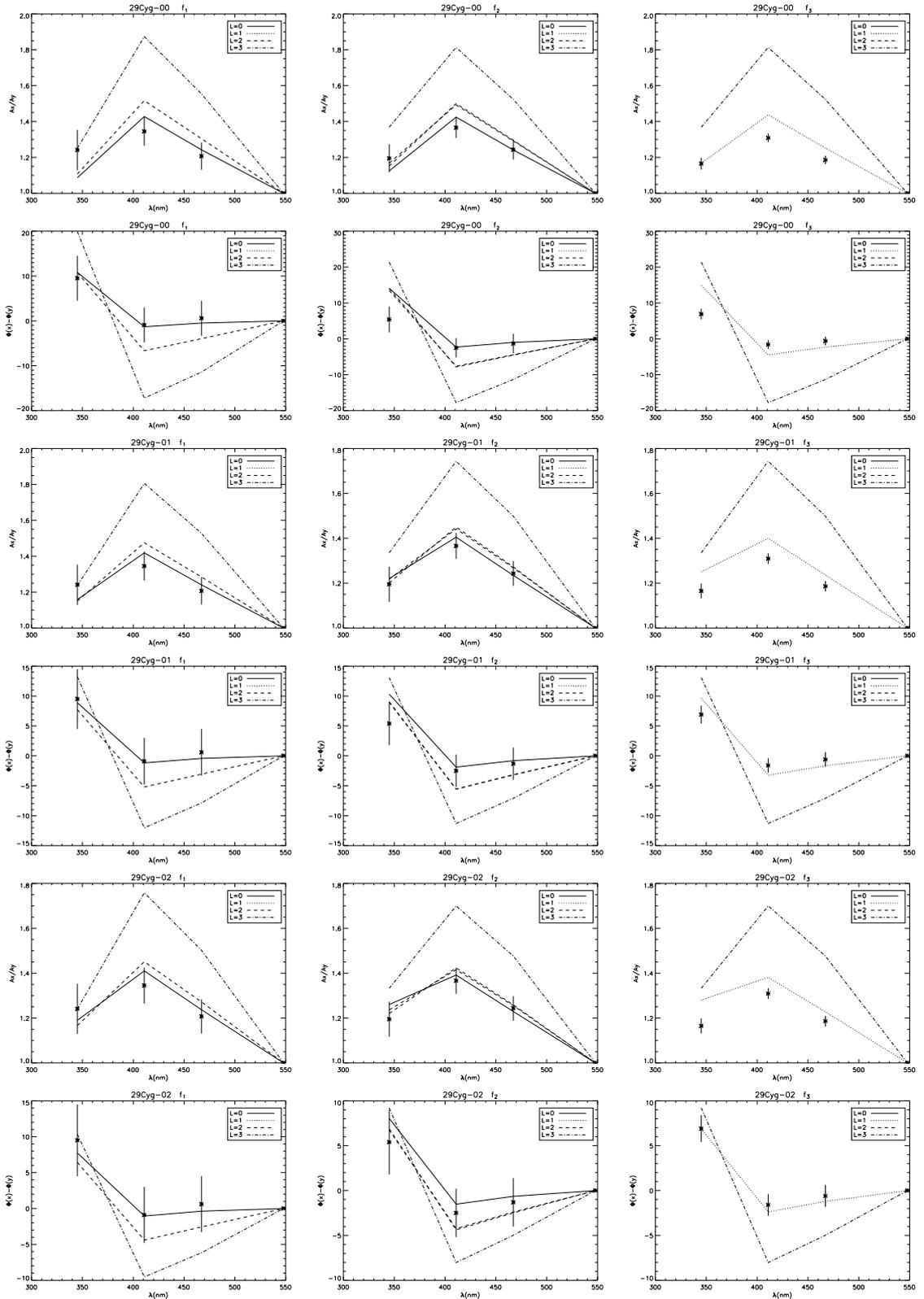


Figura 8.8: Cociente de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para las tres frecuencias. Grupo de modelos  $0j$ . *Izquierda*: Frecuencia  $f_1$ , *centro*: frecuencia  $f_2$ , *derecha*: frecuencia  $f_3$ . En orden descendente:  $\alpha = 1.5, 1.0, 0.5$ .

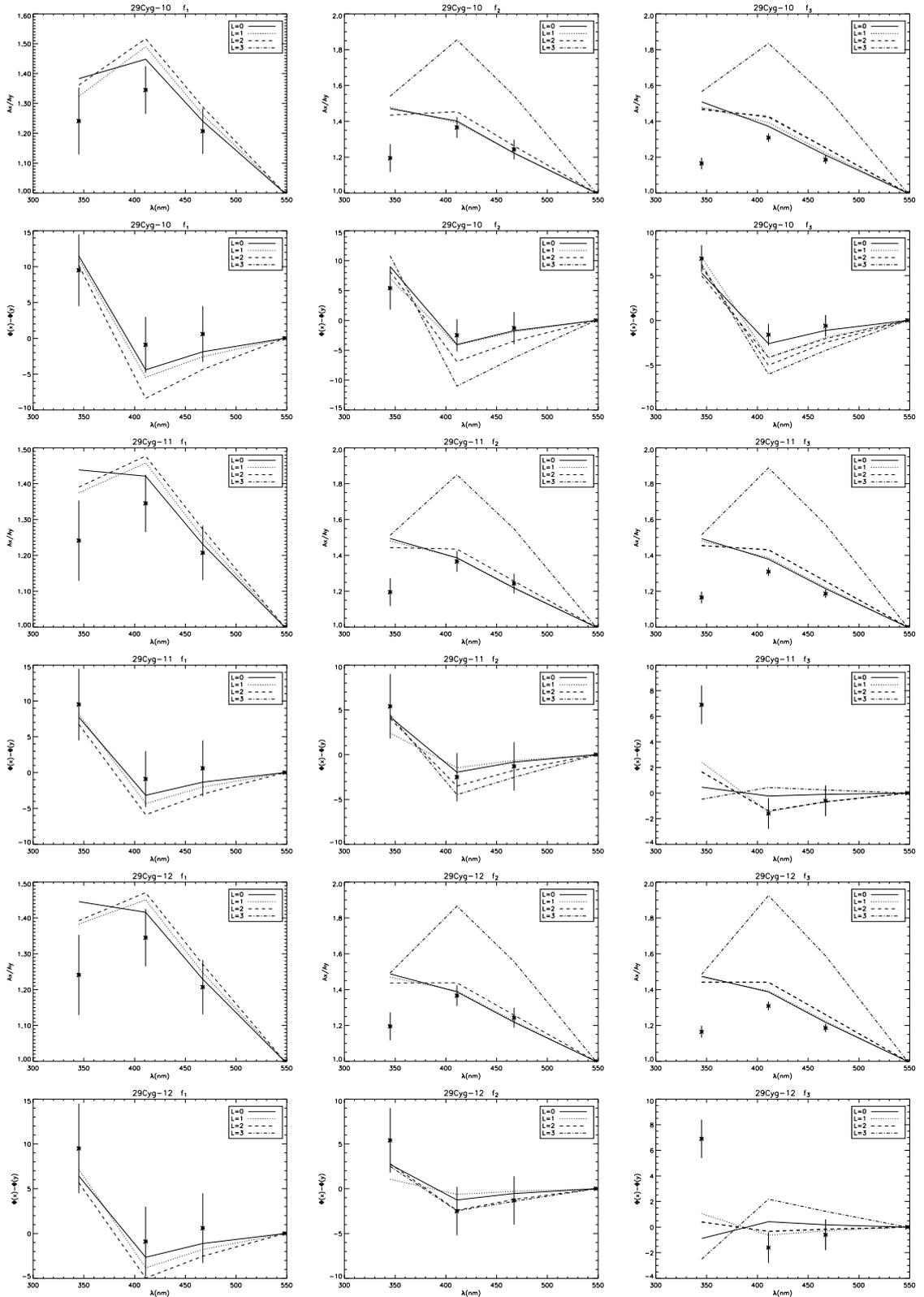


Figura 8.9: Cociente de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para las tres frecuencias. Grupo de modelos  $1j$ . *Izquierda*: Frecuencia  $f_1$ , *centro*: frecuencia  $f_2$ , *derecha*: frecuencia  $f_3$ . En orden descendente:  $\alpha = 1.5, 1.0, 0.5$ .

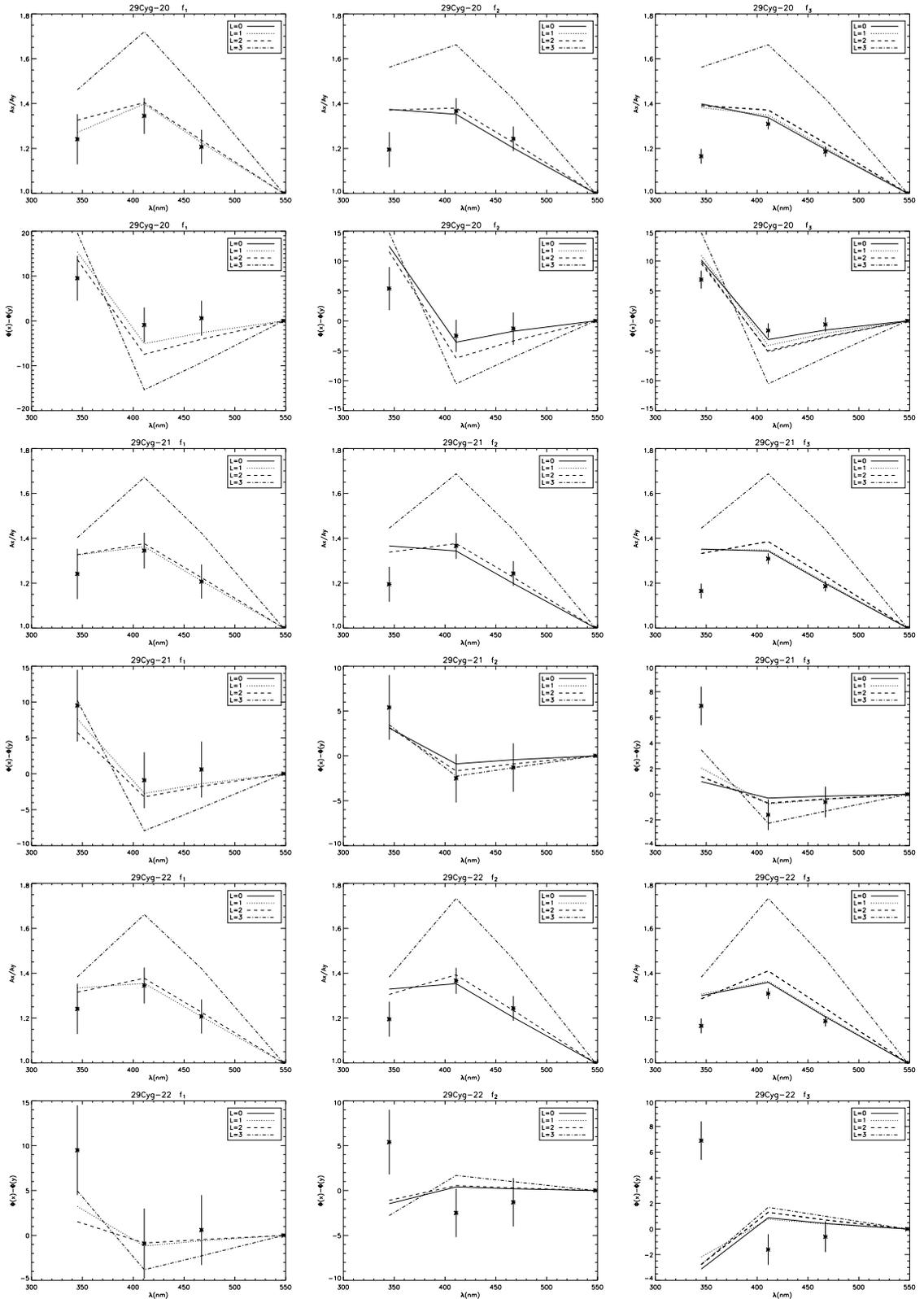


Figura 8.10: Cociente de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para las tres frecuencias. Grupo de modelos  $2j$ . Izquierda: Frecuencia  $f_1$ , centro: frecuencia  $f_2$ , derecha: frecuencia  $f_3$ . En orden descendente:  $\alpha = 1.5, 1.0, 0.5$ .

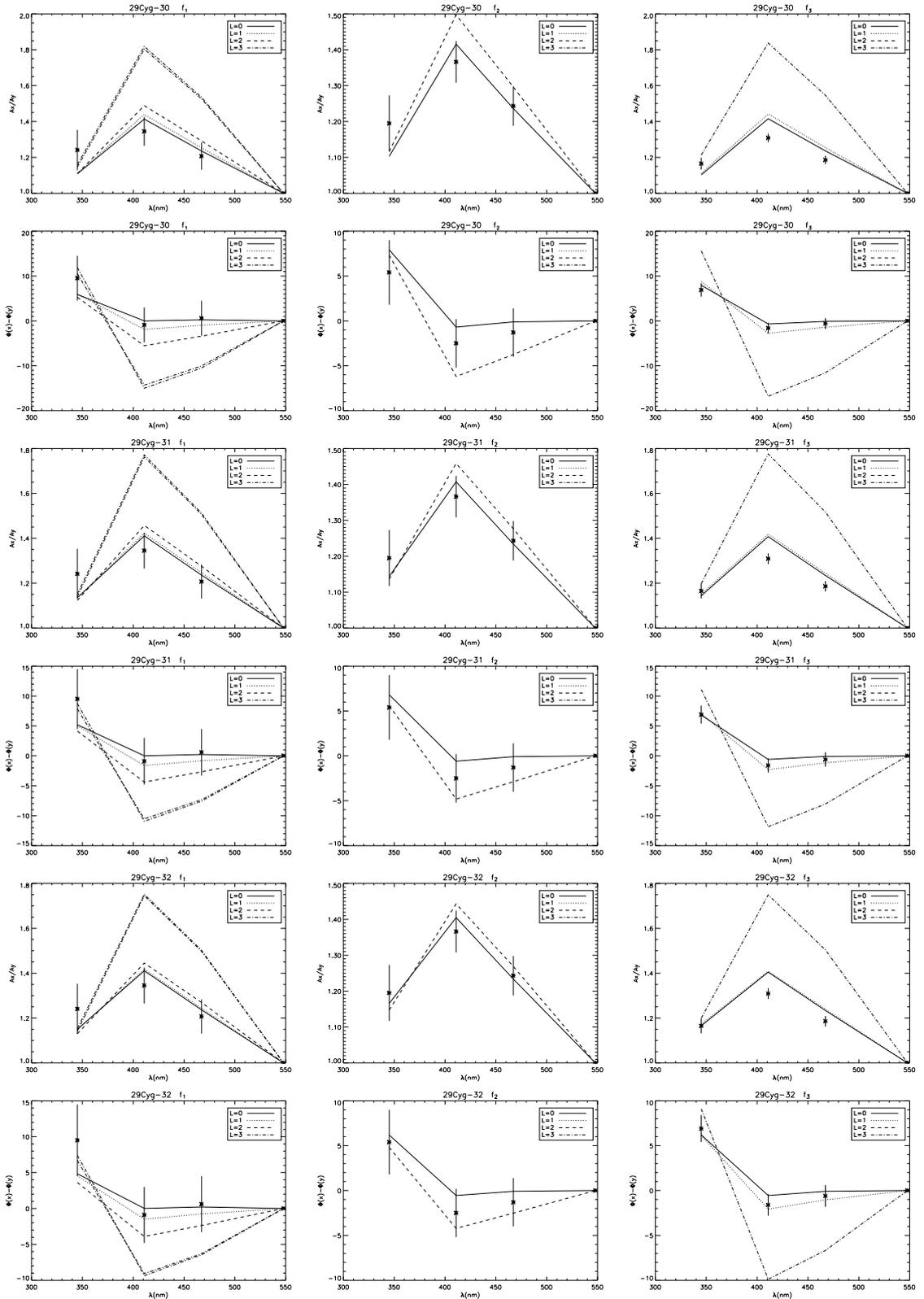


Figura 8.11: Cociente de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para las tres frecuencias. Grupo de modelos  $3j$ . *Izquierda*: Frecuencia  $f_1$ , *centro*: frecuencia  $f_2$ , *derecha*: frecuencia  $f_3$ . En orden descendente:  $\alpha = 1.5, 1.0, 0.5$ .

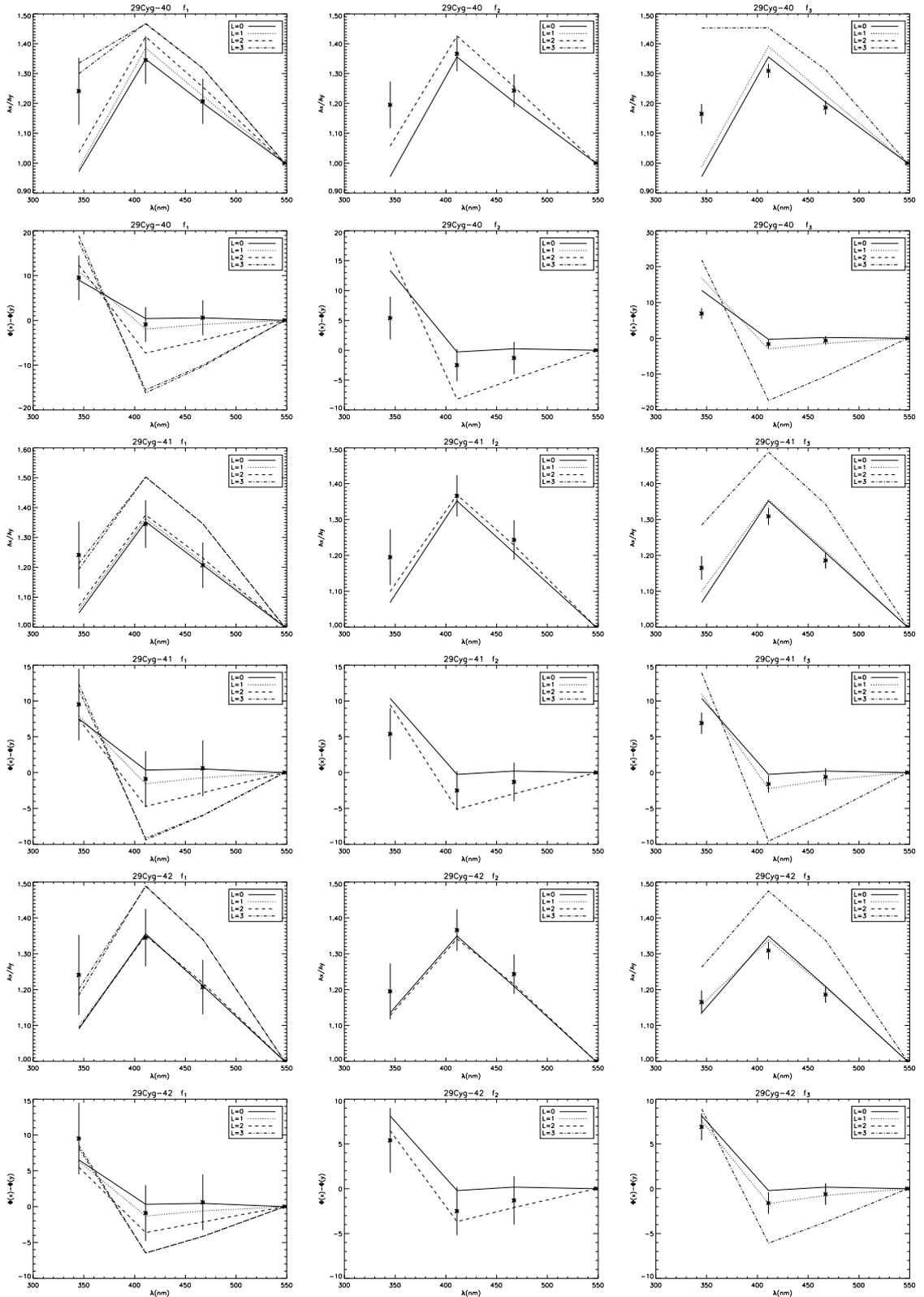


Figura 8.12: Cociente de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para las tres frecuencias. Grupo de modelos  $4j$ . *Izquierda*: Frecuencia  $f_1$ , *centro*: frecuencia  $f_2$ , *derecha*: frecuencia  $f_3$ . En orden descendente:  $\alpha = 1.5, 1.0, 0.5$ .

	$\alpha$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
00	1.5	(4,0)	(5,0)	-
01	1.0	(4,0) (2,2)	(5,0) (3,2) (4,2)	-
02	0.5	(4,0) (2,2)	(5,0) (3,2) (4,2)	-
10	1.5	(5,1)	(8,0) (8,1)	-
11	1.0	(7,0)	(8,0) (8,1)	-
12	0.5	(7,0)	(8,0) (8,1)	-
20	1.5	(5,1)	(9,0)	-
21	1.0	(5,1) (5,2)	(9,0) (6,2)	-
22	0.5	(5,1) (5,2)	-	-
30	1.5	(2,0)	(3,0) (2,2)	-
31	1.0	(2,0) (2,1) (1,2)	(3,0) (2,2)	-
32	0.5	(2,0) (2,1) (1,2)	(3,0) (2,2)	-
40	1.5	(2,0) (2,1)	(3,0)	-
41	1.0	(2,0) (2,1) (1,2)	(3,0) (2,2)	-
42	0.5	(2,0) (2,1) (1,2)	(3,0) (2,2)	(3,0) (3,1)

Tabla 8.3: Identificación de los modos para las tres frecuencias. Para la atmósfera se ha utilizado  $\alpha_{\text{atm}} = 1.25$ . Los pares  $(n, \ell)$  indican los valores del orden radial y del grado angular, en ese orden.

la frecuencia  $f_1$ , y con  $\alpha = 1.0$  para  $f_2$ , lo que no nos permite seleccionar un valor para este parámetro.

- **Modelos  $3j$  y  $4j$**

Para ambos grupos de modelos (los menos masivos) se tienen resultados similares:  $f_1$  es compatible con  $\ell = 0, 1$  y  $2$ , y  $f_2$  con  $\ell = 0$  y  $2$ . Además, parece que las predicciones mejoran conforme disminuye el valor de  $\alpha$ , aunque se pierde discriminación. Por otra parte,  $f_3$  sigue sin poder identificarse adecuadamente, siendo posible únicamente para el modelo **42** ( $\alpha = 0.5$ ), donde tenemos dos candidatos:  $\ell = 0$  y  $1$ .

Obsérvese que para los modelos más masivos ( $0j$ ,  $1j$  y  $2j$ ) se seleccionan modos con órdenes radiales elevados ( $n \geq 4$ ), mientras que para los menos masivos ( $3j$  y  $4j$ ) son posible modos algo más cercanos al fundamental ( $n = 1$  y  $2$ ). Para esta estrella no se obtiene una identificación modal tan buena como en la anterior, siendo más difícil también seleccionar un único valor de  $\alpha$  para todos los modelos y todas las frecuencias.

Vamos a comparar a continuación estos resultados con los obtenidos con  $\alpha_{\text{atm}} = 0.5$ . Analicemos en primer lugar el comportamiento de  $\delta x$  y  $\gamma_x$  (recordemos que estas variables están asociadas a las derivadas del flujo y a la integral sobre el “limb-darkening” de cada filtro). En la tabla 8.4 se muestran los resultados obtenidos para  $n = 4$ ,  $\ell = 0$ . Los valores de  $\gamma_v$  y  $\gamma_b$  apenas se modifican, ya que dependen fundamentalmente de aspectos geométricos. Las variaciones de  $\delta v$  y  $\delta b$  son más acusadas, ya que ambas variables aumentan conforme disminuye el valor de  $\alpha$  en el interior. Las diferencias entre los casos  $\alpha_{\text{atm}} = 1.25$  y  $\alpha_{\text{atm}} = 0.5$  son significativamente mayores que las que existían para **RV Ari**, ya que para aquella no llegaban al 1%, mientras

$\alpha$ interior	$\alpha$ atm.	$\delta v$	$\gamma_v$	$\delta b$	$\gamma_b$	$f_T$	$\Psi_T$
1.5	1.25	31.236	4.635	27.226	3.640	5.858	91.380
1.0	1.25	35.847	4.650	31.222	3.643	6.727	112.656
0.5	1.25	37.052	4.638	32.292	3.641	6.950	124.696
1.5	0.5	30.065	4.546	26.236	3.412	5.858	91.380
1.0	0.5	34.452	4.549	30.054	3.409	6.727	112.656
0.5	0.5	35.654	4.547	31.112	3.412	6.950	124.696

Tabla 8.4: Valores de las distintas variables que intervienen en la fórmula de Watson, en función del tratamiento de la convección y del valor de  $\alpha$  utilizado en el interior y en la atmósfera estelar. Modelos  $0j$ .

$\alpha$ interior	$\alpha$ atm.	$\phi_v - \phi_y$	$A_v/A_y$	$\phi_b - \phi_y$	$A_b/A_y$
1.5	1.25	-1.309	1.428	-0.478	1.242
1.0	1.25	-1.171	1.419	-0.422	1.240
0.5	1.25	-1.044	1.410	-0.377	1.237
1.5	0.5	-1.506	1.371	-0.311	1.193
1.0	0.5	-1.343	1.357	-0.275	1.190
0.5	0.5	-1.203	1.351	-0.246	1.189

Tabla 8.5: Diferencias de fase y cocientes de amplitudes para los filtros  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{b}$ . Modelos  $0j$ .

que para esta estrella son del orden del 4%. Esto podría estar relacionado con la mayor sensibilidad de las derivadas del flujo y del limb-darkening en este rango de temperaturas. Si analizamos ahora la dependencia de los índices de color para este modo (tabla 8.5), observamos que las diferencias de fase apenas se modifican, llegando las variaciones a ser, como máximo, de un 8%. Estas son difíciles de detectar observacionalmente en la actualidad. Las diferencias encontradas en las amplitudes llegan a ser del orden de un 4%. En este caso, como ya hemos comentado, sí existe precisión observacional suficiente como para ser observadas. Por tanto, concluimos de nuevo que los valores de los observables no adiabáticos (en los rangos de error en los que nos movemos para esta estrella) influyen poco sobre los índices de color, aunque la sensibilidad de la fórmula de Watson en este caso es mayor.

En la Fig. 8.13 se muestran los resultados obtenidos para el modelo central y  $\alpha_{\text{atm}} = 0.5$ . Puede observarse que las predicciones mejoran sustancialmente para todos los valores de  $\alpha$  del interior estelar, sobre todo para los cocientes de amplitudes. En este caso puede asociarse sin dificultad  $f_1$  con los modos  $(4, 0)$  y  $(2, 2)$ ,  $f_2$  con  $(5, 0)$ ,  $(3, 2)$  y  $(4, 2)$ , y por primera vez puede identificarse  $f_3$  con  $\ell = 1$ , concretamente, con el modo  $(5, 1)$ . Los resultados también parecen seleccionar un valor pequeño de  $\alpha$  en el interior del modelo ( $\alpha = 0.5$ ). Finalizamos esta sección resaltando la importancia del estudio de las conclusiones que se obtienen con distintos valores de  $\alpha_{\text{atm}}$ , ya que la predicciones y la identificación modal pueden variar sustancialmente.

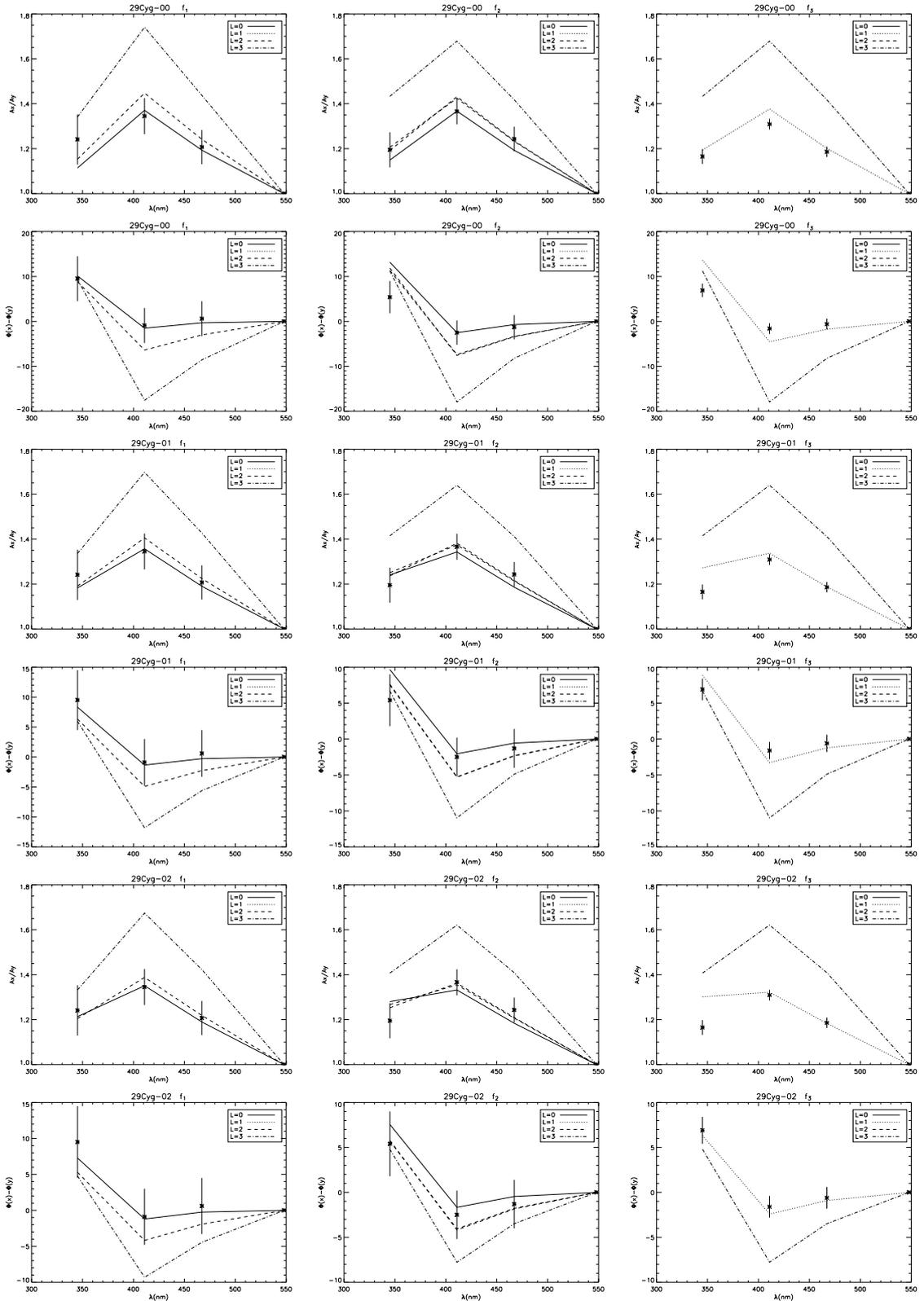


Figura 8.13: Cociente de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para las tres frecuencias, usando MLT y  $\alpha_{\text{atm}} = 0.5$ . Modelos  $0j$ . *Izquierda*: Frecuencia  $f_1$ , *centro*: frecuencia  $f_2$ , *derecha*: frecuencia  $f_3$ . En orden descendente:  $\alpha = 1.5, 1.0, 0.5$ .

### 8.3.2. Evolución de los índices de color

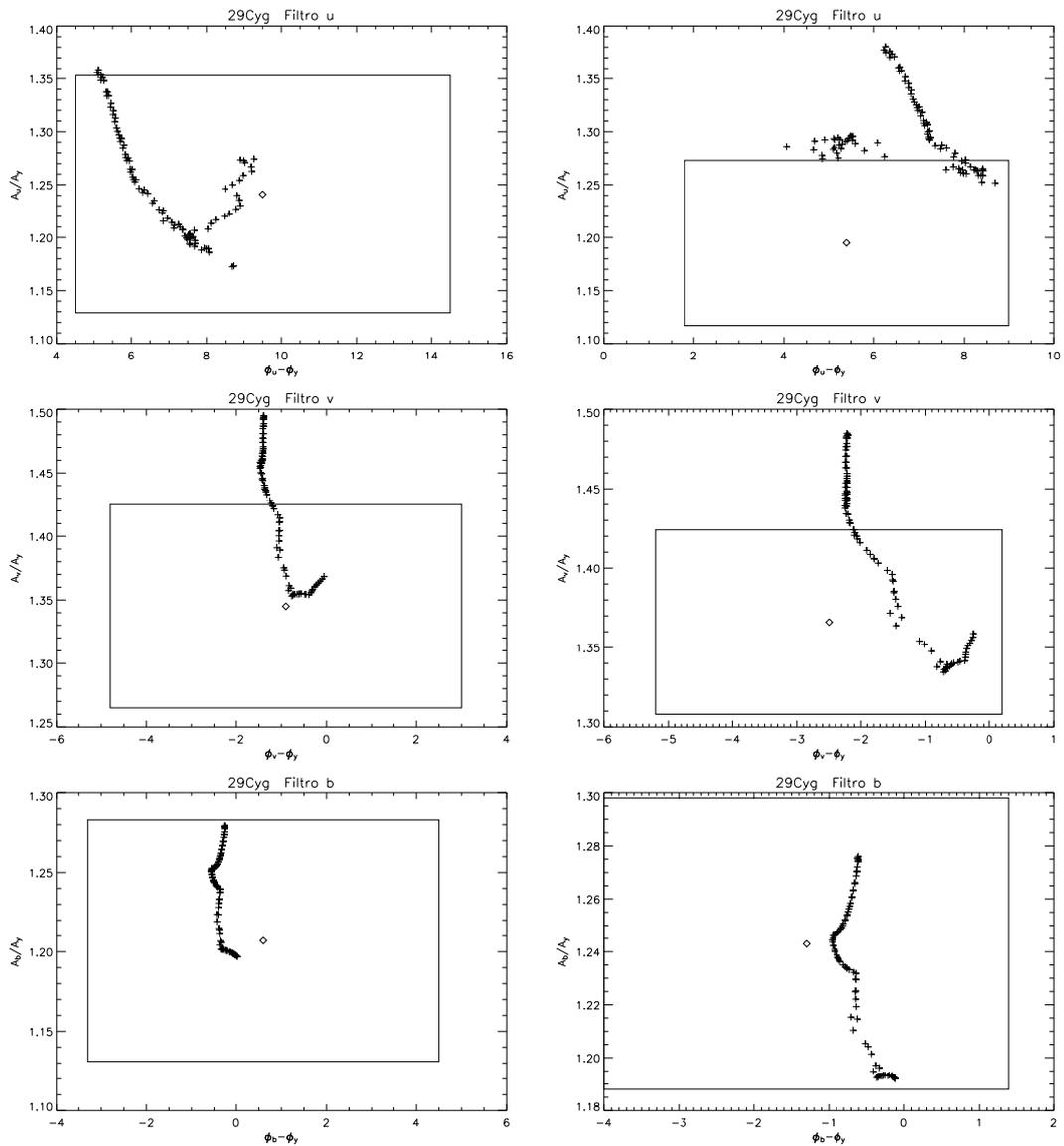


Figura 8.14: Diagramas fase-amplitud para el modo fundamental radial a lo largo de la evolución del modelo central. A la izquierda se muestran los resultados obtenidos para la frecuencia  $f_1$ , y a la derecha, para  $f_2$ . El rectángulo muestra la caja de error observacional.

Se han calculado los índices de color a lo largo de la evolución del modelo central de la estrella **29 Cyg**, con  $\alpha = 0.5$ , para las frecuencias  $f_1$  y  $f_2$ . Hemos obtenido los resultados para los filtros **u**, **v** y **b**, usando solamente **MLT**. Nos hemos centrado en los modos que parecen ajustarse mejor a las observaciones, tal y como se estudió en la Sec. 8.3.1:  $n = 4$ ,  $\ell = 0$  para  $f_1$ , y  $n = 5$ ,  $\ell = 0$  para  $f_2$ . Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 8.14.

Nótese en primer lugar que durante la mayor parte de la evolución de la estrella el modelo presenta unos índices de color situados dentro de la caja de error observacional, sobre todo para edades tempranas, cuando la temperatura efectiva es lo suficientemente elevada como para que no sea relevante la interacción de la pulsación

con la convección. Esto es justo lo contrario de lo que ocurría con **RV Ari**, que era más fría y para la que se obtenían, en general, peores resultados. Podemos acotar la edad de la estrella seleccionando aquellos modelos para los que los índices de color estén dentro de las cajas de error para los tres filtros, junto con la restricción de que la frecuencia del primer modo se diferencie de  $f_1$  en un 5% como máximo. Los resultados son los siguientes:

$\log T_{ef_{min}} = 3.895$
$\log T_{ef_{max}} = 3.905$
$\text{Edad}_{min} = 1250 \text{ Myr}$
$\text{Edad}_{max} = 1370 \text{ Myr}$

Con respecto a la segunda frecuencia, tenemos resultados algo peores en el filtro **u**, pero aún así, también en este caso podemos acotar tanto la temperatura efectiva como la edad:

$\log T_{ef_{min}} = 3.896$
$\log T_{ef_{max}} = 3.906$
$\text{Edad}_{min} = 1240 \text{ Myr}$
$\text{Edad}_{max} = 1360 \text{ Myr}$

Los resultados que se obtienen con las dos frecuencias son compatibles entre sí y con las observaciones, permitiéndonos acotar algo la caja de error en el diagrama HR. Además, la concordancia entre los índices de color y los resultados observacionales es mayor en este caso que en el anterior, debido fundamentalmente a la mayor temperatura efectiva que posee esta estrella.

### 8.3.3. Conclusiones

En esta sección se ha llevado a cabo una identificación de los modos observados a partir de la comparación de las predicciones teóricas con los resultados obtenidos de la fotometría Strömgren. No obstante, para poder llevar a cabo dicha identificación ha sido necesario utilizar  $\alpha_{atm} = 0.5$ , ya que solamente así pueden asignarse claramente  $f_1$  y  $f_2$  con modos radiales (con  $n = 4$  y  $n = 5$  respectivamente), y  $f_3$  con el modo  $n = 5, \ell = 1$ . Además, los mejores resultados se obtienen con  $\alpha = 0.5$  en el interior estelar, aunque, como ocurría con la estrella anterior, de esta forma se pierde algo de discriminación en la identificación de los modos.

Por otro lado, los modelos de las esquinas de la caja fotométrica proporcionan una identificación posible que habría que tener en cuenta, aunque en este trabajo no nos hemos extendido en este punto, ya que un estudio exhaustivo sería muy costoso, y no añadiría nueva información relevante para el objetivo del mismo.

## 8.4. Oscilaciones adiabáticas con rotación

### 8.4.1. Modelos

Se trata de una estrella con  $v \sin i$  moderadamente alto, cercano al límite de validez de la teoría perturbativa a segundo orden. Así pues, nos ceñiremos al valor  $v = 80 \text{ km/s}$ , y retomaremos la influencia del ángulo “ $i$ ” cuando abordemos la

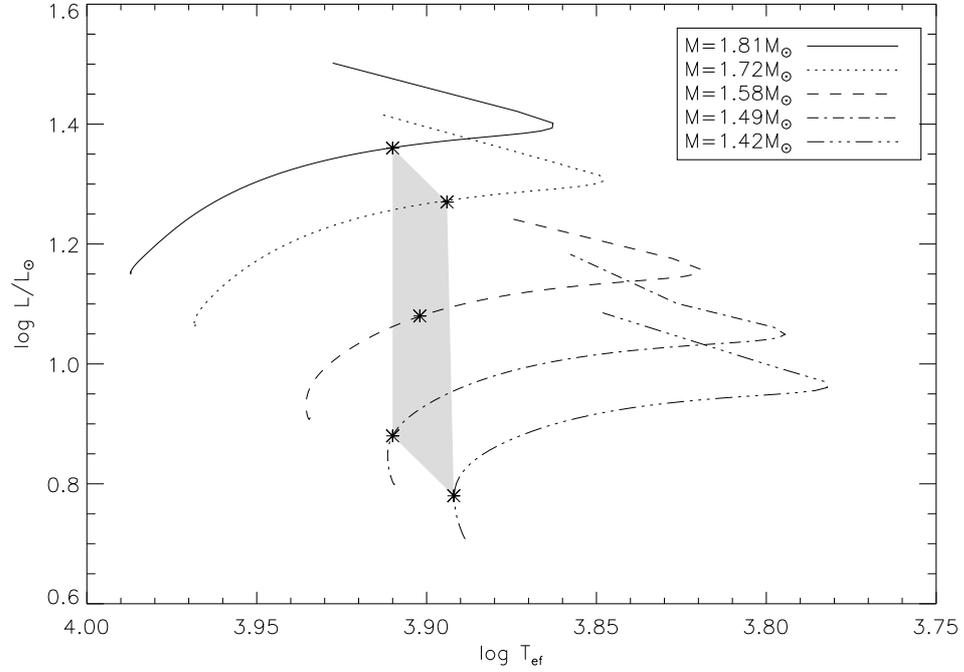


Figura 8.15: Diagrama HR de los modelos obtenidos con rotación,  $v = 80$  km/s, con los caminos evolutivos correspondientes. La zona sombreada representa la caja fotométrica estándar. Para la convección se ha utilizado  $\alpha = 0.5$ .

fotometría multicolor. Por otra parte, dado que ya hemos visto que los mejores resultados son los que se obtienen con  $\alpha = 0.5$ , hemos usado este valor, y para la convección, la **MLT**. En la tabla 8.6 se muestran los datos de los modelos calculados.

### 8.4.2. Acoplamientos por rotación

A continuación mostramos los estudios realizados sobre el acoplamiento de los modos para todos los modelos calculados. Al igual que ocurría con **RV Ari**, las diferencias de frecuencias  $|\sigma - \sigma'|$ , mostradas en la Fig. 8.17, dan cuenta de cómo se ven afectadas las pulsaciones debido a la degeneración accidental. Se obtiene de nuevo

	$M/M_{\odot}$	$\log T_{ef}$	$\log g$	$\log L/L_{\odot}$	$X_C$	Edad	$f_0$	$\nu_{\Omega}$
0	1.58	3.902	4.12	1.08	0.366	1250	184.3	10.2
1	1.81	3.910	3.92	1.36	0.213	1032	127.7	7.6
2	1.72	3.894	3.93	1.27	0.210	1197	130.1	7.8
3	1.49	3.910	4.32	0.88	0.595	730	266.3	13.1
4	1.42	3.892	4.33	0.78	0.622	705	274.3	13.6

Tabla 8.6: Propiedades de los modelos obtenidos con rotación, ( $\Omega = 80$  km/s). La temperatura efectiva está dada en grados K, la gravedad superficial  $g$  en el sistema cgs, y la edad en millones de años.  $X_C$  representa la fracción de Hidrógeno en el centro.  $f_0$  es la frecuencia del modo fundamental radial y  $\nu_{\Omega}$  la frecuencia de rotación del modelo, ambas expresadas en  $\mu\text{Hz}$ .

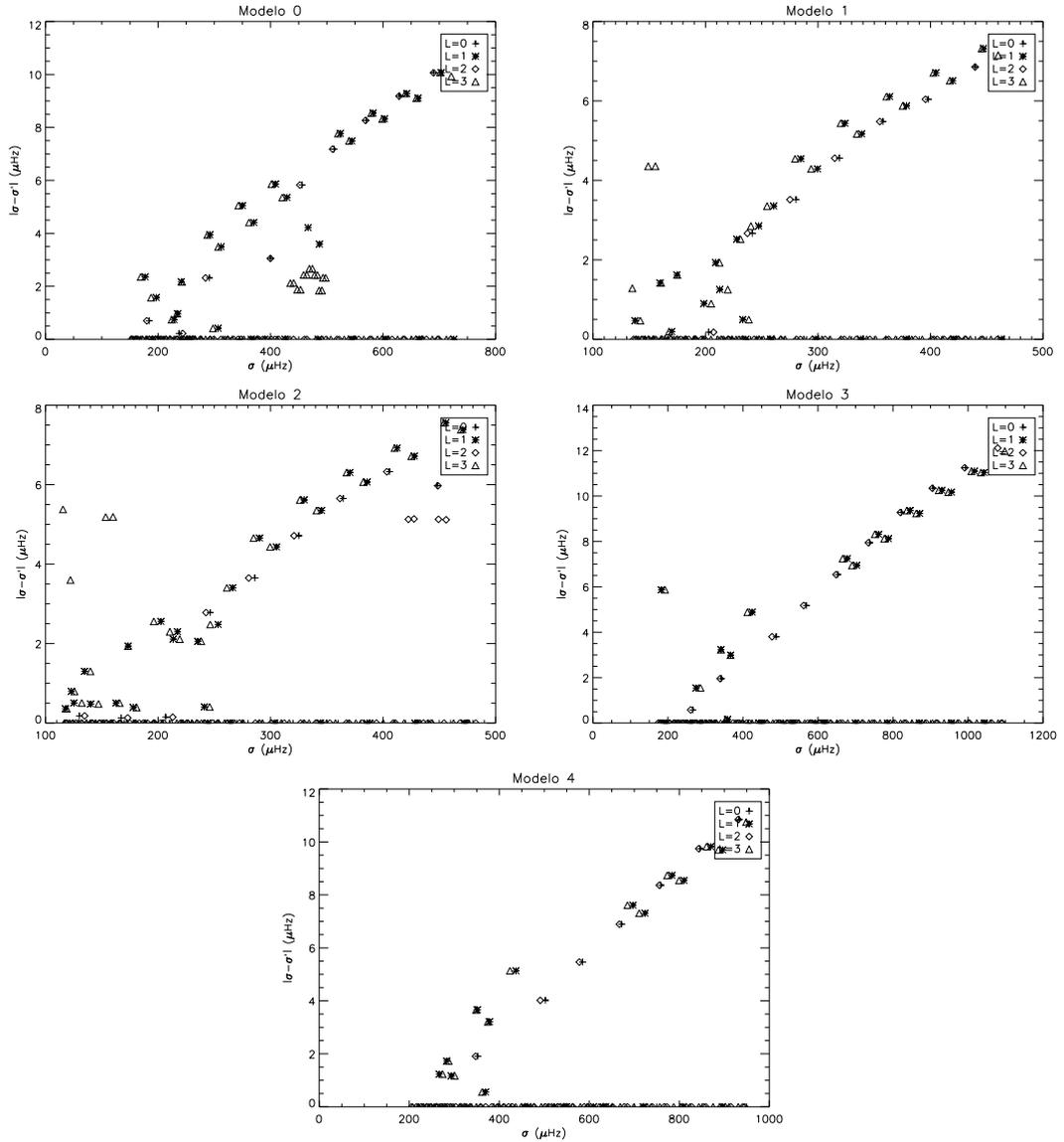


Figura 8.16: Diferencia de frecuencias  $|\sigma - \sigma'|$  para los cinco modelos de la caja fotométrica frente a  $\sigma$  (la frecuencia de los modos calculada sin acoplamiento), para distintos valores de  $\ell$ .  $\sigma'$  es la frecuencia que se obtiene para cada modo cuando se incluye la degeneración accidental.

el incremento de estas diferencias con el orden radial de los modos. Sin embargo, en este caso, al ser la velocidad de rotación mayor, se aprecia mejor la tendencia lineal de  $|\sigma - \sigma'|$  con la frecuencia. Por tanto, tenemos dos comportamientos: para órdenes bajos aparece una nube de puntos de la que en principio no puede derivarse ninguna tendencia clara, mientras que para los altos aparece una dependencia más o menos lineal con la frecuencia. Esto es debido a la especial sensibilidad de los modos mixtos (zona de baja frecuencia) con la rotación.

El grado de mezcla de los armónicos esféricos se ha estudiado mediante los ya conocidos coeficientes de contaminación para cada pareja de modos degenerados, tal y como se muestran en la Fig. 8.17. Para cada modelo aparecen dos gráficas, una correspondiente al acoplamiento entre modos con  $\ell$  par (izquierda), y otra asociada

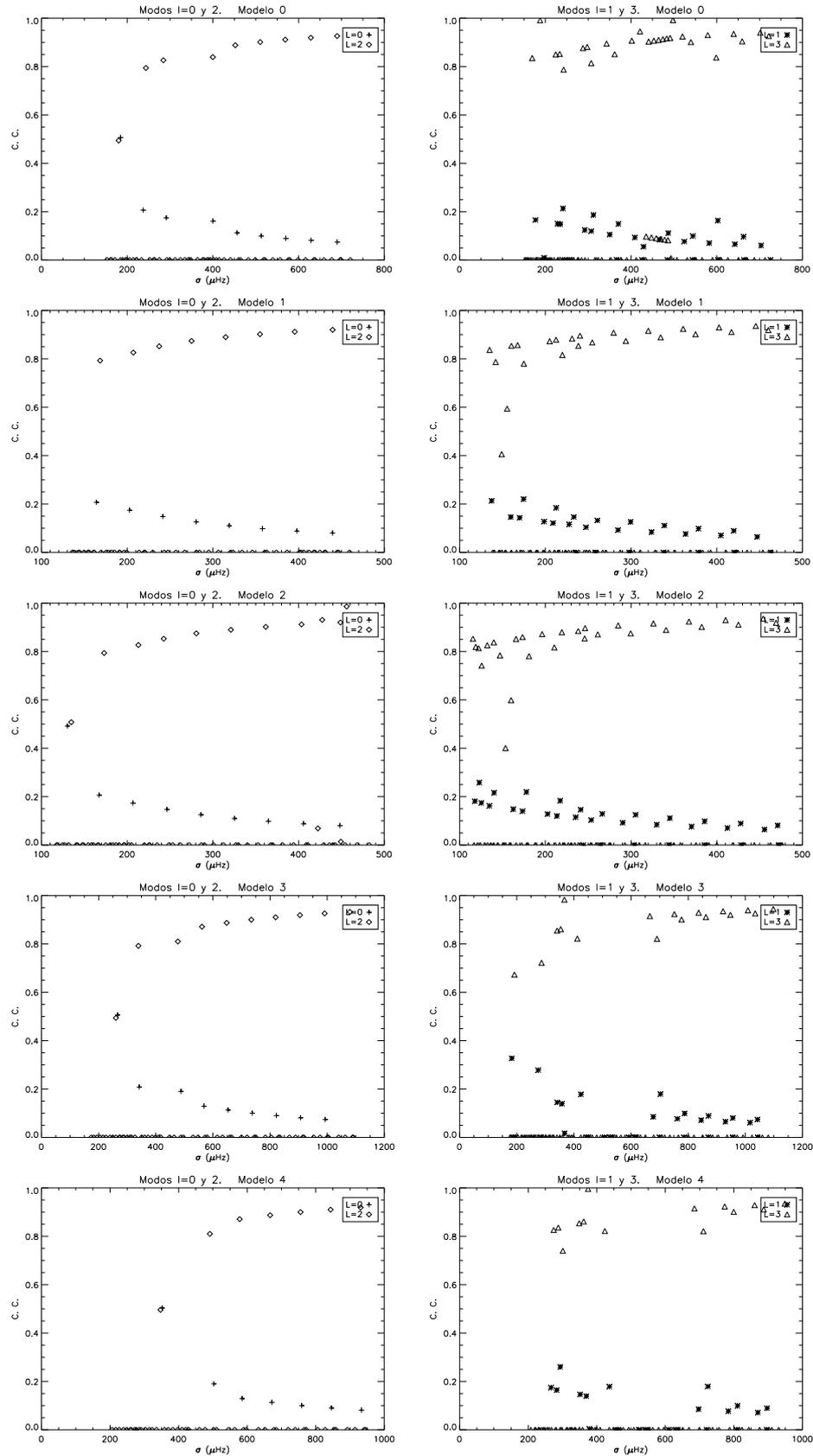


Figura 8.17: Coeficientes de contaminación para los cinco modelos de la caja fotométrica frente a la frecuencia de los modos. *Izquierda*: valores obtenidos para las parejas  $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . *Derecha*: valores correspondientes a las parejas con  $(\ell, \ell') = (1, 3)$ .

Modelo	$n, \ell, m$	$\sigma$ ( $\mu\text{Hz}$ )	Acoplado con:	$ \sigma - \sigma' $ ( $\mu\text{Hz}$ )	$\beta$
<b>0</b>	5, 0, 0	399.88	4, 2, 0	3.05	0.16
<b>0</b>	6, 0, 0	456.10	5, 2, 0	5.83	0.11
<b>0</b>	3, 1, -1	370.39	2, 3, -1	4.41	0.15
<b>0</b>	3, 1, 1	350.15	2, 3, 1	5.05	0.10
<b>0</b>	5, 1, -1	429.07	3, 3, -1	5.36	0.06
<b>0</b>	5, 1, 1	408.85	3, 3, 1	5.86	0.09
<b>0</b>	4, 2, 0	399.86	5, 0, 0	3.05	0.84
<b>0</b>	5, 2, 0	452.22	6, 0, 0	5.83	0.89
<b>0</b>	2, 3, -1	361.86	3, 1, -1	4.41	0.85
<b>0</b>	2, 3, 1	342.90	3, 1, 1	5.05	0.90
<b>0</b>	3, 3, -1	421.01	5, 1, -1	5.36	0.94
<b>0</b>	3, 3, 1	401.80	5, 1, 1	5.86	0.91

Tabla 8.7: Parejas de modos acoplados con frecuencias cercanas (en torno a un 5%) a las observadas,  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$ , para el modelo central.  $\beta$  denota los coeficientes de contaminación de los modos.

a  $\ell$  impar (derecha). En este último caso aparecen algunos puntos que representan acoplamientos entre modos con el mismo valor de  $\ell$ .

En la tabla 8.7 se muestran los modos degenerados con frecuencias próximas a alguna de las observadas. El número de modos que presentan acoplamiento es elevado, debido a la velocidad de rotación considerada en este caso, por lo que se muestran solamente los correspondientes al modelo central.

Podemos calcular ahora los valores de  $|\sigma - \sigma'|$  y de los coeficientes de contaminación para todo el espectro de frecuencias. En la Fig. 8.18 puede apreciarse cómo la diferencia de frecuencias aumenta de forma definida con el orden del modo. También puede observarse algo que ya nos apareció en la Fig. 7.28 de la estrella **RV Ari** (Sec. 8.4.2): las diferencias de las parejas  $(\ell, \ell') = (0, 2)$  y  $(\ell, \ell') = (1, 3)$  coinciden hasta una cierta frecuencia, a partir de la cual adquieren comportamientos distintos, quedando las de éstos últimos por debajo de las otras. Esto se repite para todos los modelos, aunque para los dos últimos no se observa debido a que esta separación tiene lugar a frecuencias más altas aún que las que se han representado.

Con respecto a los coeficientes de contaminación (Fig. 8.19), volvemos a encontrar un resultado conocido: los correspondientes a los modos con  $\ell = 2$  ó  $\ell = 3$  son mayores que los asociados a  $\ell = 0$  ó  $\ell = 1$ , tomando valores cercanos a la unidad (en torno a 0.9) en el primero de los casos. Esto puede deberse a que estamos analizando modos con órdenes bastante elevados y, como ya sabemos, conforme aumenta el orden de los modos, los valores para  $\ell = 2$  y  $\ell = 3$  tienden a 1, mientras que para  $\ell = 0$  y  $\ell = 1$  lo hacen a 0. Por tanto, para altas frecuencias encontramos de nuevo un aumento de los efectos de la degeneración accidental tanto sobre las frecuencias como sobre las autofunciones de los modos. Las distintas ramas que se observan corresponden a diferentes valores de  $m$ .

En la Fig. 8.17 se pueden identificar claramente algunas parejas con el mismo valor de  $\ell$ . En la tabla 8.8 se muestran las propiedades de estos modos. Vemos que los coeficientes de acoplamiento son muy pequeños, hasta el punto de que para  $m = -3$ , éste prácticamente se anula. Por último mencionaremos la presencia de nuevo de una

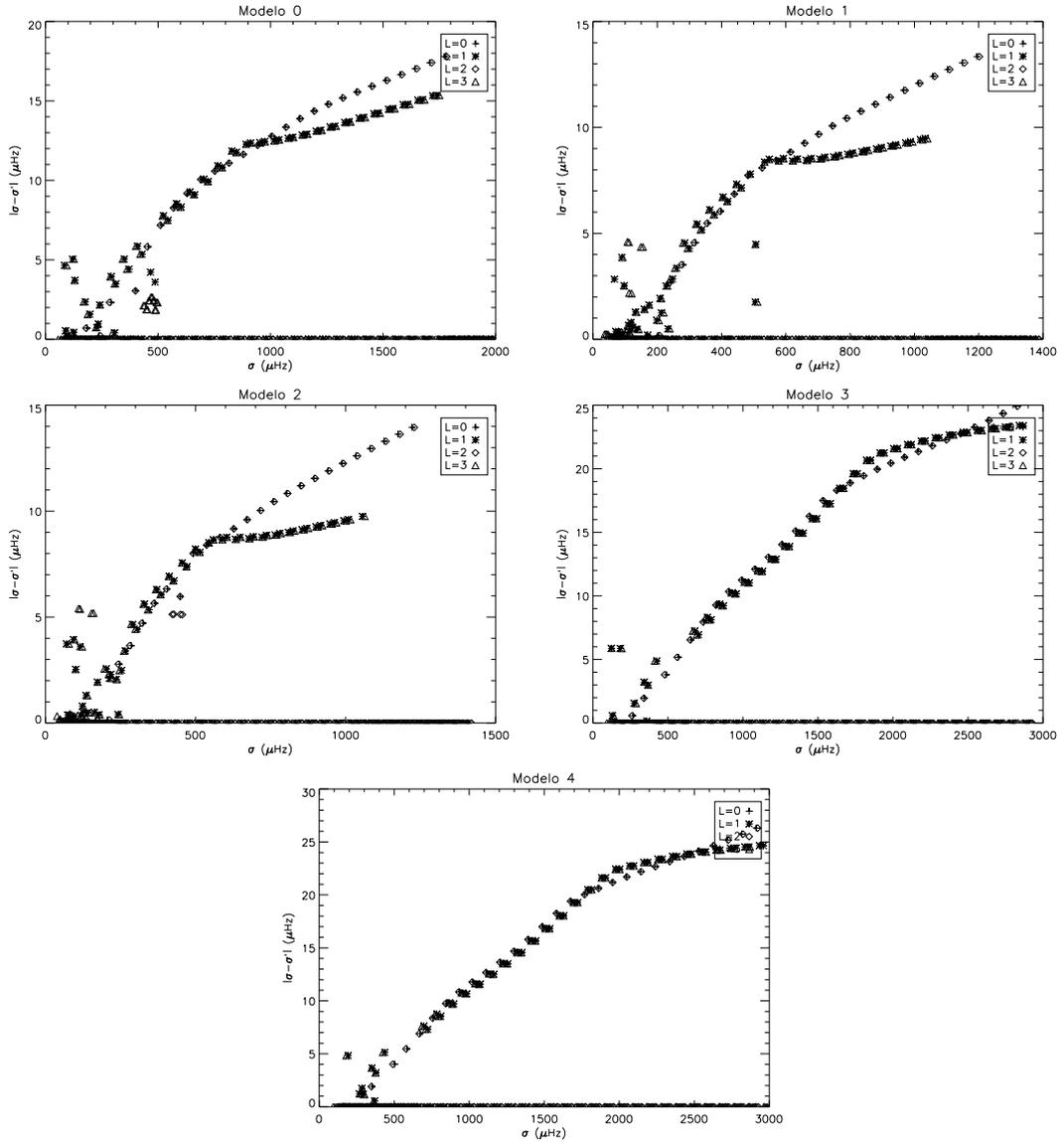


Figura 8.18: Diferencia de frecuencias  $|\sigma - \sigma'|$  para los cinco modelos de la caja fotométrica frente a  $\sigma$  (la frecuencia de los modos calculada sin acoplamiento), para distintos valores de  $\ell$ . Se muestra todo el espectro de pulsación.

pareja de modos  $(\ell, \ell') = (0, 2)$  con coeficientes de contaminación en torno a 0.5, y con órdenes radiales entre -3 y 2, aproximadamente. Se tratan de nuevo de modos mixtos con frecuencias muy próximas entre sí, como puede apreciarse en la tabla 8.9.

Observamos, pues, los mismos tipos de comportamiento que ya conocíamos del estudio de la estrella **RV Ari**, incluso cuando observamos todo el espectro (Fig. 8.19), pesar de la mayor velocidad de rotación considerada en este caso.

### 8.4.3. Fotometría multicolor

A continuación estudiamos la influencia de la degeneración accidental sobre la identificación modal realizada en la Sec. 8.3.1. Siguiendo el método desarrollado en la Sec. 7.5.3, analizamos la variación de los índices de color con el ángulo  $i$  de

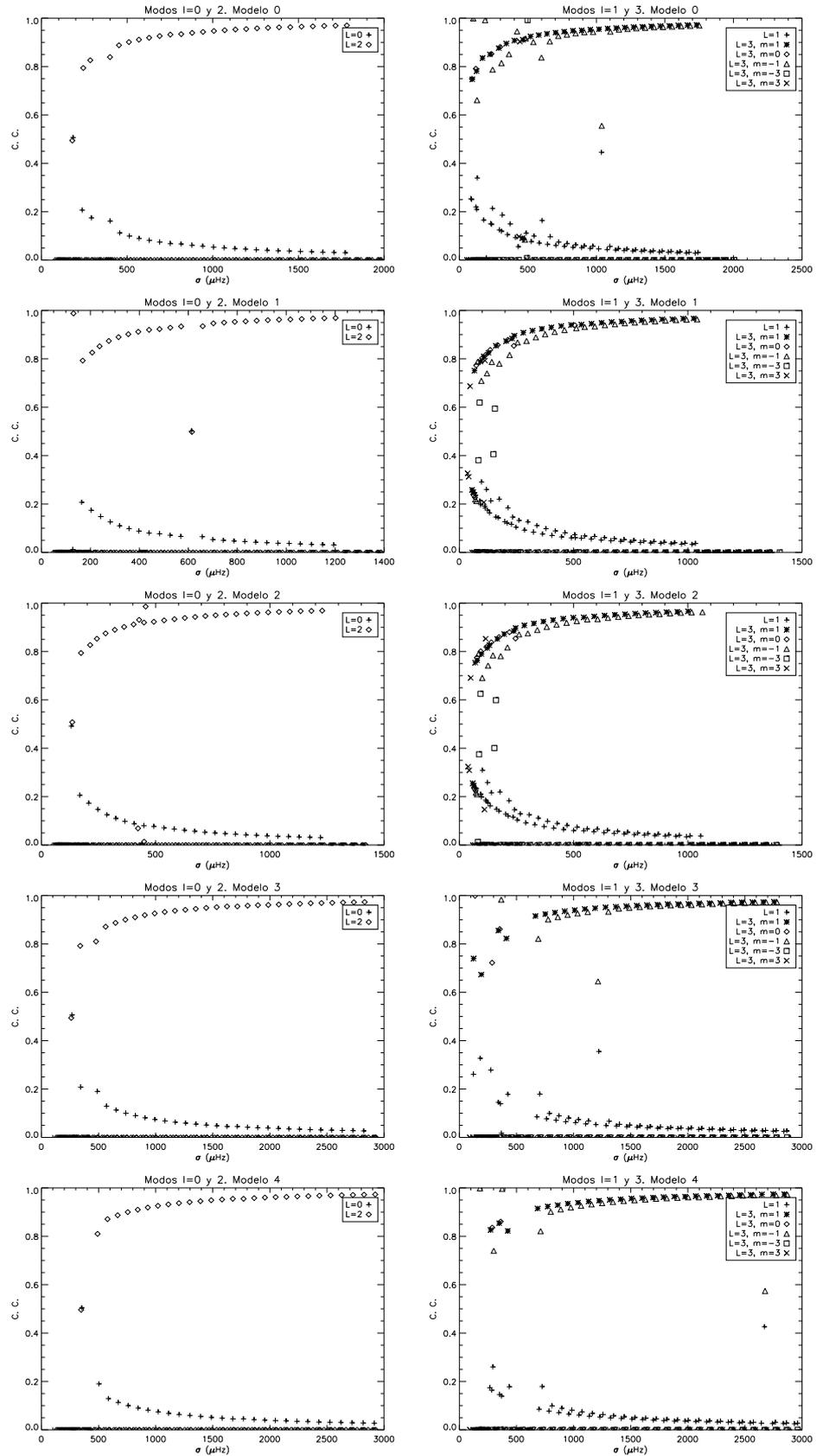


Figura 8.19: Coeficientes de contaminación para los cinco modelos de la caja fotométrica frente a la frecuencia de los modos. Se muestra todo el espectro de pulsación. *Izquierda*: valores obtenidos para las parejas  $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . *Derecha*: valores correspondientes a las parejas con  $(\ell, \ell') = (1, 3)$ .

$n, \ell, m$	$\sigma$ ( $\mu\text{Hz}$ )	Acoplado con:	$ \sigma - \sigma' $ ( $\mu\text{Hz}$ )	$\beta$
4, 3, -3	493.21	5, 3, -3	2.32	0.01
4, 3, -2	486.23	5, 3, -2	1.84	.08
4, 3, -1	478.19	5, 3, -1	2.42	.08
4, 3, 0	467.09	5, 3, 0	2.67	.09
4, 3, 1	458.89	5, 3, 1	2.43	.09
4, 3, 2	447.63	5, 3, 2	1.88	.09
4, 3, 3	435.31	5, 3, 3	2.12	.10

Tabla 8.8: Propiedades de los acoplamientos entre parejas de modos con el mismo valor de  $\ell$  para el modelo central.

Modelo	$n, \ell, m$	$n', \ell', m'$	$\beta_1$	$\beta_2$
<b>0</b>	1, 0, 0	-2, 2, 0	0.51	0.49
<b>2</b>	1, 0, 0	-3, 2, 0	0.49	0.51
<b>3</b>	1, 0, 0	-1, 2, 0	0.51	0.49
<b>4</b>	2, 0, 0	1, 2, 0	0.50	0.50

Tabla 8.9: Propiedades de los acoplamientos entre modos mixtos con  $(\ell, \ell') = (0, 2)$  para el modelo central.

inclinación de la estrella. Para ello variamos éste entre  $-180^\circ$  y  $+180^\circ$  mediante pasos en  $\cos i$  de 0.02.

Empezamos con los modos acoplados mostrados en la tabla 8.7. Vemos de nuevo que nos encontramos con dos tipos de curvas, unas “*abiertas*”, aquellas que no llegan a describir una vuelta completa, y otras “*cerradas*”, que describen como mínimo una vuelta, según el valor de  $m$ . El primer tipo de figura se corresponde con los modos

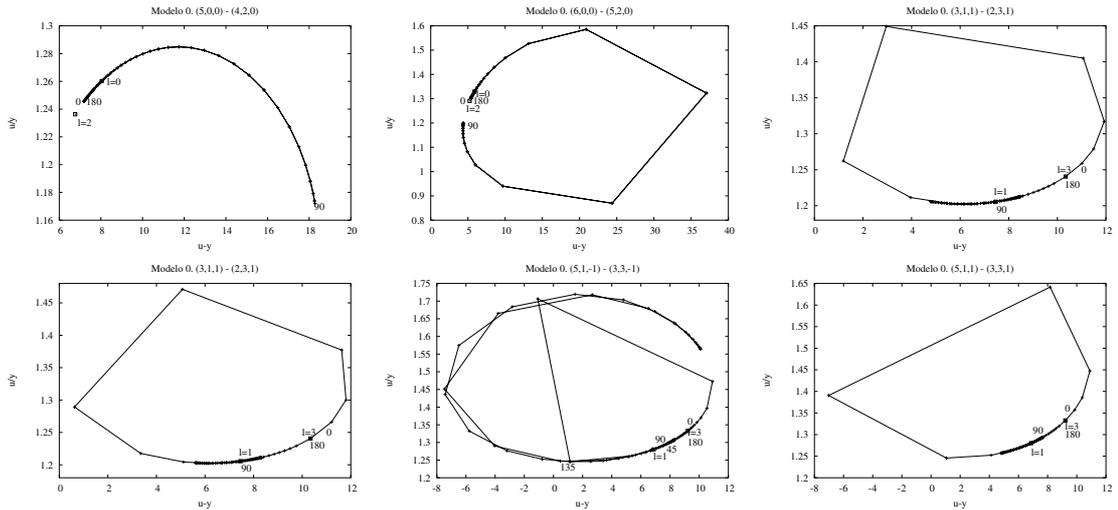


Figura 8.20: Diagramas fase-amplitud para el filtro  $\mathbf{u}$  de las parejas que se muestran en la tabla 8.7. Los valores que se obtienen cuando no se tiene en cuenta la rotación se muestran mediante cuadrados, etiquetados según su valor de  $\ell$ .  $u - y$  y  $u/y$  representan, respectivamente, las diferencias  $\phi_u - \phi_y$  y los cocientes  $A_u/A_y$ .

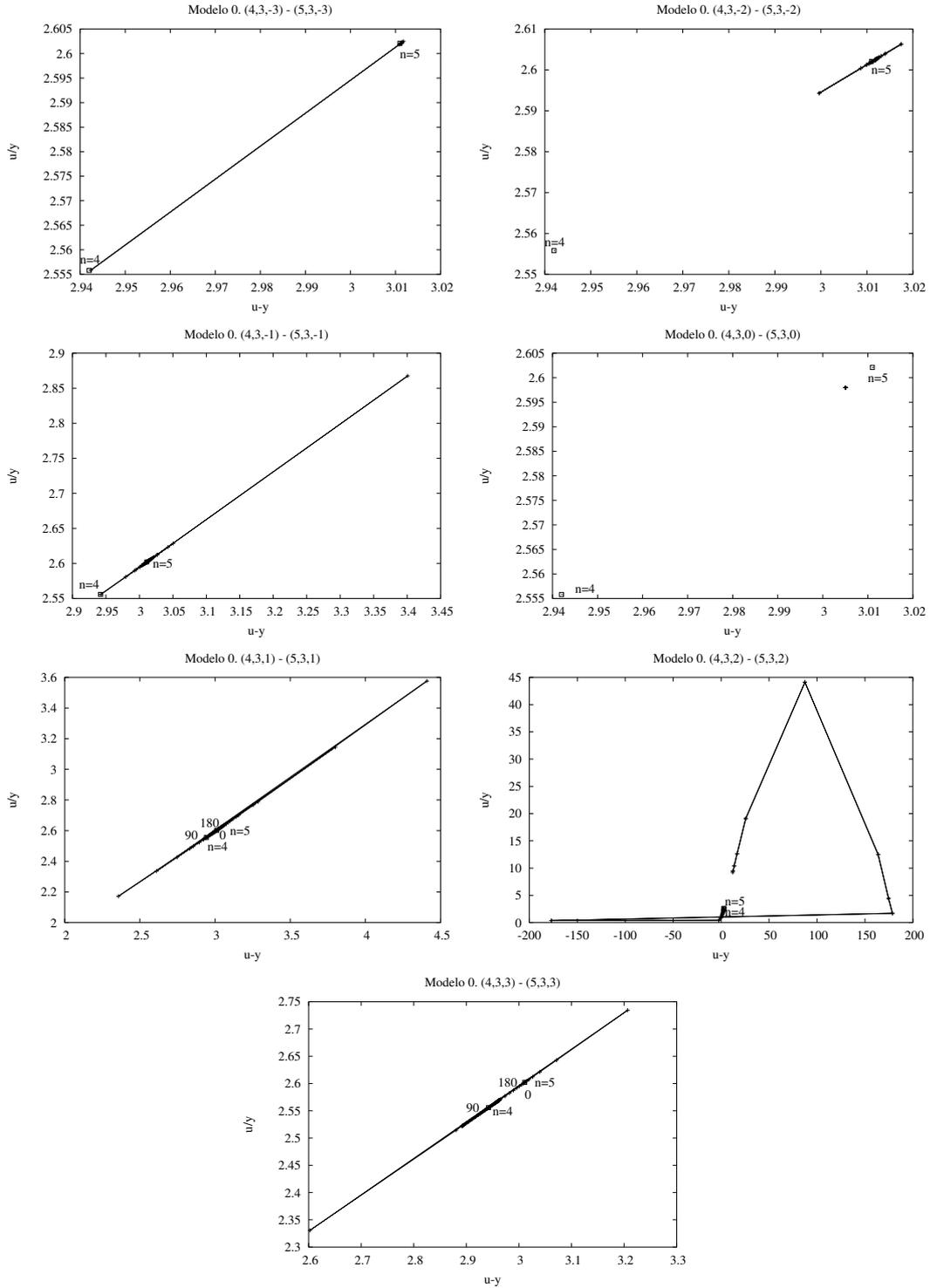


Figura 8.21: Diagramas fase-amplitud para el filtro  $u$  de los modos acoplados con el mismo  $\ell$ . Igual que antes, se muestran los puntos correspondientes a las predicciones sin rotación, representados mediante cuadrados.

$m = 0$ , y el segundo con los  $m = \pm 1$ . Como novedad nos encontramos con un acoplamiento  $\ell = 0 - \ell' = 2$  que prácticamente describe una vuelta completa (ver Fig. 8.20). Se observa que la mayor densidad de soluciones se encuentra en torno a las predicciones asociadas a los modos con  $\ell \leq 1$ , las cuales se corresponden además

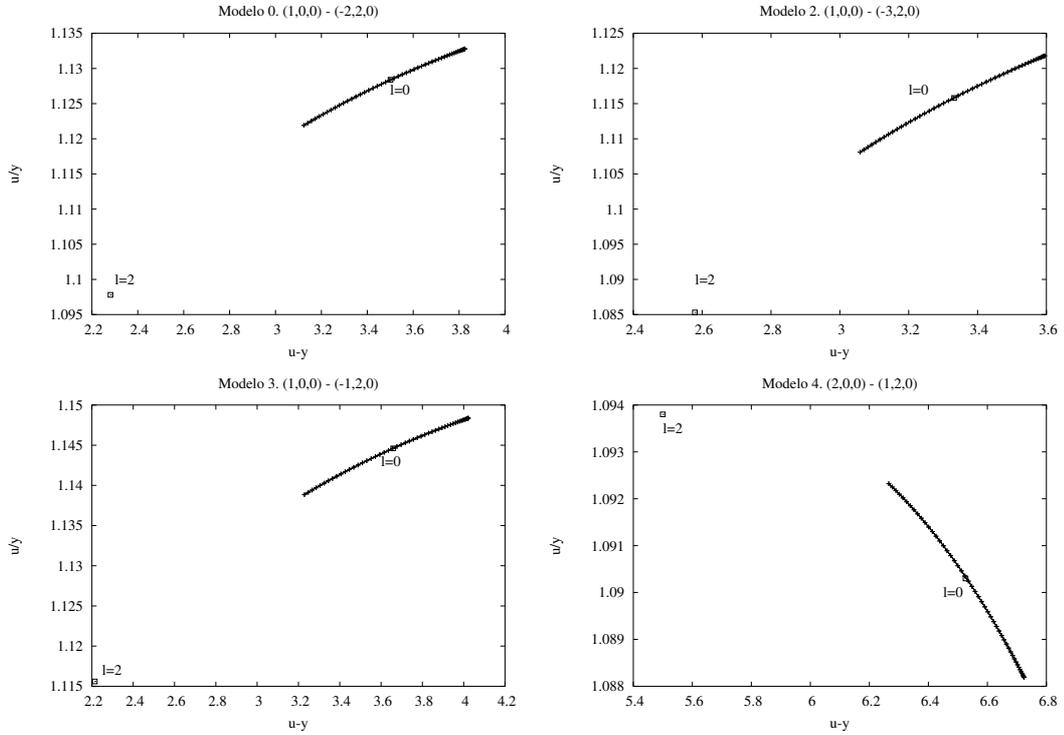


Figura 8.22: Diagramas fase-amplitud para el filtro  $\mathbf{u}$  de los modos mixtos con  $\ell = 0$  y  $\ell = 2$ , acoplados. Como en las dos Figs. anteriores, se muestran los puntos correspondientes a las predicciones sin rotación, representados mediante cuadrados.

con el rango de ángulos intermedios. Por ejemplo, en la gráfica asociada a la pareja  $(n, n') = (6, 5)$  se comprueba que el modo  $\ell = 0$  se podría identificar como un  $\ell = 2$  si se observara desde los polos ( $i$  cercano a  $+180^\circ$  ó  $-180^\circ$ ), mientras que para la mayoría de los ángulos de observación se obtendrían unos índices de color cercanos a los correspondientes a un  $\ell = 0$  puro. Si nos fijamos en la gráfica correspondiente a  $(n, n') = (5, 4)$ , observamos que nunca se identificaría el  $n = 5$  como un  $\ell = 2$ , sino como un  $\ell = 0$ . Las gráficas asociadas al acoplamiento  $(\ell, \ell') = (1, 3)$  presentan un comportamiento más complejo. Sin embargo, se observa una característica general: la mayor densidad de soluciones se obtiene, con diferencia, en torno a  $\ell = 1$ , y solamente para ángulos cercanos a  $180^\circ$  se observaría como un  $\ell = 3$ . Como ya se comentó en el caso de la estrella **RV Ari**, puede suceder que el ángulo de inclinación de lugar a unos índices de color cercanos a los correspondientes a otros modos (desde  $\ell = 0$  hasta  $\ell = 3$ ), por lo que hay que relizar un análisis riguroso para poder obtener la identificación adecuada, que puede no ser unívoca.

Las gráficas correspondientes a las parejas de modos que tienen el mismo valor de  $\ell$  se muestran en la Fig. 8.21, observándose que las formas de las curvas son completamente diferentes a las del caso anterior. En concreto, la que se obtiene para la pareja  $(4, 3, 2) - (5, 3, 2)$  describe una trayectoria amplísima en el diagrama fase-amplitud, siendo el primer caso en que nos encontramos una curva así. Por último, en la Fig. 8.22 se muestran las curvas asociadas a las parejas de modos mixtos  $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . Vemos que en todos los casos es imposible identificar el modo como un  $\ell = 2$ , independientemente del ángulo, resultado ya obtenido para la estrella anterior.

#### 8.4.4. Conclusiones

En esta sección hemos estudiado los efectos de la rotación y en concreto de la degeneración accidental, sobre las propiedades pulsacionales de **29Cyg**. Debido a que la velocidad de rotación es algo más elevada que la de **RV Ari**, el número de modos degenerados por rotación es mayor, obtiéndose algunos comportamientos diferentes en las curvas de los diagramas fase-amplitud. Por otro lado, hemos vuelto a encontrar que la diferencia  $|\sigma - \sigma'|$  aumenta de forma casi lineal con la frecuencia, lo que indica que cuanto mayor es el orden de un modo, más se ve afectado por el acoplamiento. Por otro lado, hasta una cierta frecuencia el valor de  $|\sigma - \sigma'|$  es independiente del valor de  $\ell$ , mientras que a partir de ella, generalmente las parejas con  $\ell = 0$  y  $2$  se separan de las que tienen  $\ell = 1$  y  $3$ . Este resultado ya fue obtenido para la estrella **RV Ari**, aunque por ahora desconocemos la causa de este comportamiento.

Hemos encontrado de nuevo que los coeficientes de contaminación de los modos con  $\ell = 0$  y  $\ell = 1$  tienden asintóticamente a 0, mientras que los de  $\ell = 2$  y  $\ell = 3$  lo hacen a 1. Luego el peso de los armónicos esféricos con valores de  $\ell$  altos es cada vez mayor, como ya sabemos, lo cual se debe a las diferencias en los modos de inercia. Por otra parte, se encuentra nuevamente una dependencia de estos coeficientes con el valor de  $m$ .

Las conclusiones a las que hemos llegado son, pues, las mismas que se obtuvieron para **RV Ari** con una velocidad de 52.6 km/s. A pesar de tener en este caso una estrella con mayor velocidad de rotación, no encontramos nuevos efectos, a no ser diagramas de color algo más complicados, ya que en algunos casos, al variar el ángulo desde  $-180^\circ$  a  $180^\circ$ , las curvas describen varias vueltas en los diagramas fase-amplitud (ver Figs. 8.20 y 8.21).

### 8.5. Efectos de la evolución sobre los acoplamientos por rotación

Pasamos a estudiar el comportamiento del acoplamiento de los modos, y en concreto de los coeficientes de contaminación, a lo largo de la evolución estelar. Para ello hemos obtenido el camino evolutivo del modelo central de la caja fotométrica haciendo uso de las dos aproximaciones ya utilizadas: rotación rígida y rotación diferencial. En ambos casos se ha elegido la velocidad de rotación en la ZAMS de tal manera que se obtenga un modelo compatible con las observaciones ( $\log T_{ef} = 3.902$ ,  $\log g = 4.12$ ,  $\Omega = 80$  km/s).

#### 8.5.1. Rotación rígida

En la Fig. 8.23 se muestran las diferencias  $|\sigma - \sigma'|$  en función de la frecuencia de los modos para tres momentos evolutivos: el primero prácticamente en la ZAMS, (50 millones de años), el segundo en el punto del diagrama HR proporcionado por las observaciones (1250 millones de años), y el último casi al final de su vida en la secuencia principal (1740 millones de años). Como puede comprobarse, el número de modos afectados por la degeneración accidental aumenta considerablemente a lo largo de la evolución, sobre todo hacia el final de la vida de la estrella en la Secuencia

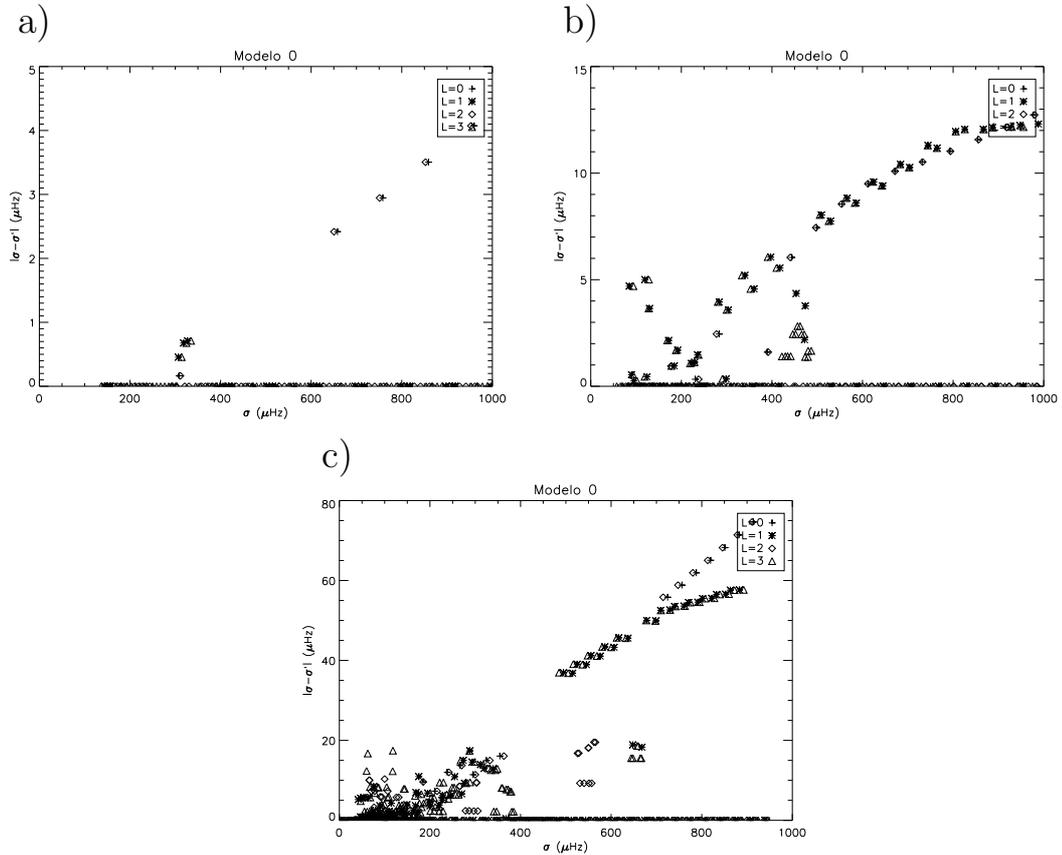


Figura 8.23: Diferencias  $|\sigma - \sigma'|$  para tres puntos del camino evolutivo obtenido con rotación rígida, en función de la frecuencia de los modos: a) modelo con 50 millones de años,  $v = 57.3$  km/s; b) modelo con 1250 millones de años,  $v = 82.5$  km/s; c) modelo con 1740 millones de años, prácticamente al final de la secuencia principal,  $v = 134.0$  km/s.

Principal. Dado que al usar esta aproximación permanece constante la velocidad de rotación de la estrella (Sec. 2.5.1), este incremento en el número de acoplamientos está propiciado por el empaquetamiento de los modos.

En la Fig. 8.24 se muestra la variación de las frecuencias de algunos de los modos a lo largo de la evolución. A la izquierda se observan los valores afectados únicamente por la rotación, pero no por el acoplamiento, mientras que a la derecha se ha incluido este último. Es identificable el efecto del *avoided crossing* sobre las frecuencias (a temperaturas más bajas, cuando la estrella está más evolucionada), ya que provoca variaciones bruscas en las mismas cuando dos modos se acercan lo suficiente como para acoplarse. Por último, hay que notar que se han representado únicamente un par de modos de cada tipo (**f**, **g** y **p**), con el objeto de no complicar demasiado las figuras. Para los dos primeros casos se ha elegido  $\ell = 2, 3$ ,  $m = 0$ , mientras que para el último,  $\ell = 0$ .

En la Fig. 8.25 se muestran los coeficientes de contaminación obtenidos para estos tres tipos de modos, pudiendo observarse cómo el número de acoplamientos aumenta con la evolución (de arriba hacia abajo). Aunque el comportamiento general de estos coeficientes es similar al encontrado en **RV Ari**, constatamos la presencia de un buen número de modos  $\ell = 3$  con  $\beta \leq 0.45$ . Estos se corresponden con acoplamientos en

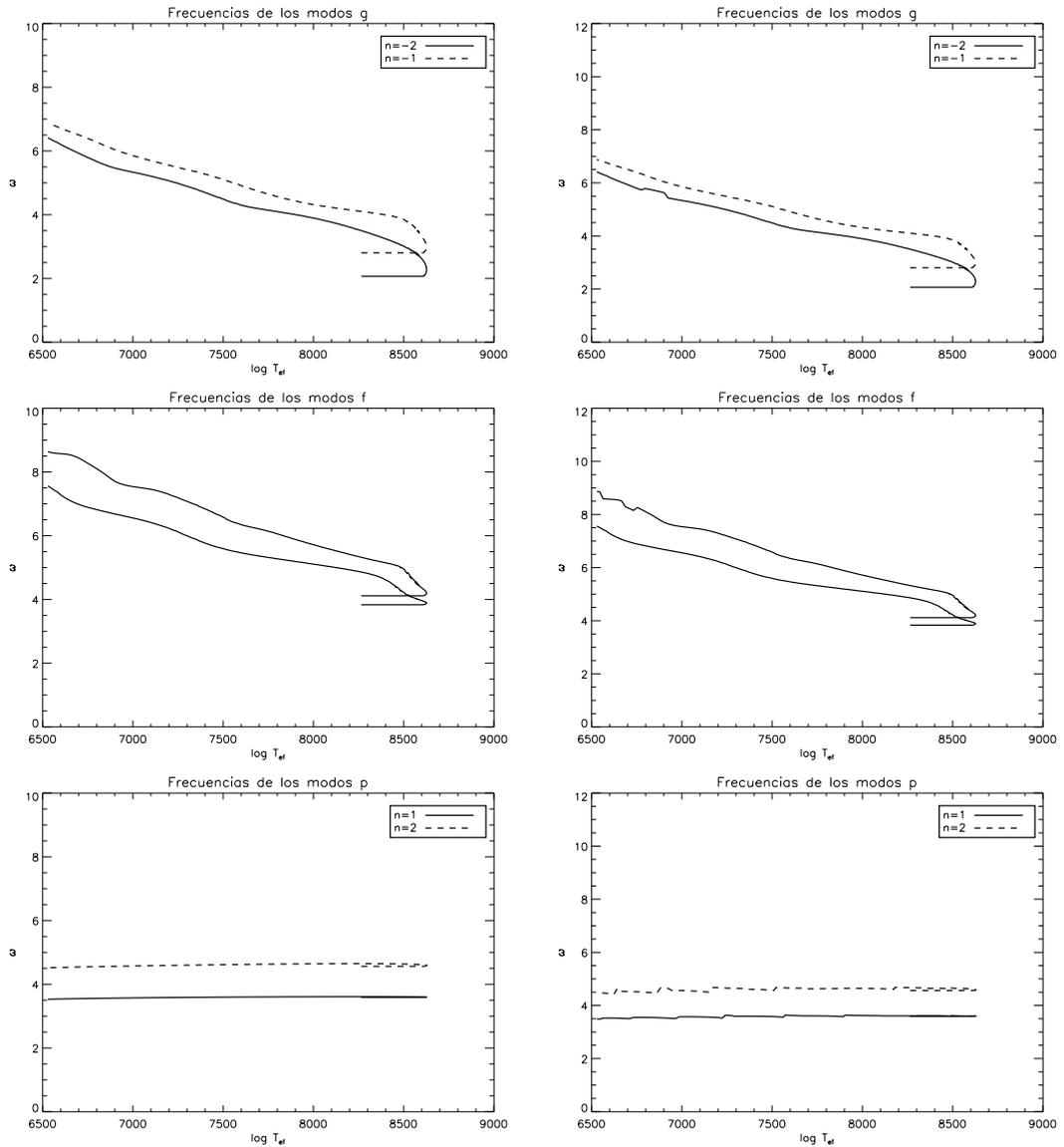


Figura 8.24: Evolución de la frecuencia adimensional de algunos modos **g** (gráficas superiores), **f** (gráficas centrales) y **p** (gráficas inferiores) para el modelo obtenido con rotación rígida. A la izquierda se muestran las frecuencias calculadas teniendo en cuenta la rotación, pero no el acoplamiento. En las gráficas de la derecha ya se han incluido los efectos de éste.

parejas con el mismo valor  $\ell$ , cuyo comportamiento es diferente al resto.

En la Fig. 8.26 se muestran los coeficientes de contaminación de ciertos modos a lo largo de la vida de la estrella. Puede observarse que éstos se modifican apreciablemente con la evolución estelar, a pesar de que para **RV Ari** se obtenían valores prácticamente constante. También hay una diferencia con respecto a la estrella anterior, y es que en aquélla llegaba un momento de la evolución en la que los modos **g** y **f** ya no presentaban coeficientes  $\beta \approx 0.5$ , mientras que en este caso sí se obtienen estos valores para los estadios más tardíos (esto es, para temperaturas efectivas bajas).

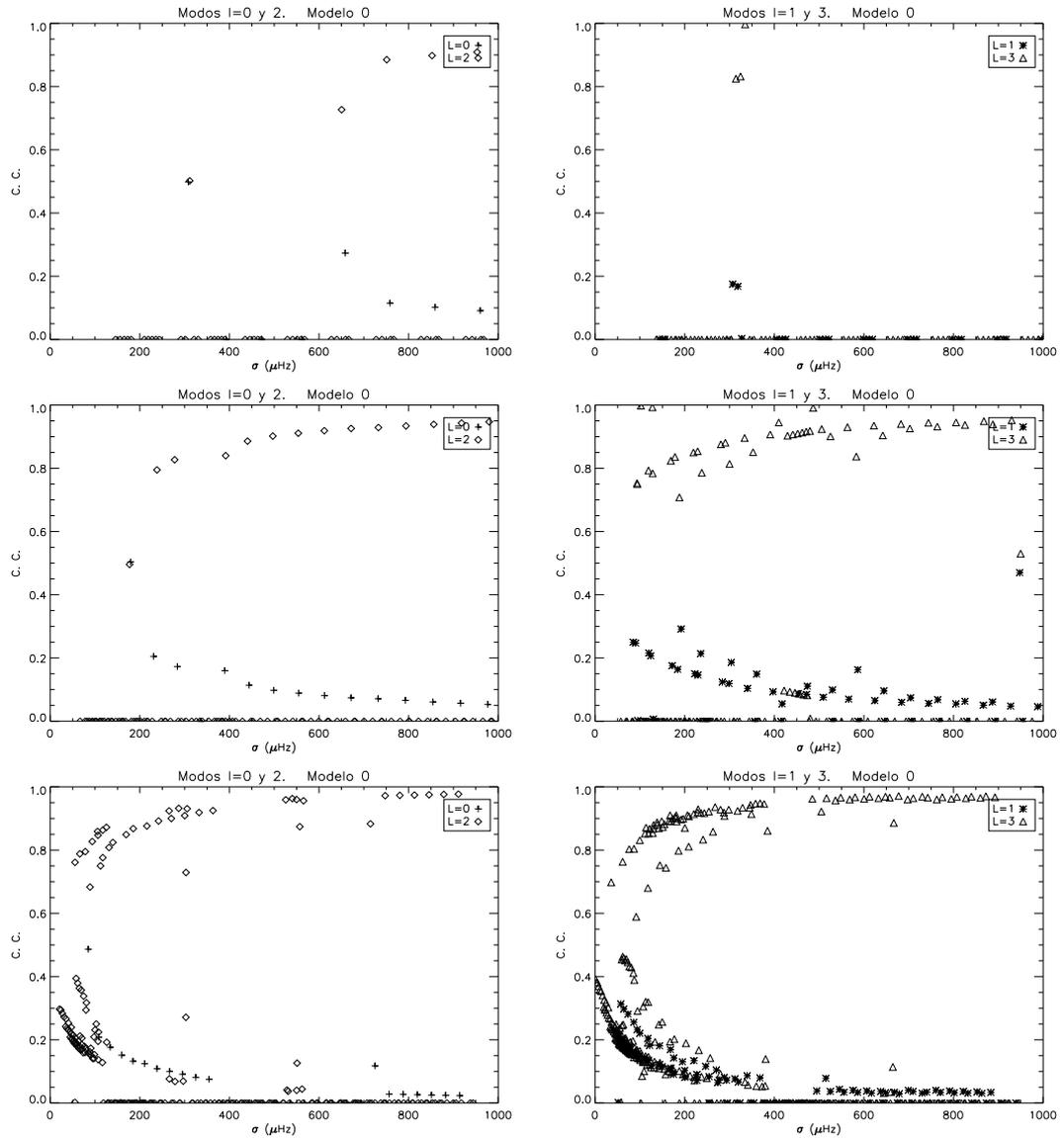


Figura 8.25: Coeficientes de contaminación para los tres puntos anteriores del camino evolutivo anteriores, en función de la frecuencia de los modos. *Izquierda*: valores obtenidos para las parejas  $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . *Derecha*: lo mismo, pero para las parejas  $(\ell, \ell') = (1, 3)$ . En orden descendente: modelos con 50, 1250 y 1740 millones de años.

### 8.5.2. Rotación diferencial

En esta ocasión se ha utilizado la rotación diferencial en los cálculos. Nos quedamos con tres momentos de la vida de la estrella, correspondientes a 50, 1250 y 1550 millones de años. En la Fig. 8.27 se muestra la diferencia de frecuencias  $|\sigma - \sigma'|$  para estos tres momentos evolutivos. Puede apreciarse de nuevo cómo estas diferencias aumentan con la edad (téngase en cuenta que aunque se observan algunos modos en el modelo de 1250 millones de años con diferencias de frecuencias muy elevadas, la mayoría se sitúa por debajo de los 40 - 50  $\mu\text{Hz}$ , mientras que en el modelo más evolucionado es frecuente tener  $|\sigma - \sigma'| \gtrsim 50 \mu\text{Hz}$ ). Como ya hemos comentado (Sec. 7.6.2), la causa de esto se encuentra en el progresivo empaquetamiento de los modos.

En la Fig. 8.28 mostramos la evolución de las frecuencias a lo largo de la vida de

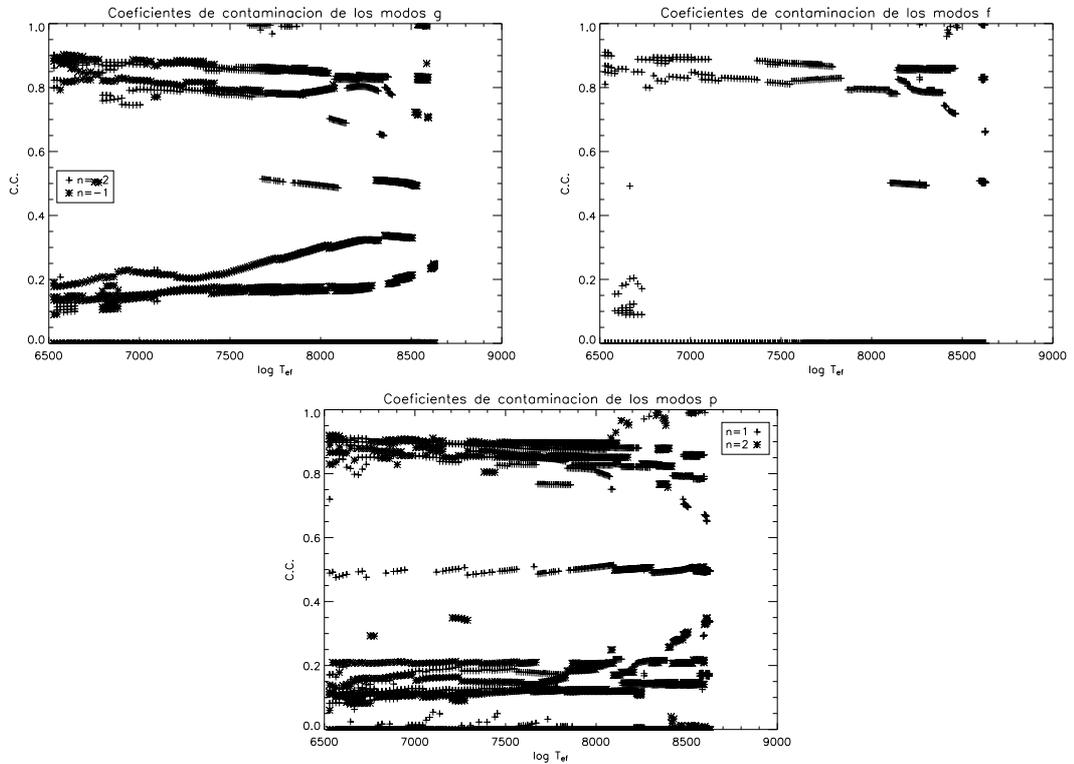


Figura 8.26: Evolución del coeficiente de contaminación de los modos **g**, **f** y **p** para el modelo central de la caja fotométrica evolucionado con rotación rígida. La evolución viene caracterizada por la temperatura efectiva.

la estrella. En las gráficas de la derecha se observan los efectos de los acoplamientos. Como era de esperar, los modos más afectados son los modos mixtos.

Con respecto a los coeficientes de contaminación, en la Fig. 8.29 se representan sus valores para las tres edades consideradas anteriormente. Podemos observar, por un lado, que el número de acoplamientos aumenta significativamente con la evolución, como ya sabemos. Además, vemos que el número de acoplamientos entre modos con el mismo  $\ell$  es mayor que en el caso de rotación rígida. En la Fig. 8.30 se muestra la evolución de los coeficientes de contaminación con la edad para los mismos modos estudiados en la sección anterior. En estas gráficas puede observarse que el número de acoplamientos es importante, como se aprecia por la gran cantidad de puntos.

Por último, nótese que los tipos de acoplamientos para  $\beta = 0.5$ , que se dan en modos **f** y **g** desaparecen a partir de una cierta temperatura, cosa que no ocurría con la aproximación de rotación rígida.

## 8.6. Diagramas de Petersen para 29 Cyg

Como ya sabemos (ver Sec. 7.7), el estudio de los Diagramas de Petersen, esto es, de  $\Pi_{1/0}$  frente a  $\log \Pi_0$ , nos proporciona información independiente sobre la masa, metalicidad y estado evolutivo de la estrella en cuestión. Aunque los modos radiales están fuertemente relacionados con la densidad media de la estrella, la dependencia con ésta de los cocientes de frecuencias para órdenes superiores al primero es por ahora desconocida. En este capítulo, puesto que hemos identificado (ver Sec. 8.3.1)

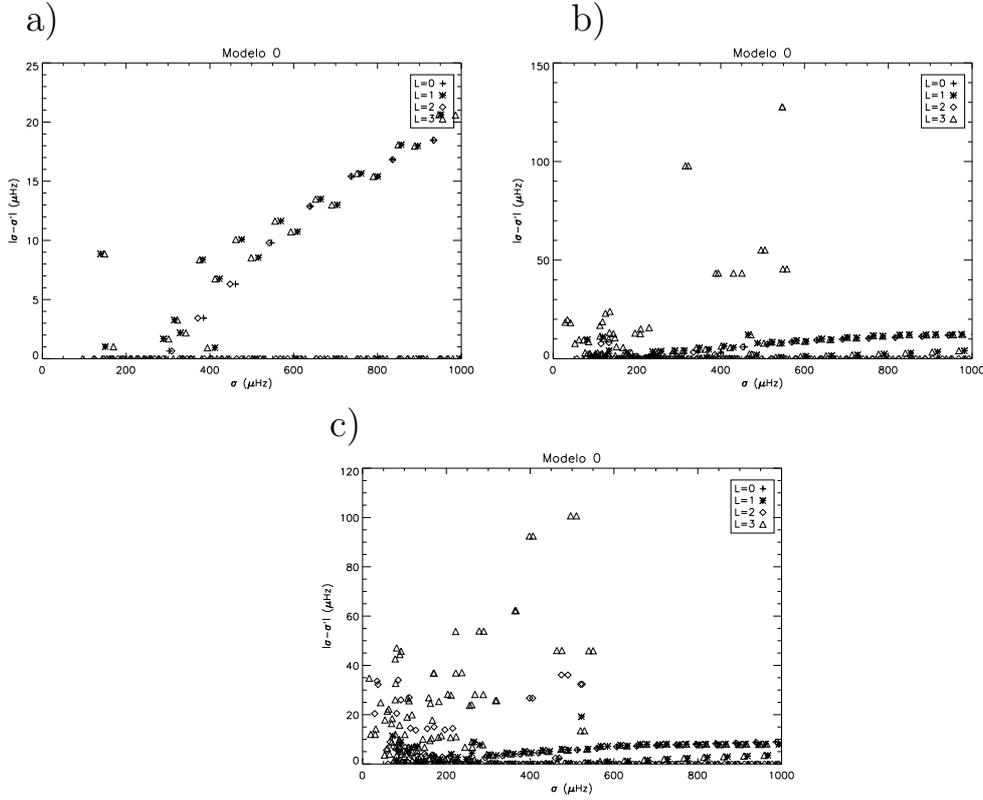


Figura 8.27: Diferencias  $|\sigma - \sigma'|$  para tres puntos del camino evolutivo obtenido con rotación diferencial, en función de la frecuencia de los modos: a) modelo con 50 millones de años,  $v = 115.6$  km/s; b) modelo con 1250 millones de años,  $v = 82.7$  km/s; c) modelo con 1550 millones de años, prácticamente al final de la secuencia principal,  $v = 67.1$  km/s.

$f_1$  y  $f_2$  como tercer y cuarto sobretonos radiales respectivamente ( $n = 4$  y  $n = 5$ ), hemos querido generalizar estos diagramas a una representación del cociente  $\Pi_{4/3}$  frente a  $\log \Pi_3$ , donde  $\Pi_i$  es el periodo del sobretono  $i$ -ésimo ( $n = i + 1$ ), en días, para comparar con el valor observado. De esta manera, esperamos acotar parámetros como la masa y la metalicidad, a semejanza de lo realizado para la estrella anterior. Aunque hasta ahora no se han estudiado ni representado este tipo de cocientes, pretendemos mostrar cuánto se acercan al valor observado, por lo que hemos optado por representar gráficamente su evolución. Denotaremos estos diagramas como  $\Pi_{4/3}$ .

En la Fig. 8.31 se muestra  $\Pi_{4/3}$  para los cinco modelos de la caja fotométrica, calculados sin rotación. Puede observarse que todos los tracks se sitúan por encima del valor observacional, lo cual indica que en principio ningún modelo parece ser adecuado para describir esta estrella. De hecho, el que más se aproxima es el más masivo, situado a una distancia de aproximadamente 0.003, ligeramente inferior a la anchura de la zona de las estrellas de Población I, de 0.004. Observamos, asimismo, que el valor de los cocientes disminuye conforme aumenta la masa, al contrario de lo que ocurre con  $\Pi_{1/0}$ , como se vió en la estrella **RV Ari** (Sec. 7.7).

En la Fig. 8.32 se muestra la dependencia de estos diagramas con la metalicidad de la estrella. Se presentan, en concreto, los tracks para dos valores de la misma: el observado,  $[M/H] = -0.44$ , y uno de los extremos dentro de la barra de error observacional (de 0.20 dex),  $[M/H] = -0.24$ . Puede comprobarse que al dismi-

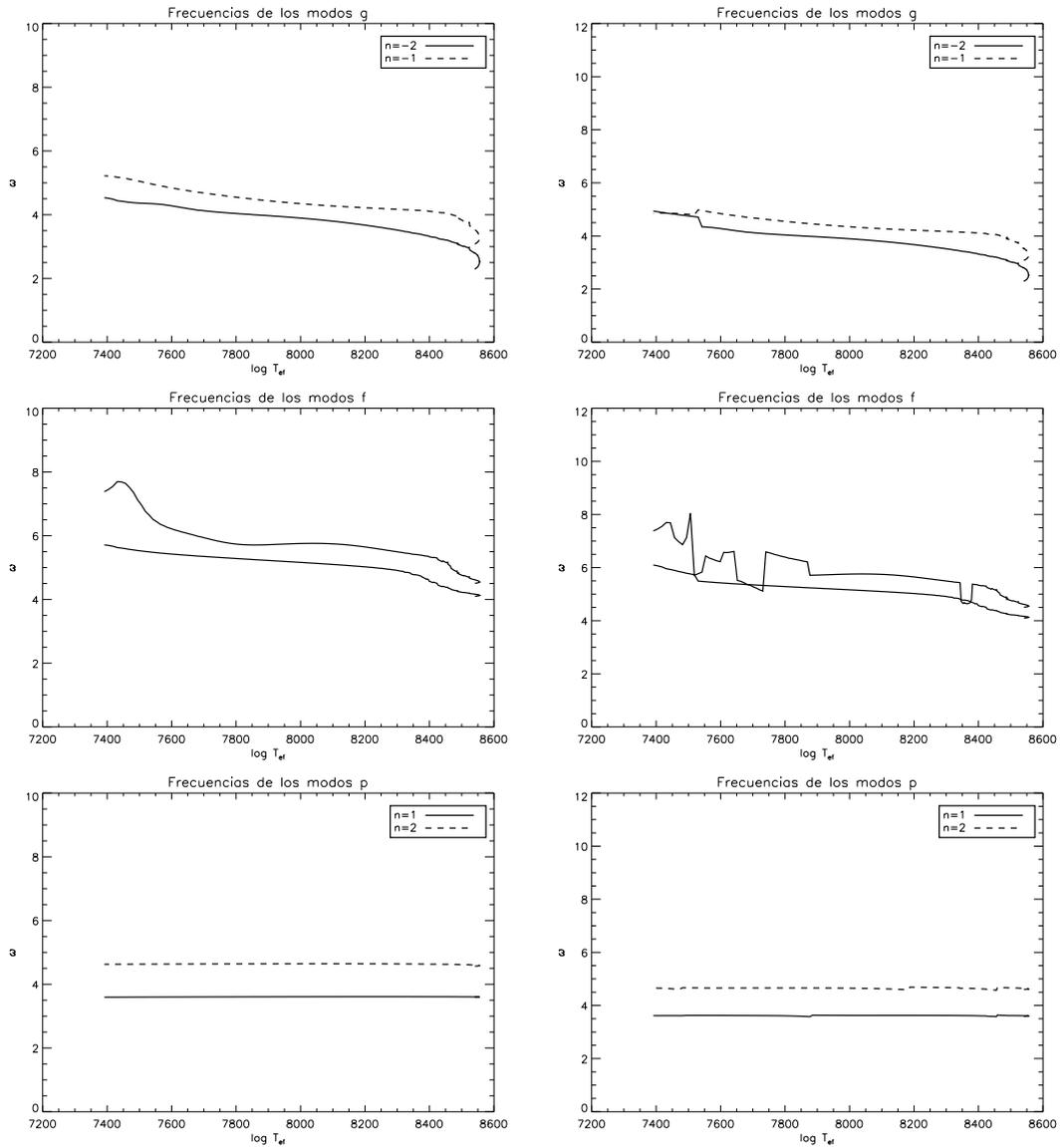


Figura 8.28: Evolución de la frecuencia adimensional de algunos modos **g** (gráficas superiores), **f** (gráficas centrales) y **p** (gráficas inferiores) para el modelo calculado con rotación diferencial. En las Figs. de la izquierda no se ha incluido la degeneración accidental, mientras que en las de la derecha, sí.

nuir la metalicidad, aumenta el valor de los cocientes, al igual que ocurría con los diagramas de Petersen clásicos (ver Sec. 7.7). Sin embargo, a pesar del fuerte incremento en el valor de la metalicidad del modelo, no se consigue que los tracks pasen cerca del punto observacional, quedando bastante alejado, y por encima de éste, en concreto, a una distancia de 0.0045. La mejora en los valores del cociente se sitúa, pues, en torno al 11 %, claramente insuficiente como para reproducir los resultados experimentales.

Por último, en la Fig. 8.33 se muestra este tipo de diagramas para los cinco modelos de la caja fotométrica, pero cuando se incluye la rotación. En concreto, se ha tomado una velocidad de rotación de 80 km/s. Puede observarse que los caminos evolutivos se presentan en este caso ligeramente desplazados hacia valores

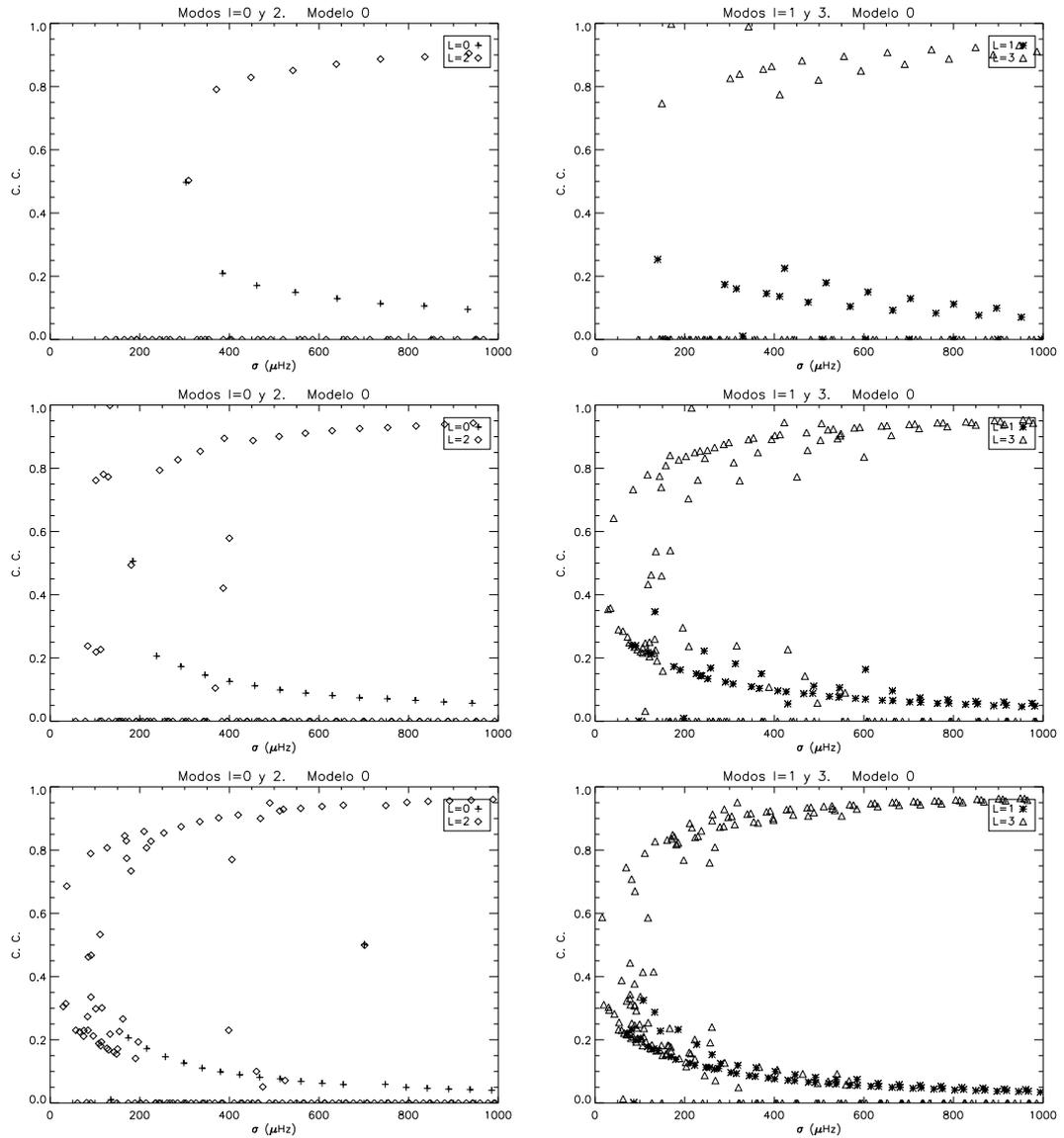


Figura 8.29: Coeficientes de contaminación para los tres puntos del camino evolutivo anteriores, en función de la frecuencia de los modos. *Izquierda*: valores obtenidos para las parejas  $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . *Derecha*: lo mismo, pero para las parejas  $(\ell, \ell') = (1, 3)$ . En orden descendente: modelos con 50, 1250 y 1550 millones de años.

mayores con respecto a los del caso sin rotación (comparar esta gráfica con la 8.31). Este comportamiento es el mismo que se observaba para el cociente entre el modo fundamental y su primer sobretono, con lo que vemos que al aumentar la velocidad de rotación se produce un alejamiento del valor observacional.

No conseguimos, pues, reproducir el valor medido a partir de las observaciones, aun cuando se varíen significativamente parámetros como la masa, la metalicidad o la velocidad de rotación. En todos los casos se encuentra que los valores de los cocientes se sitúan por encima del experimental. Podemos, pues, plantearnos el motivo de estos comportamientos. En primer lugar podría suceder que la hipótesis de partida fuera incorrecta, esto es, que alguno de los modos que estamos estudiando no fuera radial. Si observamos la Fig. 8.8, vemos que también sería posible que alguno de

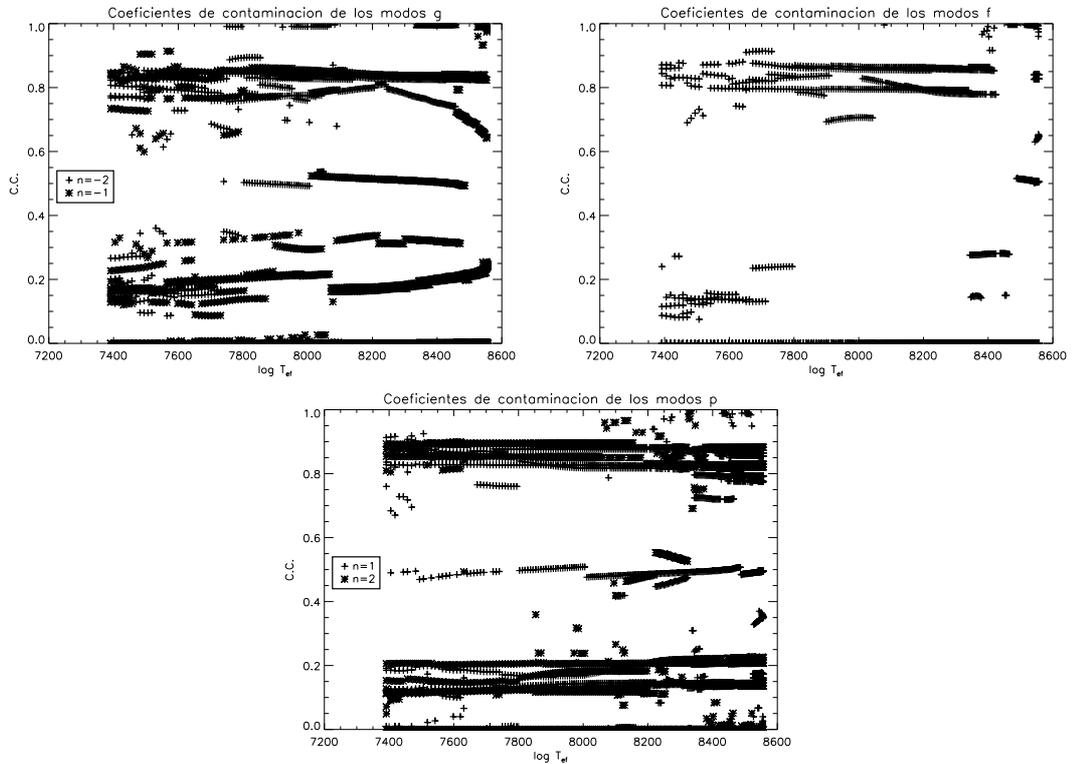


Figura 8.30: Evolución del coeficiente de contaminación de los modos  $g$ ,  $f$  y  $g$  para el modelo central de la caja fotométrica evolucionado con rotación diferencial. La evolución viene caracterizada por la temperatura efectiva.

ellos se identificara con un modo no radial, si bien es verdad que las posibilidades que tenemos concuerdan peor con los datos observacionales. Sin embargo, podría existir otra explicación, basada en la metalicidad, y que desarrollaremos con más extensión en la sección siguiente.

## 8.7. Estudio de 29 Cyg mediante modelos obtenidos con metalicidad solar

La identificación de **29 Cyg** como una  $\lambda$  Bootis no puede ser ignorada en cualquier estudio de sus propiedades pulsacionales. Este tipo de estrellas, como comentaremos más adelante, tiene la particularidad de mostrar una metalicidad subsolar en la atmósfera, aunque en realidad sean estrellas de Población I. Será interesante, por tanto, tener en cuenta esta peculiaridad con el objeto de intentar explicar algunas de las discordancias encontradas en las secciones anteriores. Empezaremos resumiendo algunas de las características de este tipo de estrellas.

### 8.7.1. Propiedades de las estrellas $\lambda$ Bootis

Estas fueron descubiertas por Morgan et al. (1943). Son de población I y su tipo espectral varía desde el A temprano hasta las F enanas, como se desprende de los resultados obtenidos a partir de las líneas del hidrógeno. Presentan también líneas metálicas débiles para sus colores y tipos espectrales, y velocidades de rotación

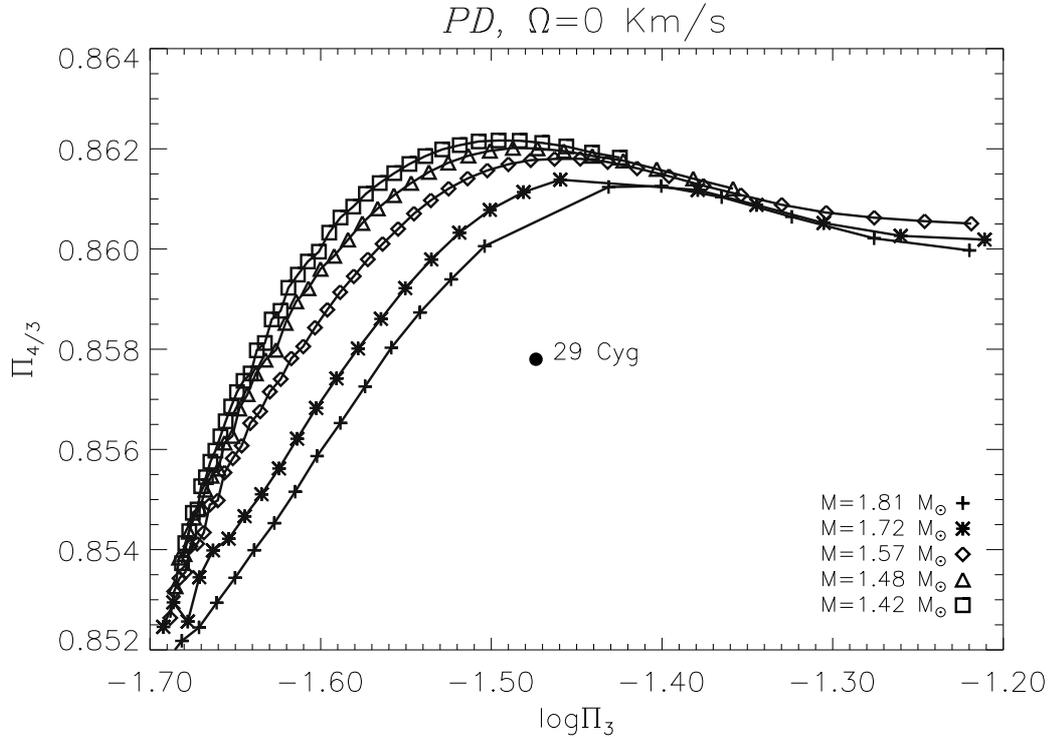


Figura 8.31:  $\Pi_{4/3}$  para los tracks de los cinco modelos de la caja fotométrica, obtenidos sin rotación y con la metalicidad observada:  $[M/H]=-0.44$ . El círculo representa el valor observado para el cociente de frecuencias. Los periodos están dados en días.

moderadamente elevadas. Son no magnéticas, y muestran además deficiencias muy pronunciadas en los picos del hierro, del orden de 2 dex, pero abundancias solares de C, N, O y S (Gray y Corbally, 2002). Aproximadamente el 2% de las estrellas de campo de tipo A son miembros de esta clase.

Actualmente existe una teoría que intenta explicar sus propiedades. Propuesta por Venn y Lambert (1990), fue motivada por la similitud existente entre sus patrones de abundancias y las del medio interestelar, donde los elementos menos refractarios (C, N, O y S) permanecen en fase gaseosa. Esta teoría introduce la hipótesis de la acreción de gas con bajo contenido en metales sobre la fotosfera de estas estrellas, lo que produciría las abundancias encontradas sobre la base de sus zonas convectivas superficiales. La tasa de acreción requerida es de  $10^{-3}M_{\odot}$  por año (Charbonneau, 1993). Una vez que ésta se detiene, las deficiencias en metales desaparecerían en unos  $10^6$  años (Charbonneau, 1993; Turcotte y Charbonneau, 1993). Esta teoría sugiere que las  $\lambda$  Bootis deberían ser estrellas de tipo A bastante jóvenes (de la pre-secuencia principal o de la ZAMS), todavía asociadas a nubes de gas y polvo. Utilizando los datos de las magnitudes absolutas del satélite *Hipparcos* (ESA, 1997) para representar las estrellas  $\lambda$  Bootis conocidas sobre el diagrama HR, se encuentra que todas ellas caen entre la ZAMS y el final de la secuencia principal, TAMS (Terminal-age main sequence), (Paunzen y Gray, 1997). Esta curiosa situación condujo a Gray y Corbally a sugerir que una estrella comienza a ser una  $\lambda$  Bootis poco antes de llegar a la ZAMS, y mantiene este carácter hasta bien entrada en la Secuencia Principal gracias a una acreción lenta y mantenida desde un disco circumestelar persistente. Se puede encontrar soporte para esta hipótesis en el hecho

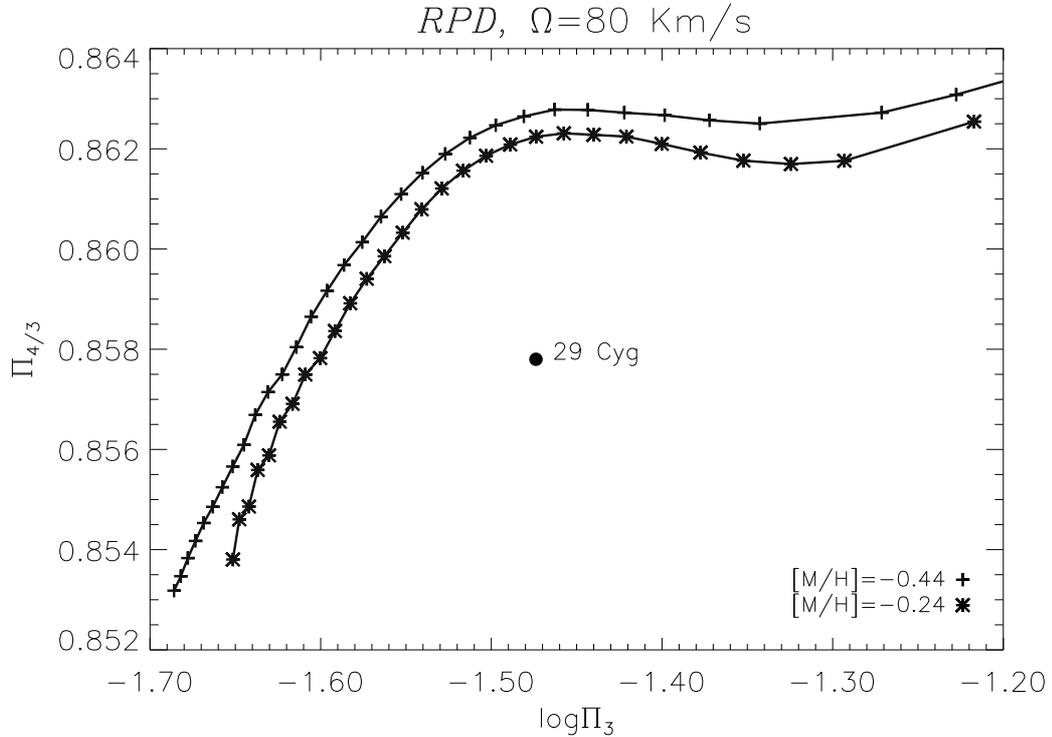


Figura 8.32:  $\Pi_{4/3}$  para **29 Cyg**. Se representan los tracks del modelo central para dos metalicidades distintas, sin rotación. El círculo representa el valor observado del cociente para esta estrella. Los periodos están dados en días.

de que una proporción significativa de las  $\lambda$  Bootis más brillantes son de tipo *Vega*.

Esta teoría viene acompañada por la hipótesis de que este material circumestelar podría ser enviado al entorno interestelar, con el objeto de explicar la nula presencia de estrellas  $\lambda$  Bootis en cúmulos abiertos. Existen evidencias de la fotoevaporación de estos discos mediante fotones del ultravioleta lejano y de Lyman provenientes de estrellas de tipo O en la Nebulosa de Orión (Johnstone et al., 1998; Throop et al., 2001) y en M16 (Hillenbrand et al., 1993; Hester et al., 1996). Se sugirió entonces que una estrella de tipo A que naciera en una región de formación estelar densa (que sobrevive todavía como cúmulo abierto), tal y como la Nebulosa de Orión, perdería su disco circumestelar por fotoevaporación y entonces llegaría a la ZAMS sin éste, pero con una disminución en la metalicidad atmosférica.

Por otra parte, en tres artículos sucesivos, Faraggiana et al. (1997); Faraggiana y Bonifacio (1999); Marchetti et al. (2001) avanzaron la hipótesis según la cual el fenómeno de las  $\lambda$  Bootis podría ser explicado en base a los espectros compuestos. Estos autores sugirieron que estos espectros, producidos por la luz combinada de dos componentes similares podrían explicar, bajo ciertas circunstancias, la aparición de líneas metálicas débiles. Demostraron además que un número de  $\lambda$  Bootis eran en efecto binarias (una mezcla de binarias espectroscópicas y visuales muy cercanas). Sin embargo, el estudio no ha avanzado lo suficiente como para que se pueda concluir que todas las estrellas de este tipo son binarias, o incluso que la frecuencia de binarias entre ellas sea diferente a la que se encuentra entre las del tipo A normal y F enanas.

Otra teoría, propuesta por Michaud y Charland (1986), propone la pérdida de

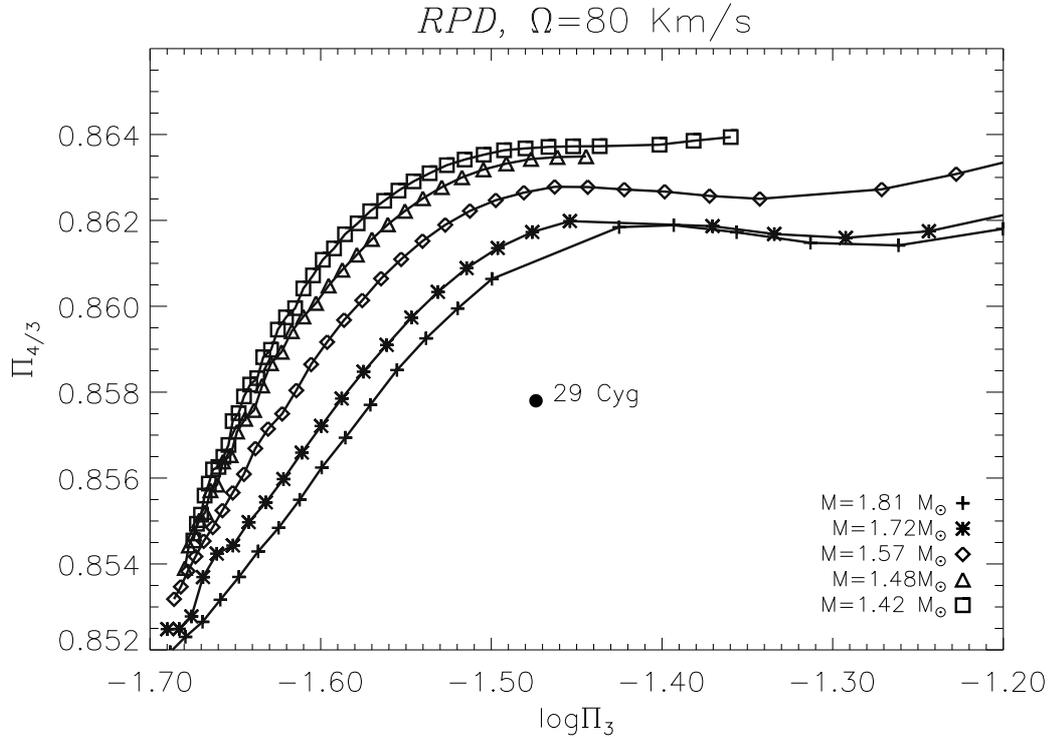


Figura 8.33:  $\Pi_{4/3}(\Omega)$  para **29 Cyg**. Se han utilizado los cinco modelos de la caja fotométrica con una única velocidad de rotación:  $v = 80$  km/s, usando la aproximación de rotación rígida. El valor de la metalicidad utilizado ha sido  $[M/H]=-0.44$ . El círculo representa el valor observado para el cociente de frecuencias.

masa de la estrella acoplada con la difusión de material. Posteriormente fue reformulada por Charbonneau (1993), quien mostró que incluso una cantidad moderada de mezcla inducida por la rotación es suficiente para impedir la profunda separación química requerida para producir las bajas abundancias en etapas tardías de la evolución. Puede encontrarse más información sobre las distintas teorías existentes en Paunzen et al. (1997).

Con respecto al carácter pulsacional de las  $\lambda$  Bootis, más recientemente se han llevado a cabo estudios sobre algunas de estas estrellas (Paunzen et al., 1998), y en particular, sobre la que nos ocupa en este capítulo (Heiter et al., 1998; Rolland et al., 2002). Observacionalmente, el principal problema se encuentra en que la clasificación de estas estrellas, basada en índices fotométricos o en espectros de baja resolución, no es suficiente como para decidir la pertenencia o no a este grupo. Es necesaria una detallada investigación espectroscópica que permita distinguirlas de otras estrellas con parecida clasificación espectral pero diferentes patrones de abundancias.

Dado, pues, que parece demostrada la pertenencia de **29 Cyg** a este grupo de estrellas, será necesario proceder a una comparación entre los resultados obtenidos en las secciones anteriores y las predicciones que se obtendrían a partir de modelos calculados con metalicidad solar, y atmósfera baja en metales.

	$M/M_{\odot}$	$\log T_{ef}$	$\log g$	$\log L/L_{\odot}$	$X_C$	Edad	$\alpha$	$f_{min}$	$f_{max}$
00	1.83	3.902	4.12	1.14	0.483	670	1.5	209	670
01	1.83	3.902	4.12	1.14	0.483	670	1.0	213	699
02	1.83	3.902	4.12	1.14	0.483	670	0.5	204	759

Tabla 8.10: Modelos calculados para **29 Cyg**, con atmósfera, sin rotación y con metalicidad solar. La convección se ha tratado con **MLT**.

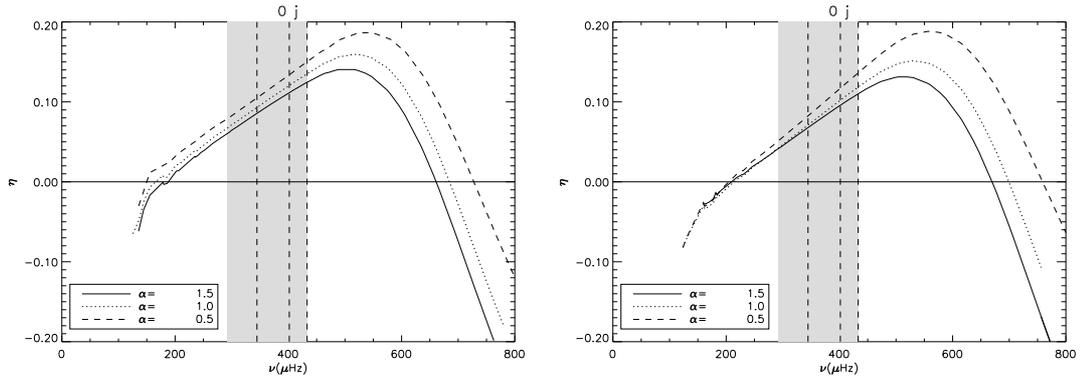


Figura 8.34: *Growth Rate* de cada modo frente a su frecuencia. En líneas verticales se muestran las frecuencias observadas. *Izquierda*: Modelo con metalicidad subsolar. *Derecha*: Modelo con metalicidad solar. La zona sombreada muestra la zona de frecuencias detectadas observacionalmente.

### 8.7.2. Modelos con atmósfera

Con el objeto de llevar a cabo este estudio se ha obtenido el modelo central de la caja fotométrica con tres valores distintos de  $\alpha$ , sin rotación y con metalicidad solar. Para la atmósfera se han utilizado los modelos de Kurucz. Los resultados se muestran en la tabla 8.10. Vemos que la masa es superior a la que se obtuvo con  $[M/H]=-0.44$ , de modo ahora es de  $1.83M_{\odot}$ . Téngase en cuenta que en ambos casos estamos situados en el mismo punto del diagrama HR, lo que implica que varíen algunas magnitudes como la masa, el radio o la edad. Se puede observar que en este caso el modelo es más joven que cuando se calculó con metalicidad subsolar. Los rangos de inestabilidad también se han modificado ligeramente, haciéndose algo más estrechos, excepto para el modelo con  $\alpha = 0.5$ . En la Fig. 8.34 se muestran las gráficas de los *growth rates* para los modelos con metalicidad subsolar (izquierda) y solar (derecha).

### 8.7.3. Identificación de los modos

En la Fig. (8.35) se muestran las predicciones teóricas obtenidas a partir de estos modelos, comparándolas con los resultados observacionales. Nótese, a partir de los datos expuestos en la tabla 8.11, que los modos que parecen corresponderse con las observaciones son prácticamente los mismos que ya obtuvimos con metalicidad subsolar. Sin embargo, nos encontramos con dos diferencias. En primer lugar, la identificación para la frecuencia  $f_3$  es mucho mejor que en aquel caso, de manera que ahora no solamente se le puede asociar el modo  $(6, 0)$ , sino también el  $(5, 1)$  y

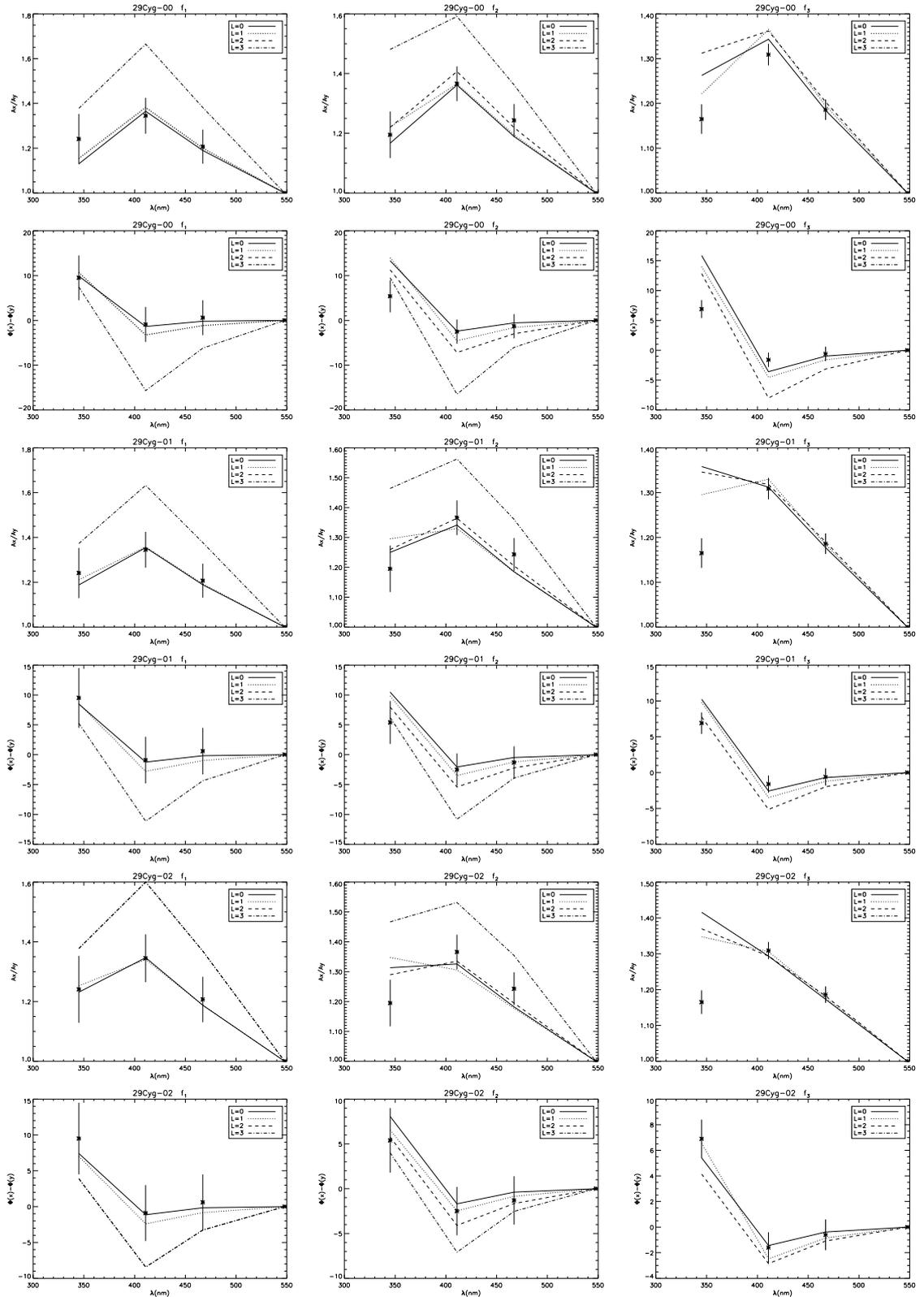


Figura 8.35: Cociente de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para las tres frecuencias, usando MLT. Modelos 0j. *Izquierda*: Frecuencia  $f_1$ , *centro*: frecuencia  $f_2$ , *derecha*: frecuencia  $f_3$ . En orden descendente:  $\alpha = 1.5, 1.0, 0.5$ .

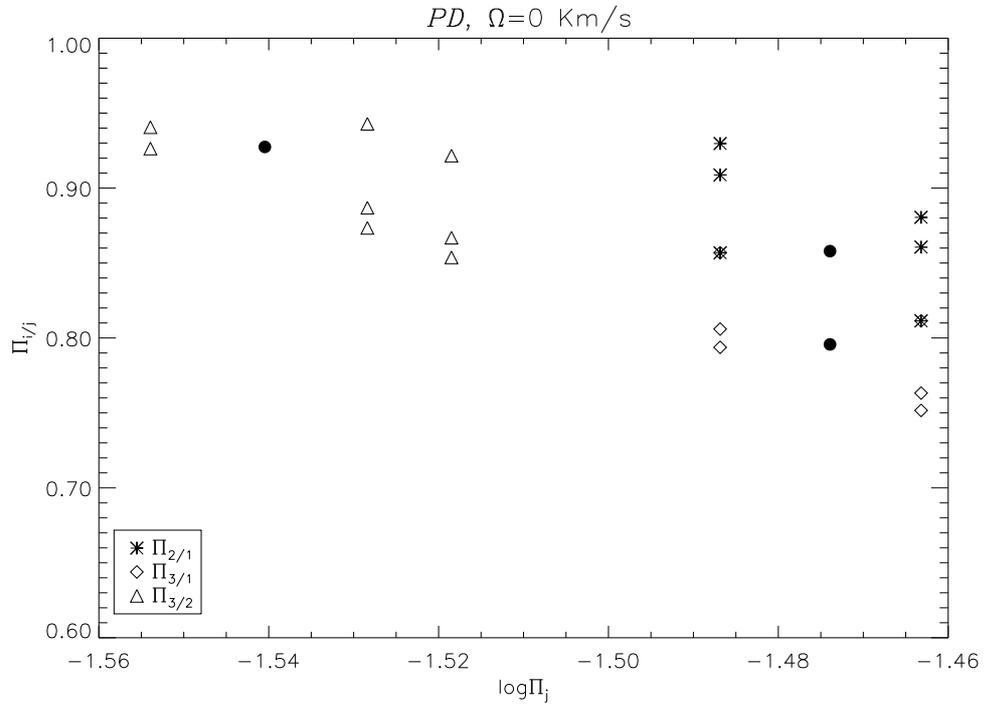


Figura 8.36: Cociente de periodos de los modos identificados en la tabla 8.11 frente al logaritmo del correspondiente periodo, en días. Los círculos rellenos representan los valores observacionales. Los asteriscos representan los valores de  $\Pi_{2/1}$  frente a  $\log \Pi_1$ , los rombos,  $\Pi_{3/1}$  frente a  $\log \Pi_1$ , y los triángulos, los valores de  $\Pi_{3/2}$  frente a  $\log \Pi_2$ .

el (5, 2). La segunda diferencia es que en este caso el modo (4, 1) se ajusta bastante bien a los resultados observacionales para  $\alpha \leq 1$ .

A raíz de este análisis podemos explicar los resultados obtenidos en la sección anterior. En efecto, es muy posible que alguno de los modos sea no radial, con lo que los cocientes no se corresponderán con los observados. Para intentar clarificar este punto, hemos representado los diagramas de Petersen para este modelo, estudio que exponemos a continuación.

#### 8.7.4. Diagramas de Petersen

En la Fig. (8.36) se muestran los cocientes de los periodos de los modos de la tabla 8.11. Los círculos rellenos representan los valores observados. Los asteriscos representan los cocientes  $\Pi_2/\Pi_1$  (donde  $\Pi_i$  representa el periodo de los modos de la

	$\alpha$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
0	1.5	(4,0) (4,1)	(5,0) (5,1)	-
01	1.0	(4,0) (4,1)	(5,0) (5,1) (5,2)	(6,0)
02	0.5	(4,0) (4,1)	(5,2)	(6,0) (5,1) (5,2)

Tabla 8.11: Identificación de los modos para las tres frecuencias del modelo central. Se ha utilizado  $\alpha_{\text{atm}} = 1.25$ .

tabla 8.11) frente al logaritmo de los periodos  $\Pi_1$ . De igual modo, los rombos representan los valores de los cocientes  $\Pi_3/\Pi_1$ , en función del logaritmo de los periodos  $\Pi_1$ , y los triángulos,  $\Pi_3/\Pi_2$  en función del logaritmo de  $\Pi_2$ .

Se puede observar que ahora los valores teóricos se aproximan a los experimentales. Dado que al obtener los modelos estelares existe cierta incertidumbre en los valores de la temperatura efectiva y la gravedad, asimismo se tiene una cierta incertidumbre en la densidad media, que puede aumentar o disminuir si se llevara a cabo un ajuste más fino. Esto provocaría un desplazamiento horizontal de los puntos teóricos, que podrían llegar a coincidir con los observados. De hecho, nótese que la distancia horizontal que existe entre éstos y los calculados numéricamente es la misma hacia la derecha y hacia la izquierda. Por tanto, podemos seleccionar los puntos que se encuentran aproximadamente a la misma altura que los círculos, con lo cual se restringe el número de posibilidades. En concreto, tenemos dos, según elijamos los que están a la izquierda o a la derecha de los valores observados:

$f_1$	$f_2$	$f_3$
(4,0)	(5,0) (4,2)	(5,1)
(4,1)	(5,1)	(6,0) (5,2)

Vemos, pues, que podemos restringir el número de modos posibles si se realiza el análisis de los cocientes de los periodos conjuntamente con la identificación modal.

## 8.8. Conclusiones generales para 29 Cyg

Se ha llevado a cabo el estudio de las propiedades pulsacionales de la estrella **29 Cyg**, y la influencia que sobre ellas tienen el parámetro de la convección  $\alpha$  y la rotación. En este caso hemos obtenido mejores resultados con  $\alpha = 0.5$ , dado que al tratarse de una estrella más caliente que **RV Ari**, tiene una zona convectiva más pequeña. Esta conclusión se complementa con la comparación con los resultados obtenidos a partir de la fotometría Strömgren. La identificación de los modos mejora notablemente cuando se utiliza este valor de  $\alpha$ , no solamente en el interior, sino también en la atmósfera.

Debido a que se trata de una estrella relativamente caliente, no ha sido necesario incluir en el estudio la influencia del tratamiento de la convección mediante la teoría **FST**, ya que hasta ahora solamente está estudiada con características propias de estrellas de tipo solar, totalmente inadecuadas para el ejemplo que nos ocupa.

Por otro lado, no parece necesario en este caso incluir la interacción de la pulsación con la convección, siendo más relevante a temperaturas menores.

Por último, dado que los cocientes de los periodos de los modos identificados no coinciden con los valores observacionales, se ha optado por calcular nuevos modelos con metalicidad solar. Esto viene avalado por algunos estudios existentes que identifican esta estrella como una  $\lambda$  Bootis. Los resultados obtenidos en este caso para  $f_1$  y  $f_2$  no varían significativamente con respecto a los anteriores en lo que respecta a los modos radiales. Sin embargo, algunos no radiales parecen corresponderse con los datos observacionales. Al incluirlos en el estudio del cociente de periodos, se restringe significativamente el número de modos posibles que pueden corresponderse

con cada una de las frecuencias. Además, la identificación de la frecuencia  $f_3$  mejora notablemente, siendo éste un resultado importante, ya que con metalicidad subsolar no era posible asociarle adecuadamente ningún modo.

Finalmente se apoya la teoría de que las  $\lambda$  Bootis son estrellas de Población I con abundancias fotosféricas anómalas, probablemente como consecuencia de su paso por nubes moleculares con bajo contenido en metales.

# Capítulo 9

## HD 205

### 9.1. Datos de la estrella

La estrella **HD 205** (SAO 10893, A5,  $V = 8.^m73$ , SIMBAD 2005) fue descubierta como pulsante durante el transcurso de unas observaciones realizadas sobre la variable de largo periodo **V823 Cas**, desde el Observatorio de Sierra Nevada en el año 2001 (Rodríguez et al., 2003). Su variabilidad fue obvia a partir de la primera noche de observaciones, con un periodo de unas 4 horas, y amplitud de  $0^m.05$ . En las noches subsiguientes se descubrió su multiperiodicidad, con un comportamiento en las curvas de luz sumamente complejo. Inmediatamente fue reconocida como  $\delta$  Scuti. Se encontraron seis frecuencias significativas, entre 5 y 14 c/d. En este trabajo solamente hemos utilizado las dos principales, ya que son las únicas para las que se tienen datos a partir de los cuales pueden obtenerse desfases suficientemente precisos para este estudio. A continuación mostramos las principales características de esta estrella (Rodríguez et al., 2003):

$T_{ef}$	7190 K
$\log g$	3.60
[M/H]	-0.11
(X, Y, Z)	(0.7211,0.2652,0.0137)

**Frecuencias observadas y datos fotométricos** (Rodríguez 2005, a partir de los datos de Rodríguez et al., 2003):

Frecuencia	P (d)	$\nu$ (c/d)	$\nu$ ( $\mu$ Hz)	$A_v$ (mmag)	$f_1/f_i$
$f_1$	0.1873	5.3382	61.79	12.88	
$f_2$	0.1601	6.2453	72.28	15.83	0.855
$f_3$	0.0753	13.2851	153.76	10.64	0.402
$f_4$	0.1296	7.7140	89.28	7.84	0.716
$f_5$	0.1496	6.6841	77.36	6.76	0.799
$f_6$	0.0894	11.1550	129.11	5.44	0.479

	$\phi_u - \phi_y$	$\phi_v - \phi_y$	$\phi_b - \phi_y$	$A_u/A_y$	$A_v/A_y$	$A_b/A_y$
$f_1$	$2.3 \pm 5.3$	$-3.8 \pm 3.6$	$-2.6 \pm 3.7$	$1.034 \pm 0.104$	$1.381 \pm 0.094$	$1.467 \pm 0.093$
$f_2$	$14.5 \pm 4.5$	$0.7 \pm 3.2$	$2.1 \pm 3.2$	$1.156 \pm 0.090$	$1.425 \pm 0.079$	$1.212 \pm 0.069$

	$M/M_{\odot}$	$\log T_{ef}$	$\log g$	$\log L/L_{\odot}$	$X_C$	Edad	$\alpha$	$f_{min}$	$f_{max}$
00	2.09	3.856	3.60	1.54	0.042	902	2.0	59	187
01	2.09	3.856	3.60	1.54	0.042	902	1.5	60	195
02	2.09	3.857	3.61	1.53	0.045	900	1.0	60	200
03	2.09	3.857	3.61	1.53	0.045	900	0.5	60	204
04	2.09	3.856	3.60	1.54	0.035	906	0.69	60	217
10	2.15	3.866	3.60	1.59	0.047	830	1.5	63	201
11	2.15	3.866	3.60	1.59	0.047	830	1.5	65	205
12	2.15	3.866	3.60	1.59	0.047	830	1.0	69	210
13	2.15	3.866	3.60	1.59	0.047	830	0.5	69	219
14	2.15	3.866	3.60	1.59	0.049	830	0.69	58	212
20	2.03	3.848	3.61	1.48	0.041	980	2.0	55	187
21	2.03	3.848	3.61	1.48	0.041	980	1.5	58	188
22	2.03	3.848	3.61	1.48	0.045	977	1.0	59	193
23	2.03	3.848	3.61	1.48	0.044	978	0.5	60	193
24	2.03	3.848	3.61	1.48	0.048	975	0.69	60	206
30	1.90	3.867	3.80	1.34	0.180	1055	2.0	78	280
31	1.90	3.866	3.80	1.34	0.180	1055	1.5	79	292
32	1.90	3.866	3.79	1.34	0.180	1055	1.0	83	304
33	1.90	3.866	3.79	1.34	0.179	1057	0.5	85	313
34	1.89	3.866	3.80	1.33	0.182	1069	0.69	77	307
40	1.80	3.848	3.80	1.25	0.171	1245	2.0	68	333
41	1.80	3.848	3.79	1.25	0.173	1242	1.5	79	252
42	1.80	3.848	3.79	1.25	0.173	1242	1.0	79	261
43	1.80	3.848	3.79	1.25	0.173	1242	0.5	79	264
44	1.79	3.848	3.80	1.24	0.179	1255	0.69	79	282

Tabla 9.1: Modelos calculados para **HD 205**, con atmósfera y sin rotación. La convección se ha tratado con **MLT** y con **FST**. La temperatura está dada en grados K, la gravedad superficial  $g$  en el sistema cgs, y la edad en millones de años.  $X_C$  representa la fracción de Hidrógeno en el centro. Se proporciona el valor de  $\alpha$  para cada uno de ellos; cuando es igual a 0.69, es porque ese modelo se ha calculado con **FST**.  $f_{min}$  y  $f_{max}$  muestran los límites inferior y superior del intervalo de inestabilidad ( $\mu\text{Hz}$ ).

**Caja de error:**

$$\log g = 3.80 - 3.60 \quad (\Delta \log g = {}_{-0}^{+0.20})$$

$$\log T_{ef} = 3.866 - 3.848 \quad (\Delta T_{ef} = \pm 150K)$$

## 9.2. Oscilaciones no adiabáticas sin rotación

### 9.2.1. Modelos

En este caso se trata de una estrella muy evolucionada (ver Fig. 9.1), ya cerca del punto de *turn-off*, por lo que no existe ningún modelo de la Secuencia Principal (SP) con valores de  $\log g$  menores que el observado. Esto indica que para una temperatura

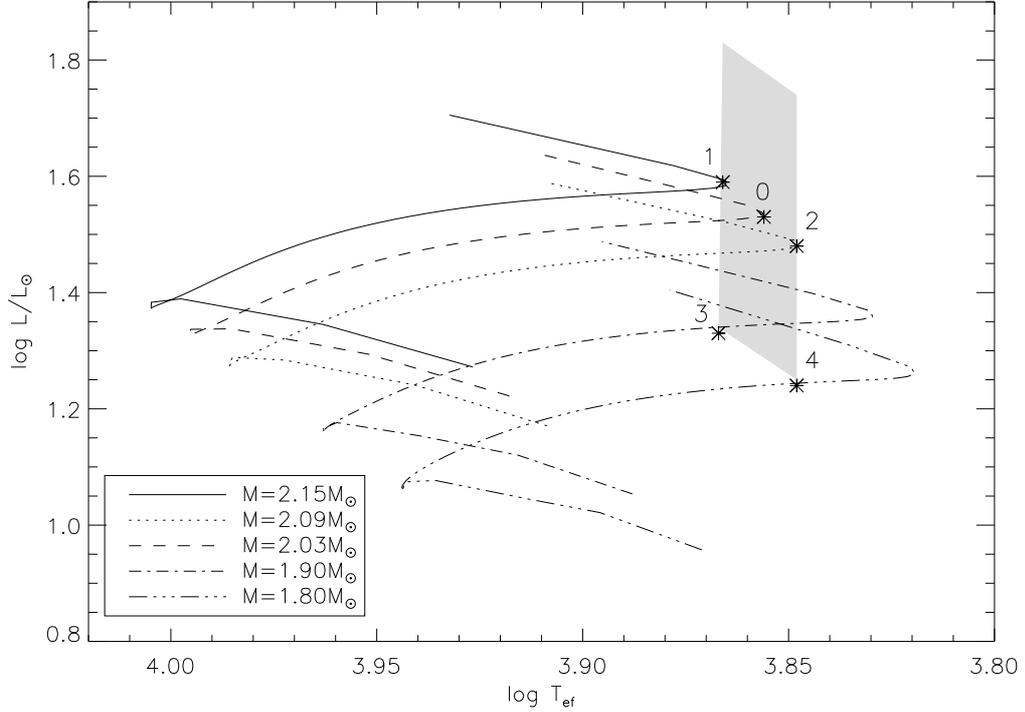


Figura 9.1: Diagrama HR de los modelos  $i0$  ( $\alpha = 2.0$ ), representados por asteriscos, con sus caminos evolutivos correspondientes, obtenidos sin rotación y con atmósfera. El rectángulo representa la caja de error.

efectiva en torno a los 7190 K, el menor valor posible de  $\log g$  para estrellas en la SP es de 3.60. Se podría haber optado por elegir modelos en la Post Secuencia Principal, pero dado que la evolución en esa zona es muy rápida, estadísticamente hay pocas probabilidades de observar una estrella en esa etapa. Así pues, en vez de tomar un tamaño estándar de la caja fotométrica ( $\Delta T_{ef} = \pm 150$ ,  $\Delta \log g = \pm 0.20$ ), se ha elegido una barra de error para la gravedad de:  $\Delta \log g = {}_{-0}^{+0.20}$ .

Al igual que se hizo para las dos estrellas anteriores, se han calculado cinco grupos de modelos, uno en el centro y los otros cuatro en las esquinas de la caja anteriormente explicada. No se ha incluido la rotación estelar, y para la convección se ha utilizado la **MLT**, con  $\alpha_{MLT} = 2.0, 1.5, 1.0$  y  $0.5$ , y la **FST**, con  $\alpha_{FST} = 0.69$ , con el objeto de comparar los resultados que se obtienen con ambos tratamientos. Se ha incluido el tratamiento de la atmósfera de dos maneras: para los modelos calculados con **MLT** se han utilizado los modelos de Kurucz (1993, 1998), y para los que incluyen **FST** se han empleado los de Kupka y Montgomery (2002), basada en Canuto y Mazzitelli (1991) y Canuto et al. (1996). En la tabla 9.1 se muestran los parámetros físicos de los modelos calculados. Los valores de  $f_{min}$  y  $f_{max}$  han sido obtenidos por interpolación del *growth rate*, obteniendo las soluciones para las cuales éste cambia de signo. En la Fig. 9.1 se muestra el diagrama HR de los modelos calculados con  $\alpha = 2.0$ , y los tracks evolutivos correspondientes.

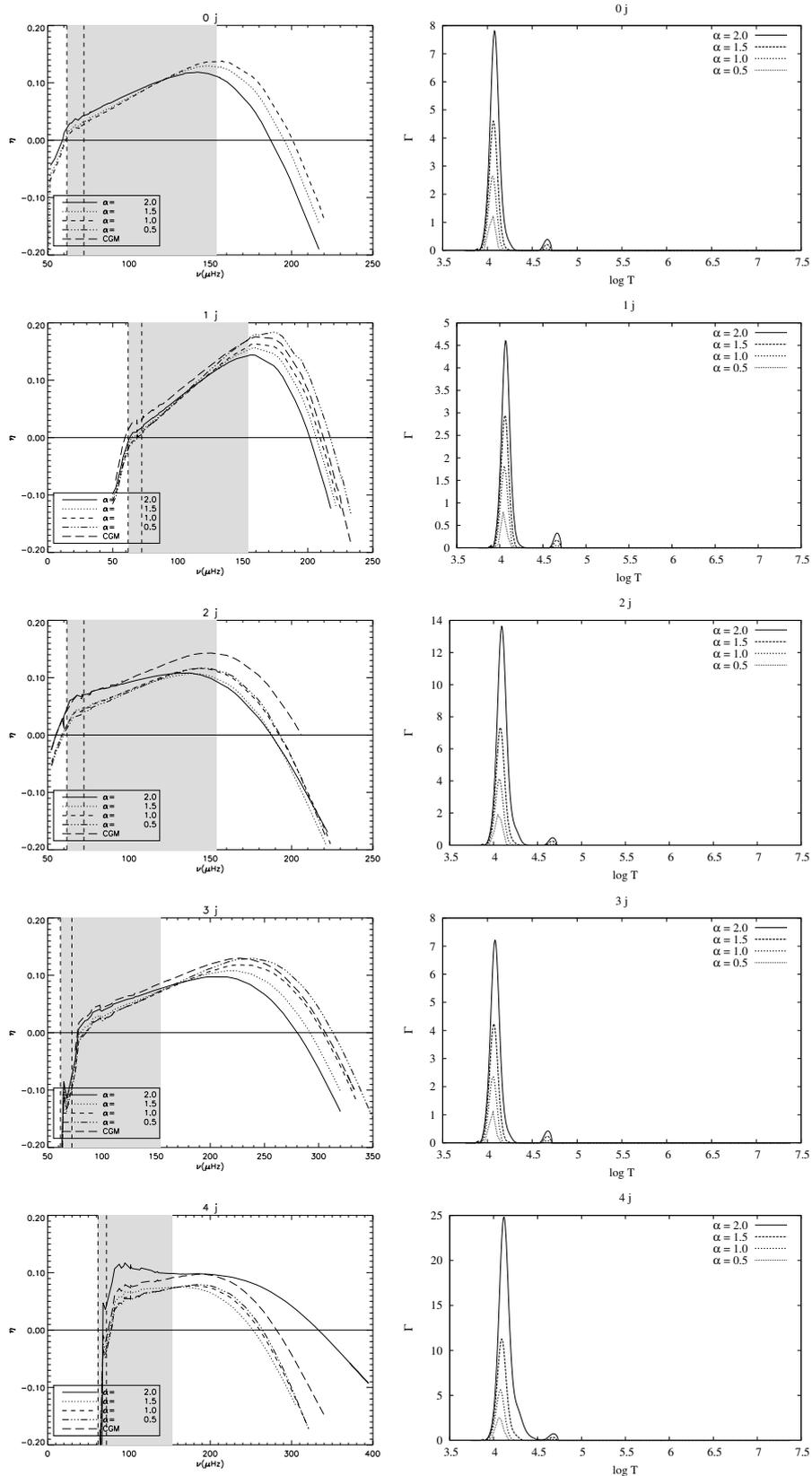


Figura 9.2: *Izquierda:* *growth rate* de cada modo frente a la frecuencia del mismo, para distintos valores de  $\alpha$ . En líneas verticales se muestran las dos frecuencias consideradas. La zona sombreada muestra el intervalo de frecuencias de los modos detectados observacionalmente. *Derecha:* Eficiencia convectiva, en función de  $\log T$ , de cada modelo.

	$\alpha$	$\Delta z/H_p$	%
00	2.0	0.84	0.25
01	1.5	0.74	0.21
02	1.0	0.69	0.18
03	0.5	0.64	0.17
10	2.0	0.80	0.22
11	1.5	0.74	0.20
12	1.0	0.73	0.19
13	0.5	0.64	0.16
20	2.0	0.98	0.33
21	1.5	0.75	0.22
22	1.0	0.66	0.18
23	0.5	0.62	0.17
30	2.0	0.86	0.22
31	1.5	0.77	0.18
32	1.0	0.73	0.16
33	0.5	0.67	0.14
40	2.0	1.88	1.10
41	1.5	0.84	0.23
42	1.0	0.69	0.17
43	0.5	0.64	0.15

Tabla 9.2: Valores de  $\alpha_{\max} = \Delta z/H_p$  y del tanto por ciento del radio estelar que ocupa la zona convectiva para cada uno de los modelos calculados (se incluyen sólo aquéllos para los que se ha utilizado **MLT**).

### 9.2.2. Rangos de frecuencias inestables

Empezamos el estudio de las propiedades pulsacionales con el análisis de los rangos de inestabilidad. En la Fig. 9.2 se muestra el *growth rate* frente a la frecuencia. La dependencia del límite inferior con el valor de  $\alpha$  es menor que la del límite superior, y mayor para los tres modelos más masivos ( $0j$ ,  $1j$  y  $2j$ ) que para los dos restantes.

Nótese que la frecuencia  $f_1$  se encuentra muy cerca del límite inferior de inestabilidad, y que incluso para los dos modelos menos masivos se predice que los modos observados han de ser estables. Para los modelos  $0j$  y  $1j$  se tiene que la frecuencia  $f_1$  se estabiliza para algunos valores de  $\alpha$ , y solamente para el modelo  $2j$  se predicen ambos inestables para todos los valores de este parámetro. Esto ya nos proporciona límites al rango de masas, temperaturas efectivas y luminosidades posibles de los modelos, de modo que podemos concluir que el tamaño de la caja de error en el diagrama HR ha de ser menor que el considerado aquí. En el estudio de la identificación de los modos descartaremos los modelos  $3j$  y  $4j$ , y nos quedaremos con los tres más masivos.

El rango de temperaturas utilizado abarca desde 7340 K hasta 7040 K. Al tratarse de un modelo evolucionado, la capa convectiva externa se ha reducido notablemente, como se observa en la Fig. 9.2, en las gráficas de la derecha. Ni en éstas ni en las correspondientes a los *growth rates* se observan variaciones significativas que nos

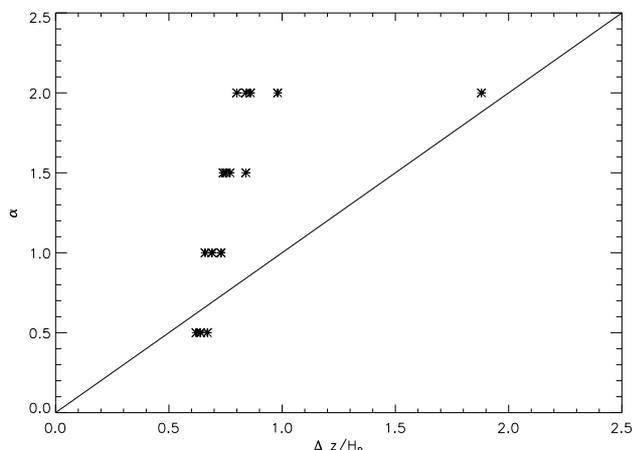


Figura 9.3: Valor de  $\alpha$  utilizado en el cálculo de los modelos, frente al tamaño de la zona convectiva más externa (en unidades de  $H_p$ ). La línea representa los puntos en los que  $\alpha = \Delta z/H_p$ .

permitan seleccionar el valor de  $\alpha$  más adecuado. Téngase en cuenta que aunque en algunos casos la frecuencia  $f_1$  pueda ser estable según el valor de este parámetro, este hecho tampoco es significativo a la hora de discriminar unos valores frente a otros, ya que los *growth rates* obtenidos son aproximados, y una pequeña variación en los mismos puede provocar que un modo se estabilice. Por otro lado, al estar las dos frecuencias observadas cerca de los límites inferiores, los superiores no proporcionan información adicional que pueda restringir el rango de valores de  $\alpha$ .

En la tabla 9.2 se muestra para cada modelo el valor de  $\alpha$ , la extensión de la zona convectiva en unidades de escalas de presión ( $\Delta z/H_p$ ) y el porcentaje de radio que ocupa dicha zona.  $\Delta z/H_p$ , como ya sabemos, constituye un límite superior para  $\alpha$ . Hemos utilizado el valor de la escala de presiones en la base de la zona convectiva, mientras que  $\Delta z$  es la extensión de dicha zona ( $\Gamma \neq 0$ ). Puede observarse que para los modelos  $0j$ ,  $1j$  y  $2j$ , las diferencias existentes en el valor de  $\Delta z/H_p$  son significativas únicamente entre los casos  $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0$  y el resto, encontrándose diferencias de un 17% como máximo entre  $\alpha_{\text{MLT}} = 1.5$  y  $\alpha_{\text{MLT}} = 0.5$ . Aún así, podemos tener en cuenta que para que la teoría **MLT** sea válida, ha de verificarse que  $\alpha_{\text{MLT}} \ll \Delta z/H_p$ , como ya sabemos, lo que nos permitiría, ahora sí, seleccionar algunos valores de  $\alpha_{\text{MLT}}$ . En la gráfica 9.3 se representa  $\alpha_{\text{MLT}}$  frente a  $\Delta z/H_p$ . En aquellos casos en los que los modelos se encuentren por debajo de la recta de pendiente unidad, se habrá aplicado la **MLT** coherentemente. Vemos que esto ocurre solamente para los casos en los que se utilizó  $\alpha_{\text{MLT}} = 0.5$ , al igual que ya ocurría para las otras estrellas.

Con respecto a los modelos obtenidos utilizando **FST**, podemos destacar que no se aprecian diferencias significativas en los rangos de inestabilidad que permitan rechazar o aceptar este tratamiento, al menos para el valor de  $\alpha_{\text{FST}}$  utilizado. Únicamente podemos decir que en principio parece que éste, que se corresponde con el valor solar, es excesivo para estrellas con temperaturas efectivas como las que se tratan aquí, aunque no podemos tampoco descartar este tratamiento a la vista del estudio pulsacional desarrollado.

### 9.2.3. Observables no adiabáticos

En la Fig. 9.4 mostramos los valores de los observables no adiabáticos  $f_T$  y  $\Psi_T$  de los modelos correspondientes a los grupos  $0j$ ,  $1j$  y  $2j$ . Vamos a realizar un análisis de estos resultados.

- $f_T$

En primer lugar hay que tener en cuenta que los valores obtenidos podrían verse modificados de haber tenido en cuenta la interacción de la convección con la pulsación, dado el rango de temperaturas de los modelos (Grigahcène et al., 2005; Dupret et al., 2005b). Puede observarse que para cada modelo el valor de  $f_T$  para un mismo modo disminuye conforme aumenta el valor de  $\alpha$ , comportamiento ya conocido de estudios anteriores. Asimismo, se encuentra que para cada modelo el valor de este observable se mantiene prácticamente constante, experimentando un brusco aumento hacia periodos pequeños. Por otro lado, los valores obtenidos con **FST** se encuentran entre los correspondientes a  $\alpha_{\text{MLT}} = 1.5$  y  $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0$ , como se esperaba. Por lo demás, no se observan inconsistencias por el hecho de utilizar este tratamiento.

Podemos concluir, pues, que no tenemos efectos nuevos a los ya encontrados hasta aquí, a pesar de haber explorado distintos valores de temperaturas efectivas, luminosidades, masas y estadios evolutivos.

- $\Psi_T$

El *phase lag* difiere significativamente del valor adiabático,  $180^\circ$ , para el modo fundamental radial, en todos los modelos y para todos los valores de  $\alpha$ , encontrándose asimismo diferencias significativas según la temperatura de la estrella. Puede observarse que  $\Psi_T$  aumenta conforme disminuye  $\alpha_{\text{MLT}}$ , como ya se conocía, no superándose nunca los  $150^\circ$  para el modo fundamental radial. Estos resultados seleccionan valores de  $\alpha_{\text{MLT}}$  inferiores a 1.0, ya que los valores obtenidos para  $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0$  y 1.5 parecen ser excesivamente bajos, lo cual indicaría de nuevo que estos modelos no son físicamente realistas.

Los valores obtenidos con el tratamiento **FST** de la convección son extraordinariamente bajos, en algunos casos menores que los que se consiguen con  $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0$ . Esto permite concluir que se obtienen peores resultados con esta teoría que con la **MLT**, al menos para  $\alpha_{\text{FST}} = 0.69$ .

### 9.2.4. Variación de los observables no adiabáticos a lo largo de la evolución estelar

En esta sección estudiamos cómo varían los observables no adiabáticos para el modo fundamental radial a lo largo de la evolución de los modelos. Para ello hemos obtenido los caminos evolutivos completos de los cinco modelos utilizados hasta ahora, desde la **ZAMS** hasta el momento en que se agota el Hidrógeno del núcleo. Los cálculos han sido llevados a cabo de dos formas distintas: usando la **MLT** con  $\alpha_{\text{MLT}} = 1.0$ , y la **FST**, aunque en este último caso no ha podido obtenerse el modelo **14** debido a problemas de convergencia numérica.

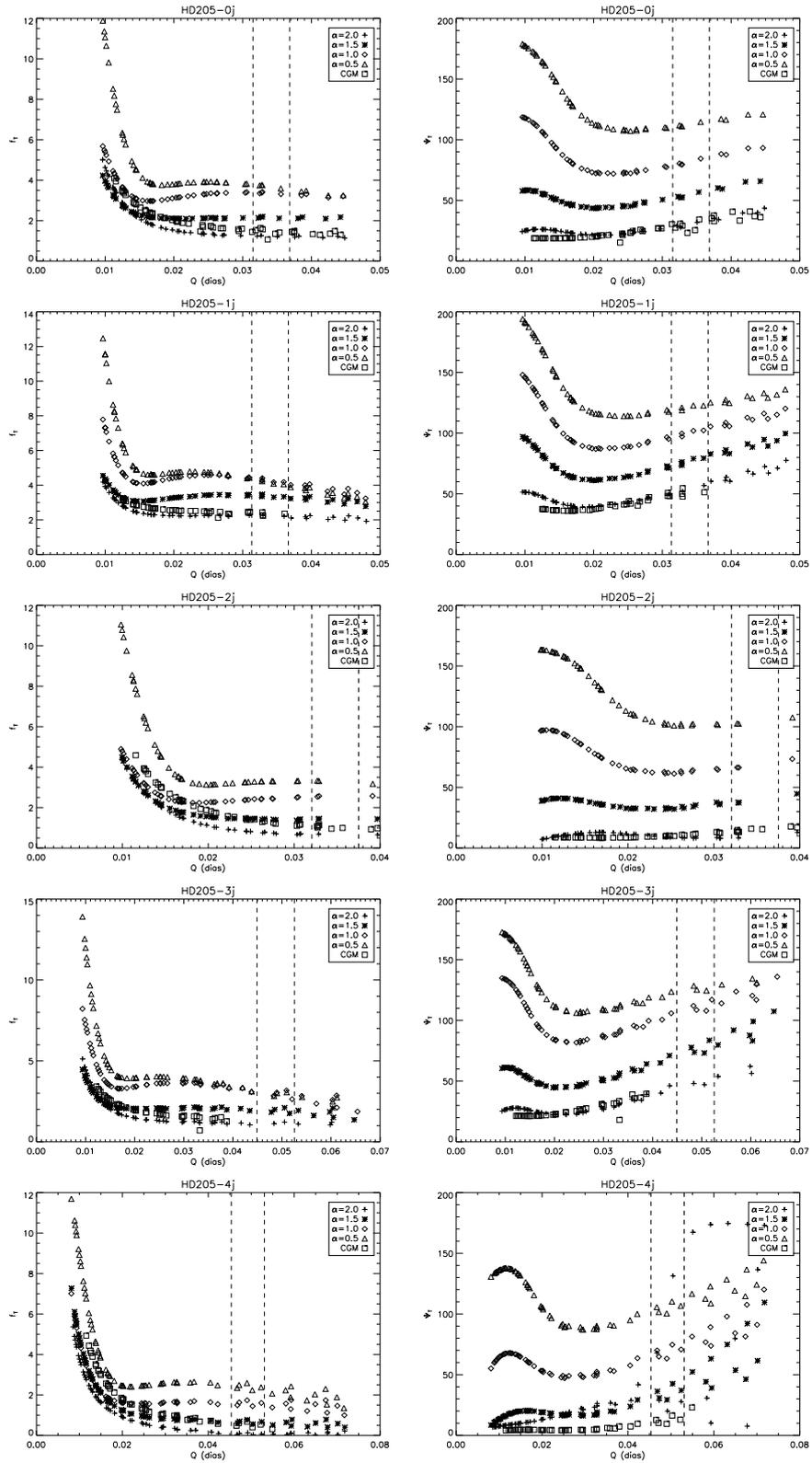


Figura 9.4: Observables no adiabáticos de los distintos modelos obtenidos para la estrella **HD 205**, en función de la constante de pulsación,  $Q$ . A la izquierda se muestra  $f_T$  y a la derecha el desfase,  $\Psi_T$ . Los valores asociados a los modos observados se muestran mediante líneas verticales.

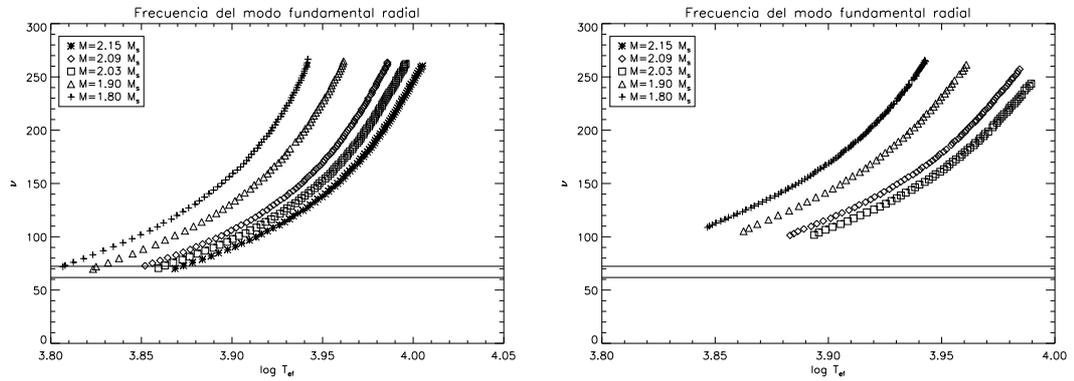


Figura 9.5: Frecuencia del modo fundamental radial a lo largo de la evolución de los distintos modelos. *Izquierda*: modelos calculados con **MLT** y  $\alpha_{\text{MLT}} = 1.0$ . *Derecha*: modelos calculados con **FST**. Las líneas horizontales muestran las frecuencias  $f_1$  y  $f_2$  observadas.

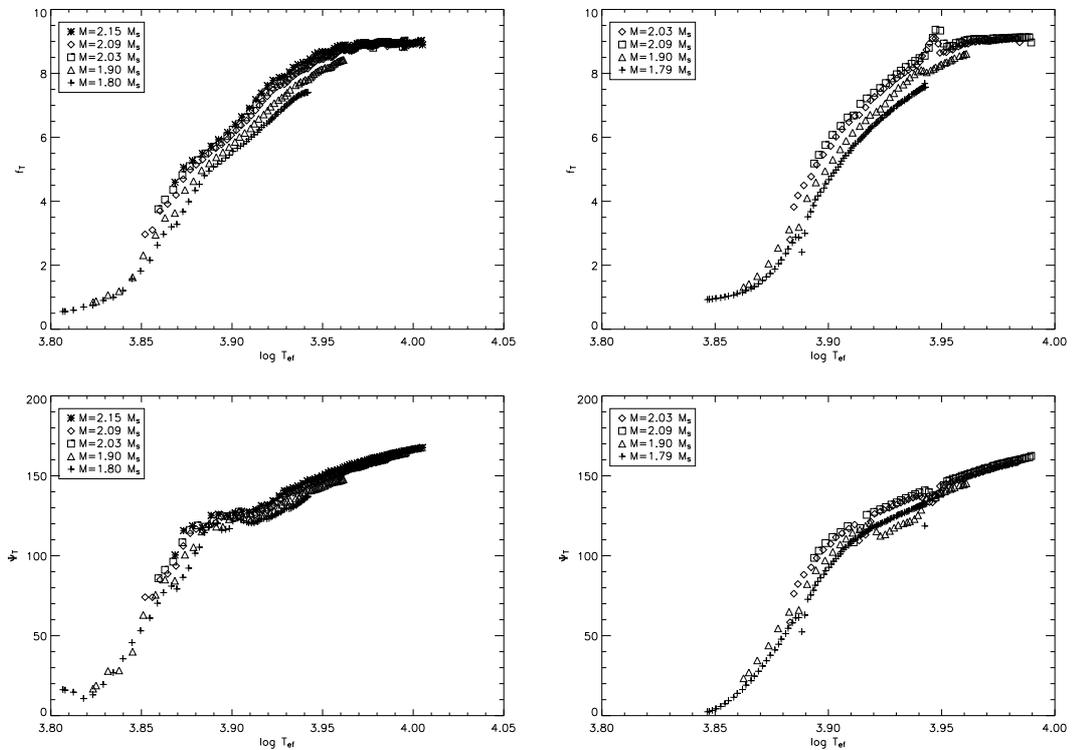


Figura 9.6: Observables no adiabáticos para el modo fundamental radial a lo largo de la evolución, para los distintos modelos. Las gráficas de la izquierda muestran los valores obtenidos con **MLT** y  $\alpha_{\text{MLT}} = 1.0$ , mientras que para las de la derecha se ha utilizado **FST**. En las gráficas superiores se representa  $f_T$ , y en las inferiores  $\Psi_T$ .

En la Fig. 9.5 se muestra la evolución de la frecuencia del modo fundamental radial en cada uno de los modelos, evolucionados con **MLT** (izquierda) y **FST** (derecha). Se puede observar que la frecuencia disminuye para todos los casos conforme evoluciona la estrella (sentido de temperaturas decrecientes) como consecuencia de la variación de la densidad media. Obsérvese que en el primer caso (**MLT**), el modo fundamental radial es compatible con la frecuencia observada  $f_2$  solamente en esta-

dios evolutivos tardíos, mientras que no lo es en ninguno de los modelos calculados con **FST**.

En la Fig. 9.6 se muestra la evolución de  $f_T$  y  $\Psi_T$  a lo largo de la vida de la estrella. Puede comprobarse que  $f_T$  disminuye conforme lo hace la temperatura efectiva, manteniéndose aproximadamente constante por encima de  $\log T_{ef} \approx 3.94$  y por debajo de  $\log T_{ef} \approx 3.84$  (temperaturas algo mayores en el caso de la **FST**). El comportamiento de  $\Psi_T$  es similar, aunque algo más complicado, que el de  $f_T$ .

Como ya sabemos,  $\Psi_T$  deja de depender de la masa del modelo y del valor de  $\alpha_{\text{MLT}}$  para temperaturas elevadas. Por debajo de aproximadamente  $\log T_{ef} \approx 3.92$  la opacidad permite un intercambio de calor lo suficientemente eficiente como para introducir un desfase significativo, por lo que las curvas se separan. En esta figura puede apreciarse que las curvas presentan cierta dependencia con el modelo (en el caso de la **MLT**) por debajo de  $\log T_{ef} \approx 3.88$ , para volver a unirse por debajo de  $\log T_{ef} \approx 3.85$ . Para los modelos obtenidos con **FST** las temperaturas son algo mayores,  $\log T_{ef} \approx 3.95$  y  $\log T_{ef} \approx 3.88$ , respectivamente. Por otra parte, también  $f_T$  parece mostrar dependencia del modelo y del valor de  $\alpha$  en los intervalos de temperaturas anteriores.

En este caso los comportamientos de los dos observables son similares a los encontrados para **RV Ari** y **29 Cyg**, aunque el intervalo donde muestran dependencia con el modelo y el valor de la longitud de mezcla se desplaza hacia temperaturas algo inferiores en el caso de la **MLT**.

### 9.2.5. Comportamiento general de los observables no adiabáticos

Una vez reunidos los datos acerca del comportamiento de los observables no adiabáticos para las tres estrellas estudiadas en este trabajo, podemos extraer algunas conclusiones que pasamos a detallar:

- $f_T$

Para todos los valores de la masa y la temperatura efectiva, y todos los estados evolutivos considerados, se observa que para cada modelo el valor de  $f_T$  es prácticamente constante a lo largo del espectro de pulsación, aumentando bruscamente en la zona de periodos menores. Además, es independiente del valor de  $\ell$ , salvo para los modos **g**. Por otro lado, este observable varía según el valor del parámetro  $\alpha$  que se utilice en el modelo de estructura. En concreto, conforme  $\alpha$  aumenta,  $f_T$  disminuye. Esta dependencia es mayor para las estrellas más frías, mientras que para las más calientes las diferencias son despreciables. De hecho, en cada caso se ha encontrado que los modelos más fríos y menos masivos son los más sensibles al valor de este parámetro.

Por otro lado, al estudiar la evolución del valor de  $f_T$  para el modelo fundamental radial a lo largo de la vida de la estrella, se obtiene en primer lugar que conforme aumenta la masa,  $f_T$  también lo hace. No obstante, esta dependencia es muy pequeña para modelos calientes ( $\log T_{ef} \gtrsim 3.94$ ), y fríos ( $\log T_{ef} \lesssim 3.82$ ). Para temperaturas intermedias, los valores de este observable varía con la masa y el valor de  $\alpha$ . Por último, hay que notar que  $f_T$  disminuye conforme la estrella evoluciona (esto es, la temperatura efectiva disminuye).

Estas conclusiones son las mismas para las distintas estrellas, a pesar de sus diferencias en temperatura efectiva, masa y estadio evolutivo.

#### ■ $\Psi_T$

En este caso se observa para todos los modelos calculados que el valor de  $\Psi_T$  del modo fundamental radial es bastante menor que el adiabático. Además, para todo el espectro de pulsación aumenta conforme disminuye el parámetro  $\alpha$ , siendo prácticamente independiente del valor de  $\ell$ . La única excepción a lo anterior la encontramos en los modos con periodos altos, en los que influye significativamente la parte transversal de la onda, dependiente de  $\ell$ . Para valores elevados de la temperatura efectiva,  $\Psi_T$  se sitúa por encima de los  $150^\circ$  para prácticamente todo el espectro de pulsación.

Se ha estudiado también la evolución de este observable en el caso del modo fundamental radial. Se observa que cuando  $\log T_{ef}$  está por encima de 3.94 aproximadamente, o por debajo de 3.82 (usando la teoría **MLT**),  $\Psi_T$  es prácticamente independiente de la masa. En el intervalo  $3.82 \lesssim \log T_{ef} \lesssim 3.94$  aumenta con ésta. En este aspecto, el comportamiento es similar al encontrado para  $f_T$ . Asimismo, para  $\log T_{ef} \lesssim 3.82$  y  $\log T_{ef} \gtrsim 3.94$  es prácticamente constante. Sabemos que la disminución de  $\Psi_T$  por debajo de esta temperatura se debe al mayor intercambio de calor producido por el aumento de la opacidad, que introduce un desfase adicional. Se ha obtenido que, al igual que para  $f_T$ ,  $\Psi_T$  disminuye conforme la estrella evoluciona (al menos para el modo fundamental radial).

En aquellos casos en los que se ha utilizado la **FST** se han obtenido las mismas conclusiones en general, observándose pequeñas diferencias en los valores de la temperatura en los que se producen los cambios de comportamiento.

## 9.3. Identificación de los modos

### 9.3.1. Fotometría Strömgren

Una vez que se tienen los observables no adiabáticos, se puede obtener la variación de los índices de color para distintos filtros de la fotometría Strömgren, con el objeto de comparar con los resultados experimentales. Para ello se ha utilizado el código descrito en la Sec. 7.3.1. Como ya se mencionó en la Sec. 9.2.2, descartamos en este estudio los modelos  $3j$  y  $4j$ , ya que predicen que los modos con frecuencias observadas son estables.

En los modelos calculados con **MLT** se ha utilizado  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 1.25$  y  $0.5$ , y en los modelos evolucionados con **FST**,  $\alpha_{\text{FST}} = 0.69$ . No se ha tenido en cuenta la rotación de la estrella ni los posibles acoplamientos de los modos (ver Sec. 9.4). Las frecuencias estudiadas son las más cercanas a las observadas, dentro de un rango de un 5% en torno a cada una de ellas.

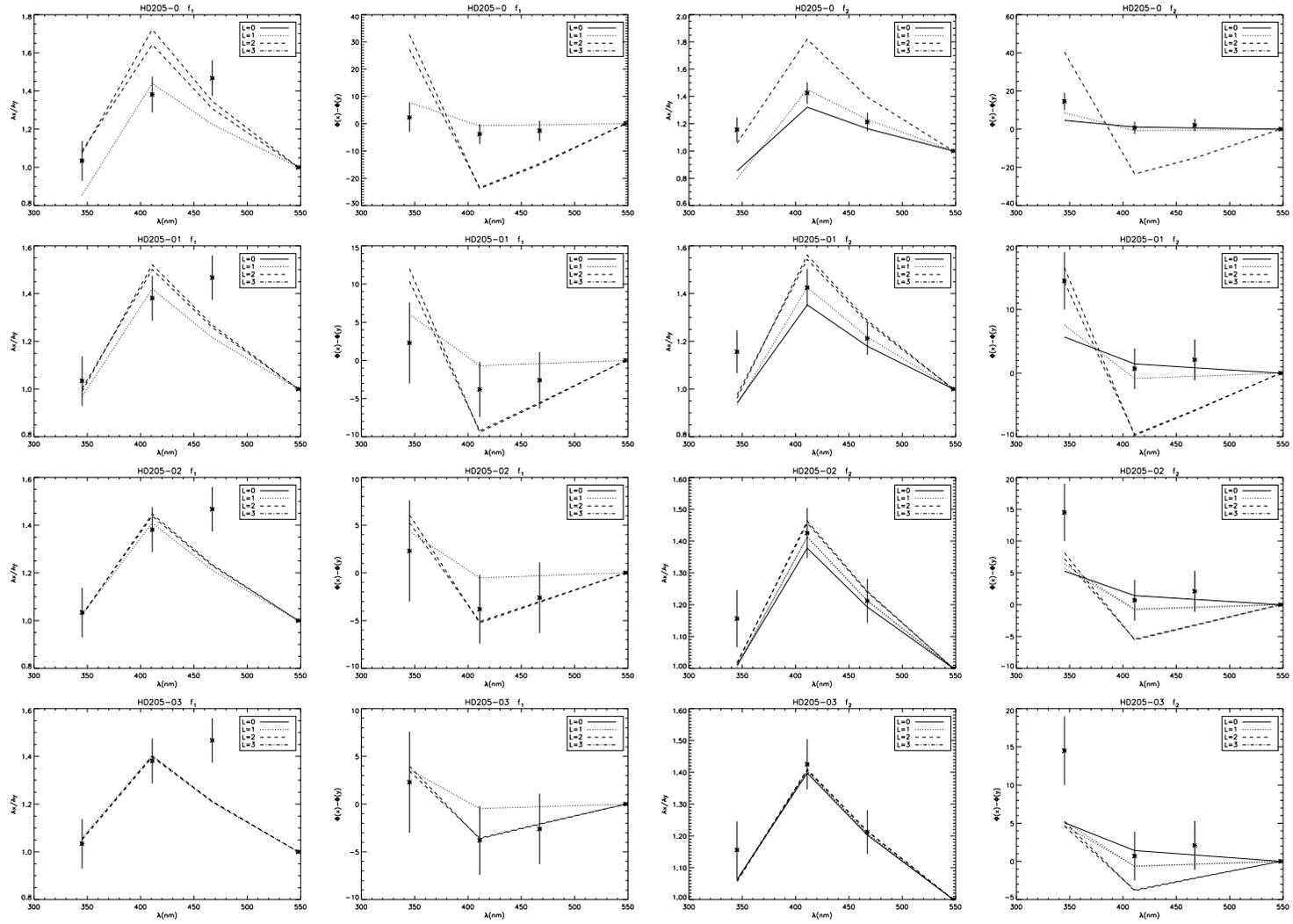


Figura 9.7: Cociente de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para las dos frecuencias. Grupo de modelos  $0j$ , obtenidos usando **MLT**. En orden descendente:  $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0$  y  $0.5$ .

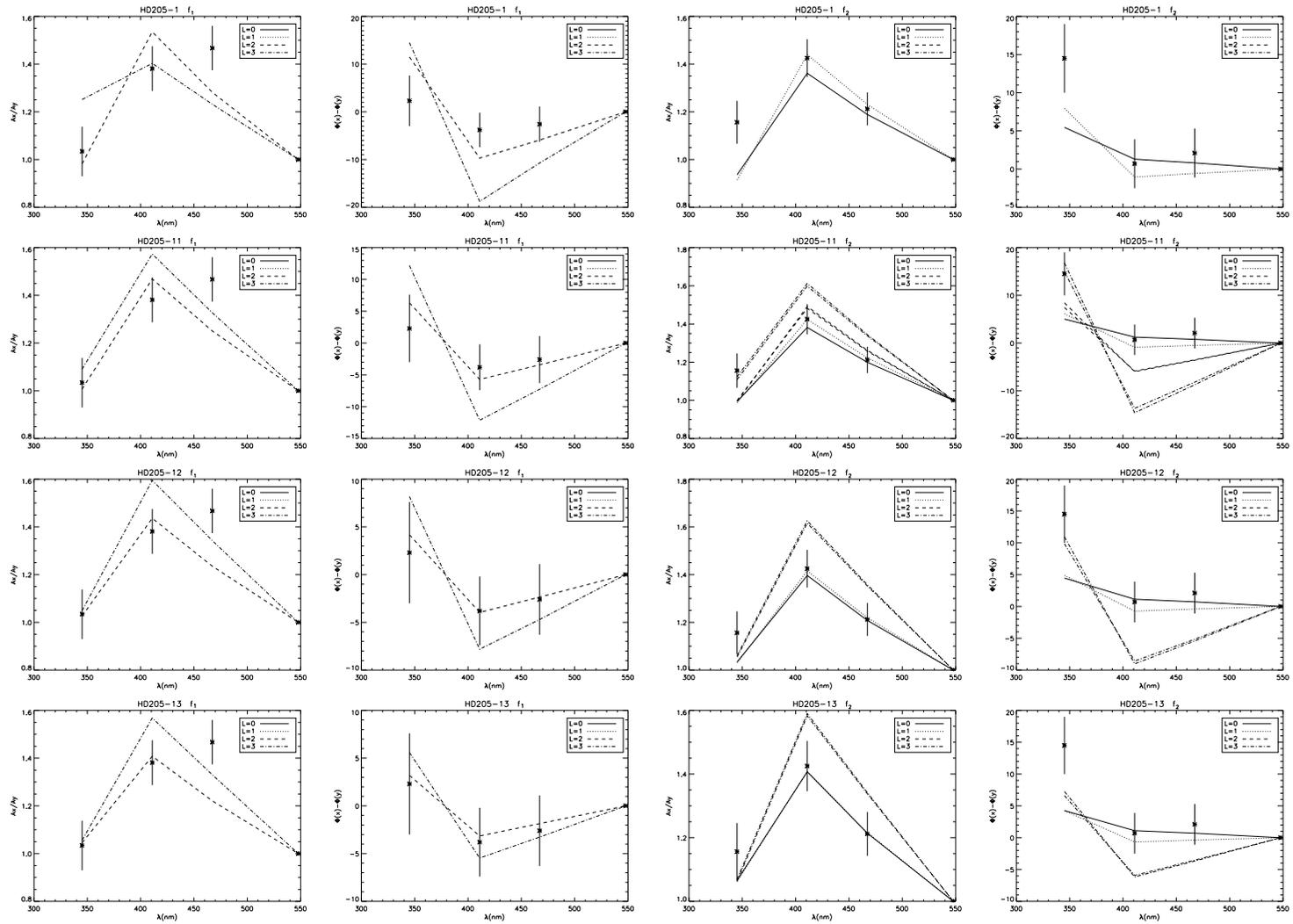


Figura 9.8: Cociente de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para las dos frecuencias. Grupo de modelos  $1j$  obtenidos usando **MLT**. En orden descendente:  $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0$  y  $0.5$ .

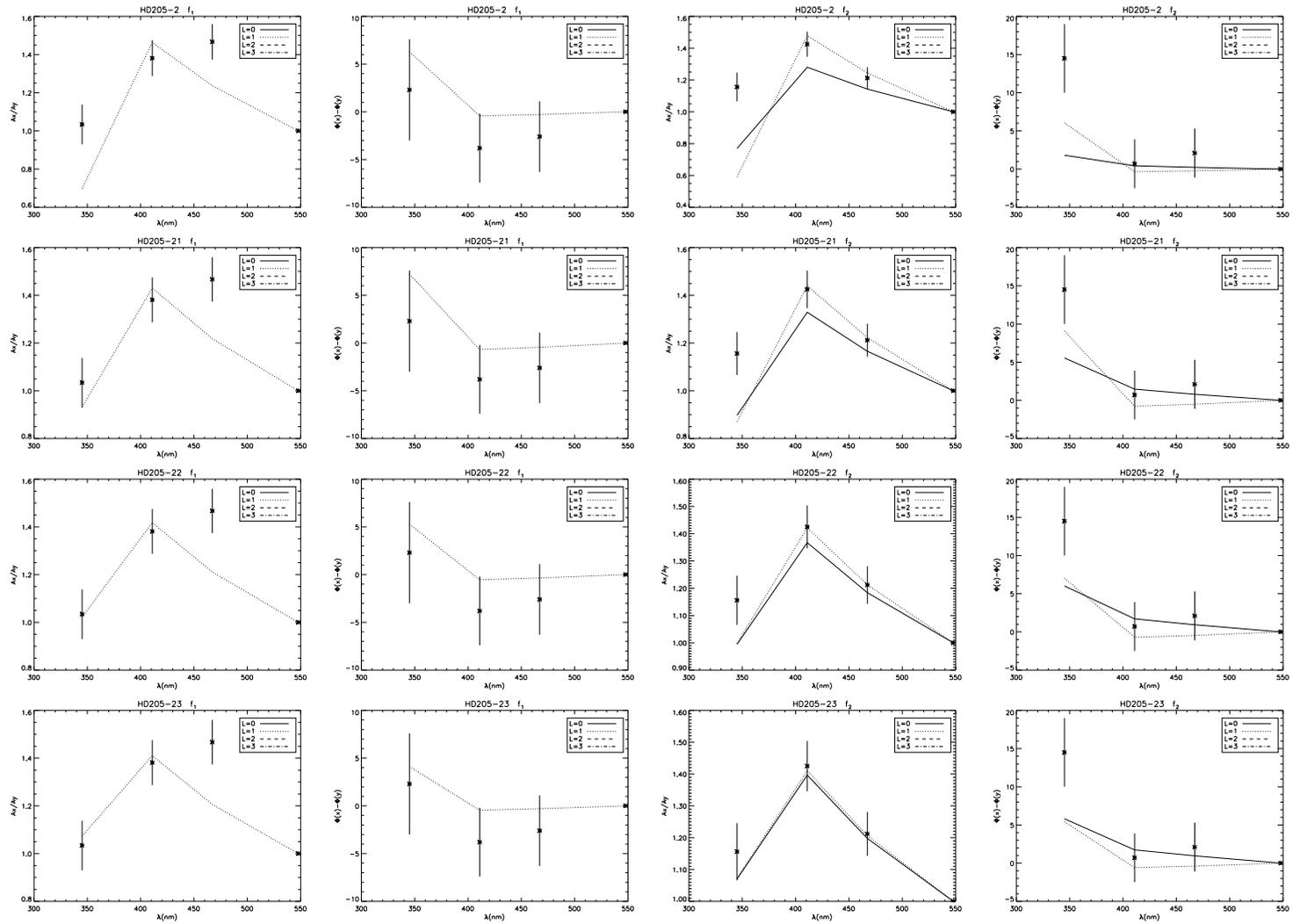


Figura 9.9: Cociente de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para las dos frecuencias. Grupo de modelos  $2j$  obtenidos usando **MLT**. En orden descendente:  $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0$  y  $0.5$ .

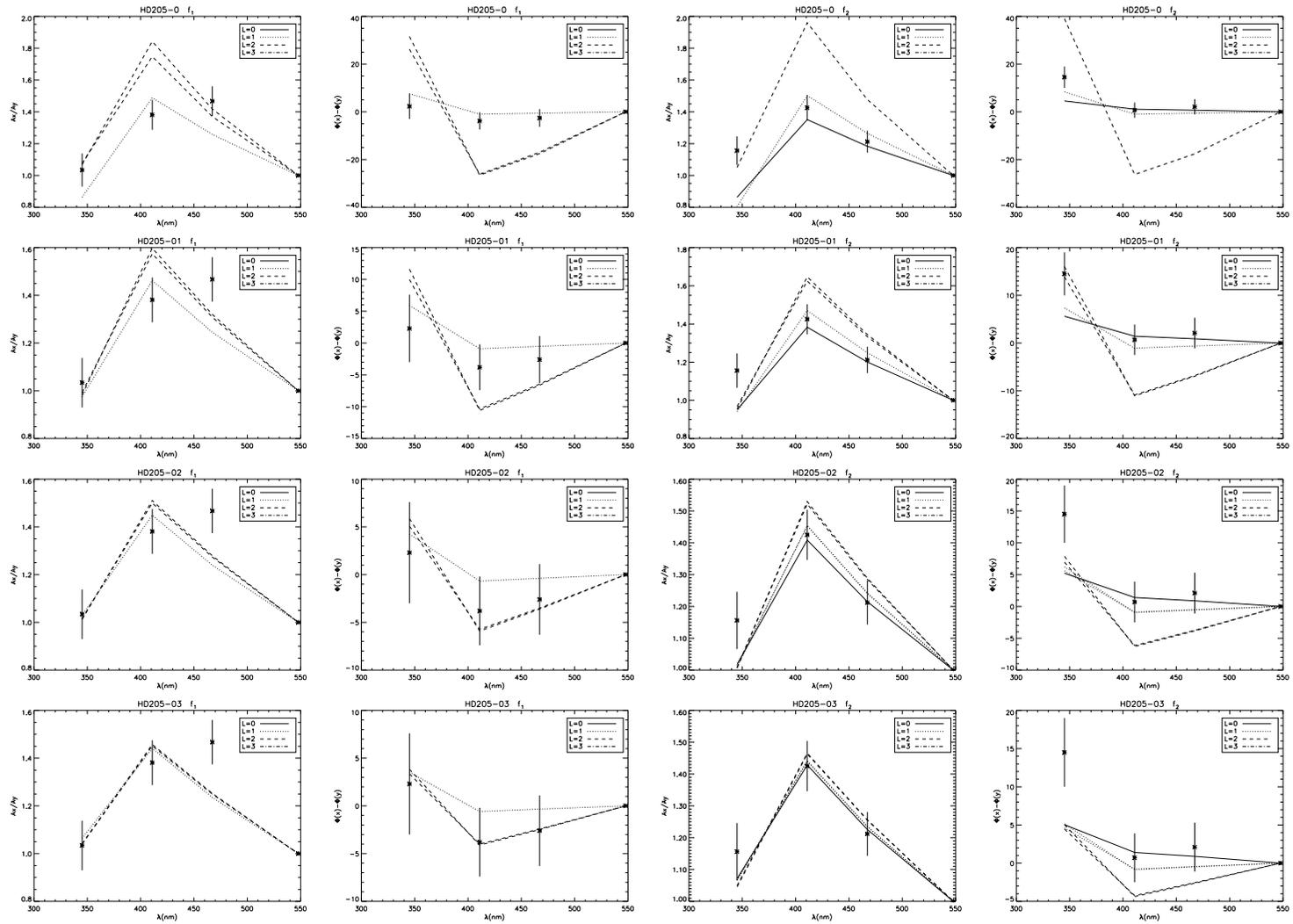


Figura 9.10: Cociente de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para las dos frecuencias, usando **MLT** y  $\alpha = 0.5$  en la atmósfera. Modelos 0j. *Izquierda*: Frecuencia  $f_1$ , *derecha*: frecuencia  $f_2$ . En orden descendente:  $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0, 0.5$ .

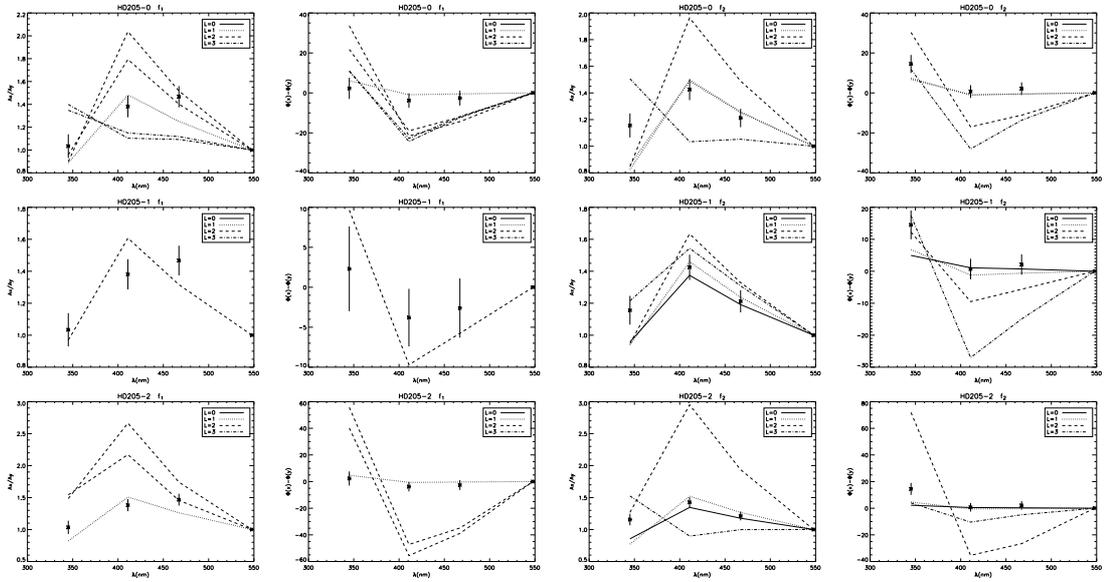


Figura 9.11: Cociente de amplitudes  $A_{u,v,b,y}/A_y$  y diferencias de fase  $\phi_{u,v,b,y} - \phi_y$  para todos los modelos obtenidos usando **FST**. En cada línea se muestra el cociente de amplitudes y la diferencia de fases para  $f_1$ , y a continuación, lo mismo para  $f_2$ .

### ■ Modelos $0j$

Para este grupo de modelos se se puede identificar  $f_1$  con un modo no radial, en concreto el  $(-5, 1)$ , por lo que se trataría de un modo **g** o mixto. Para  $\alpha_{\text{MLT}} \leq 1.0$  hay dos modos  $\ell = 2$  posibles:  $(-9, 2)$  y  $(-8, 2)$ . No obstante, en nuestros modelos, para  $\alpha_{\text{MLT}} \leq 1.5$  se predice que tanto  $(-5, 1)$  como  $(-9, 2)$  son estables. Hay que tener en cuenta que los cálculos de las integrales de la energía son aproximados, y que no tienen en cuenta ni la interacción de la pulsación con la atmósfera ni con la convección, por lo que habría que realizar un análisis más refinado, con el objeto de obtener resultados concluyentes (Grigahcène et al., 2004; Dupret et al., 2004, 2005b).

La segunda frecuencia parece corresponderse con un modo radial, en concreto el fundamental, o con un  $\ell = 1$ . Para  $\alpha_{\text{MLT}} \leq 1.0$  aumentan algo las posibilidades, teniendo un total de tres modos. En la tabla 9.3 se resumen los resultados obtenidos para todos los modelos.

### ■ Modelos $1j$

Recordemos que este modelo se diferencia del anterior en la temperatura efectiva (y por tanto, en la masa), aunque la gravedad sea la misma (y por tanto la luminosidad). En este caso la frecuencia  $f_1$  se corresponde con un  $\ell = 2$  únicamente, por lo que la identificación es unívoca. Este modo se predice estable para  $\alpha_{\text{MLT}} > 0.5$ , aunque muy cerca del límite inferior de inestabilidad, por lo que este resultado no es definitivo. Para  $f_2$  hay dos posibilidades:  $\ell = 0$  y  $\ell = 1$ . Vemos, pues, que la identificación para este grupo de modelos es similar a la obtenida con los  $0j$ , posiblemente como consecuencia de las similitudes entre ambos.

	$\alpha$	$f_1$	$f_2$
00	2.0	-	(-3,1)
01	1.5	(-5,1)	(1,0) (-3,1)
02	1.0	(-5,1) (-9,2) (-8,2)	(1,0) (-4,1) (-3,1)
03	0.5	(-5,1) (-9,2) (-8,2)	(1,0) (-4,1) (-3,1)
04	<b>FST</b>	(-5,1)	(-3,1) (-2,1)
10	2.0	-	(1,0) (-3,1)
11	1.5	(-8,2)	(1,0) (-3,1)
12	1.0	(-8,2)	(1,0) (-3,1)
13	0.5	(-8,2)	(1,0) (-3,1)
14	<b>FST</b>	-	(1,0) (-3,1)
20	2.0	-	(-3,1)
21	1.5	(-5,1)	(-3,1)
22	1.0	(-5,1)	(1,0) (-3,1)
23	0.5	(-5,1)	(1,0) (-3,1)
24	<b>FST</b>	-	(1,0) (-3,1)

Tabla 9.3: Identificación de los modos para las dos frecuencias de todos los modelos. Para los modelos calculados con **MLT** se ha utilizado  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 1.25$ , mientras que para los obtenidos con **FST** se ha empleado  $\alpha_{\text{FST, atm}} = 0.69$ . Los pares  $(n, \ell)$  indican los valores del orden radial y del grado angular, en ese orden.

■ **Modelos  $2j$**

En este grupo de modelos la frecuencia  $f_1$  se puede asociar con el  $(-5, 1)$ , el cual se predice inestable para  $\alpha_{\text{MLT}} > 0.5$ . Para la frecuencia  $f_2$  se tienen dos posibilidades:  $(1, 0)$  y  $(-3, 1)$ , que ya han aparecido anteriormente.

Tenemos por tanto dos posibilidades para  $f_1$ , los modos  $(-5, 1)$  y  $(-8, 2)$ , mientras que para  $f_2$  obtenemos  $(1, 0)$  y  $(-3, 1)$ . Los resultados han sido muy parecidos para los tres grupos de modelos. El mayor problema lo constituye el análisis de la estabilidad de los candidatos para la primera frecuencia, ya que nos encontramos justamente en el límite en el que las pulsaciones empiezan a ser inestables.

Hemos de notar que la asignación del orden de los modos para estrellas evolucionadas, con gran densidad de modos, y precisamente para modos mixtos, es muy difícil. De hecho, no hay ningún sistema que permita la asignación del valor de  $n$  de forma infalible. Por eso, los valores de  $n$  que aquí se han mostrado son provisionales, y haría falta un sistema más eficaz que el disponible hasta ahora. Sin embargo, hay que indicar que éste no es un problema de nuestro código, sino de la teoría de las oscilaciones estelares en general.

Además, hay que determinar si  $f_1$  se corresponde con un modo **g** o con uno mixto. Existen varias formas de verlo. Sin embargo, la que proporciona resultados más claros consiste en estudiar la localización de los nodos y el tanto por ciento de energía de excitación que recibe en cada zona de propagación (P ó G), tal y como se describe en Dziembowski y Krolikowska (1990). El modo que estamos estudiando tiene todos sus nodos en la zona G, y además presenta un valor de  $E_G/E$  igual a la unidad, lo que indica que recibe toda la energía de excitación en la zona G. Por tanto, podemos concluir que se trata de un modo **g** puro.

$\alpha$ interior	$\alpha$ atm.	$\delta v$	$\gamma_v$	$\delta b$	$\gamma_b$	$f_T$	$\Psi_T$
2.0	1.25	7.494	2.556	6.463	2.400	1.267	28.391
1.5	1.25	12.910	2.558	11.135	2.401	2.184	52.365
1.0	1.25	20.186	2.560	17.417	2.402	3.417	79.533
0.5	1.25	22.191	2.560	19.146	2.402	3.757	110.88
2.0	0.5	7.578	2.604	6.516	2.412	1.267	28.392
1.5	0.5	13.055	2.606	11.227	2.414	2.184	52.365
1.0	0.5	20.415	2.608	17.559	2.416	3.417	79.533
0.5	0.5	22.443	2.608	19.303	2.416	3.757	110.88
FST	FST	9.302	2.619	7.987	2.407	1.561	29.003

Tabla 9.4: Valores de las distintas variables que intervienen en la fórmula de Watson, en función del tratamiento de la convección y del valor de  $\alpha$  utilizado en el interior y en la atmósfera estelar. Modelos  $0j$ .

Veamos ahora cómo cambia la identificación de los modos cuando se utiliza la **FST** como teoría de la convección. En la Fig. 9.11 pueden encontrarse algunas diferencias con respecto a los diagramas correspondientes a los modelos calculados con **MLT**, en concreto se han modificado ligeramente algunas frecuencias. Por otro lado, no es posible asignar ningún modo a  $f_1$  para los grupos  $1j$  y  $2j$ . De hecho, como puede observarse en la tabla 9.3, para casi ninguno de los modelos con  $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0$  y **FST** se obtiene un candidato adecuado. Esto parece indicar que el valor de  $\alpha_{\text{MLT}}$  debe ser inferior a 1.5. Para  $f_2$  se tiene  $\ell = 0$  y  $\ell = 1$ , siendo los resultados mucho más parecidos a los obtenidos con **MLT**.

Como ya se hizo para las estrellas anteriores, se han comparado estos resultados con los que se obtienen con  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 0.5$ . Nos hemos centrado en el modelo central y el modo fundamental radial (comparamos con  $f_2$ ). Se han obtenido los valores de  $\delta x$  y  $\gamma_x$  para los filtros **v** y **b**, así como los de  $f_T$  y  $\Psi_T$ . Se han utilizado los modelos calculados con **MLT** ( $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0, 0.5$  y  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 1.25$  y  $0.5$ ), y con **FST**, ( $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 0.69$ ). Los resultados se muestran en la tabla 9.4.

Puede observarse que los valores de  $\gamma_v$  y  $\gamma_b$  no se modifican sustancialmente, debido a que dependen sobre todo (ver secciones 7.3.1 y 8.3.1) de aspectos geométricos. Sin embargo, para  $\delta v$  y  $\delta b$  se aprecian variaciones importantes, incrementándose su valor conforme disminuye  $\alpha$ , siendo además las diferencias entre los casos  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 1.25$  y  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 0.5$  pequeñas. Por otra parte, los valores obtenidos con **FST** se sitúan entre los correspondientes a  $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0$  y  $\alpha_{\text{MLT}} = 1.5$  en el interior estelar. Las diferencias entre **MLT** (tanto para  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 1.25$  como para  $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 0.5$ ) y **FST** estriba en los distintos valores que toman  $f_T$  y  $\Psi_T$  en ambos casos, a pesar de que las derivadas del flujo y de los coeficientes de "limb-darkening" sean muy parecidas en estos dos tratamientos (Heiter et al., 2002; Barban et al., 2003). Hasta aquí no se encuentran comportamientos diferentes a los de las estrellas **RV Ari** y **29 Cyg**.

Con respecto a la identificación de los modos, podemos comprobar, comparando las Figs. 9.7 ( $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 1.25$ ) y 9.10 ( $\alpha_{\text{MLT, atm}} = 0.5$ ), que las predicciones no varían significativamente. Para la frecuencia  $f_1$ , los modos  $\ell = 1$  y  $\ell = 2$  ya estudiados parecen predecir valores ligeramente peores (aunque todavía entran dentro de las barras de error) en el segundo caso, mientras que para  $f_2$  se obtienen resultados

mejores para el modo fundamental radial.

### 9.3.2. Evolución de los índices de color

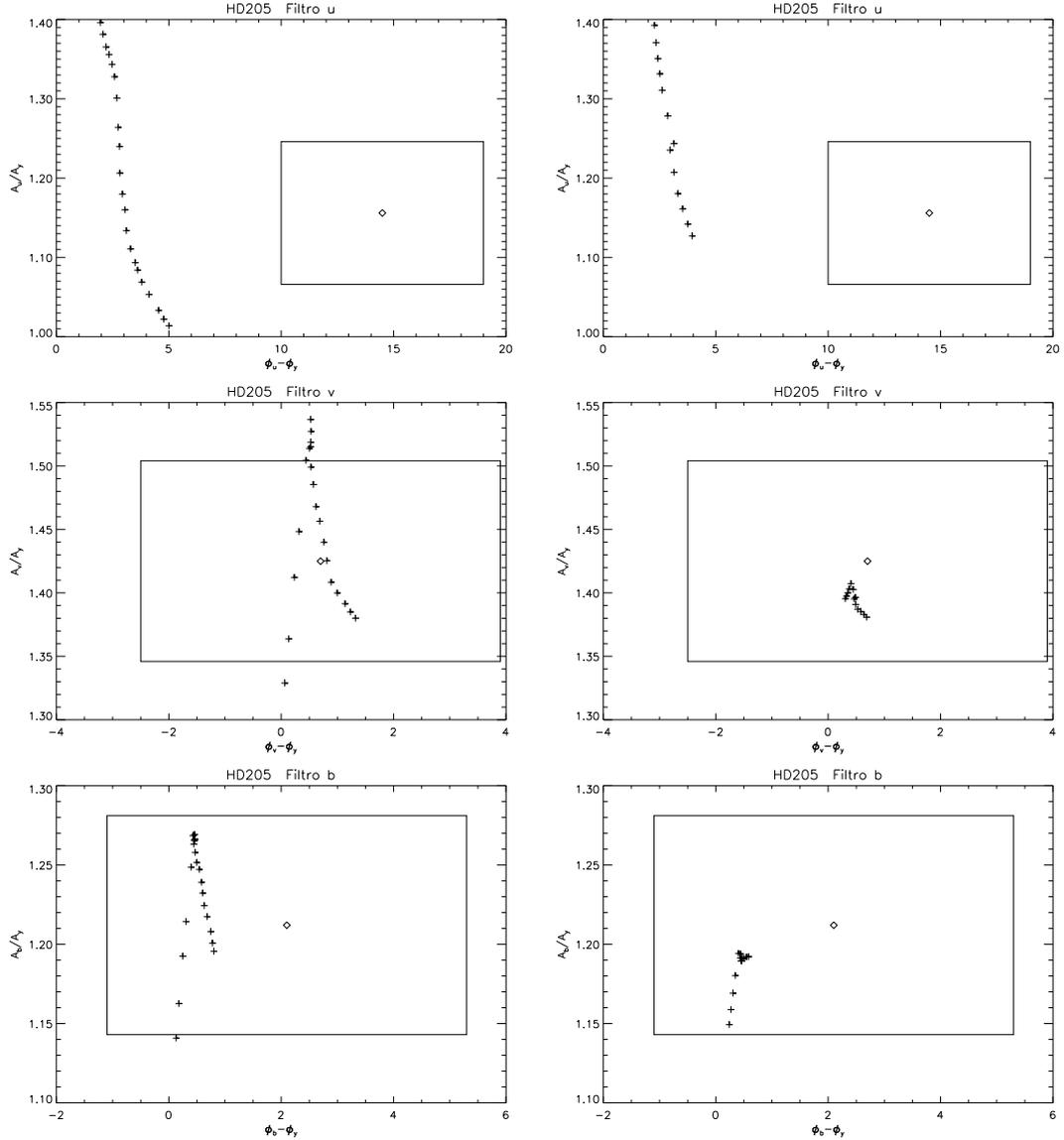


Figura 9.12: Diagramas fase-amplitud para el modo fundamental radial a lo largo de la evolución del modelo central. A la izquierda se muestran los resultados obtenidos con **MLT**, y a la derecha, con **FST**. El rectángulo muestra la caja de error observacional. Frecuencia  $f_2$ .

Como ya se hizo para las dos estrellas anteriores, hemos estudiado cómo varían los índices de color en los tres filtros de la fotometría Strömgen, **u**, **v** y **b** a lo largo de la evolución del modelo central. Para ello consideramos la frecuencia  $f_2$ , para el cual, según vimos en la Sec. 9.3.1, se obtienen resultados compatibles con los índices de color observados del modo fundamental radial. Para la convección se han utilizado la **MLT** ( $\alpha_{\text{MLT}} = 1.0$ ) y la **FST**. Hemos comparado los resultados obtenidos para el modo fundamental radial con los datos observacionales correspondientes a  $f_2$ . En la Fig. 9.12 se muestra la evolución de los índices de color para cada filtro.

Empezamos con los modelos calculados con **MLT**. En este caso podemos observar que a partir de los resultados obtenidos con el filtro **u** no puede seleccionarse ningún rango de edades válido que permita delimitar la caja de error observacional para esta estrella, límites que sí pueden derivarse a partir de los filtros **v** y **b**. Imponiendo además que la frecuencia del modo fundamental radial se encuentre en torno a un 5% de la observada  $f_2$ , se derivan los siguientes intervalos de temperaturas, gravedades y edades del modelo:

$\log T_{ef_{min}} = 3.848$
$\log T_{ef_{max}} = 3.866$
$\log g_{min} = 3.65$
$\log g_{max} = 3.61$
$\text{Edad}_{min} = 880 \text{ Myr}$
$\text{Edad}_{max} = 900 \text{ Myr}$

En este caso se obtienen los mismos rangos que los asociados a la caja fotométrica estándar, por lo que no hemos conseguido obtener información adicional. Además, hay que tener en cuenta que la identificación modal, y en concreto de  $f_2$  como modo radial no era unívoca, por lo que habría que explorar otras posibilidades.

Como puede comprobarse en la Fig. 9.11 (gráficas de la derecha, modelo calculado con **FST**), los valores del filtro **u** son incompatibles con las observaciones, mientras que los de los filtros **v** y **b** caen dentro de las barras de error observacionales. Además, este camino no llega hasta  $\log T_{ef} = 3.866$ , ya que es más corto como consecuencia de la ausencia de *overshooting*. No obtenemos, pues, información adicional con esta descripción de la convección.

### 9.3.3. Conclusiones

Hemos llevado a cabo en esta sección una identificación de los dos modos observados a partir de la comparación de las predicciones teóricas con los resultados obtenidos de la fotometría Strömgren. Se ha obtenido que la primera de las frecuencias corresponde a un modo no radial, en concreto el  $(-5, 1)$  o el  $(-8, 2)$  (ambos modos **g** puros). La segunda parece corresponderse con el modo fundamental radial, aunque también es posible que se trate del  $(-3, 1)$ . Estaríamos pues, ante una estrella que tiene excitados simultáneamente un modo **g** y un modo **p**, ambos de órdenes bajos. De nuevo, parece que los mejores resultados corresponden a valores de  $\alpha_{\text{MLT}} \leq 1.0$ , aunque no podemos descartar ninguna posibilidad. Asimismo, tampoco podemos seleccionar el valor de  $\alpha_{\text{MLT, atm}}$  ni el tratamiento de la convección más adecuado.

## 9.4. Oscilaciones adiabáticas con rotación

A partir de los modelos en pseudorotación se ha obtenido el espectro pulsacional adiabático y los efectos de la degeneración accidental. Pretendemos obtener conclusiones que pudieran derivarse del estado evolutivo de esta estrella en particular, ya que se encuentra situada muy próxima al punto de *turn-off*. De hecho, ésta ha sido la principal motivación para haber elegido esta estrella. Las aproximaciones utilizadas, como anteriormente, son las de *rotación rígida* y *rotación diferencial*.

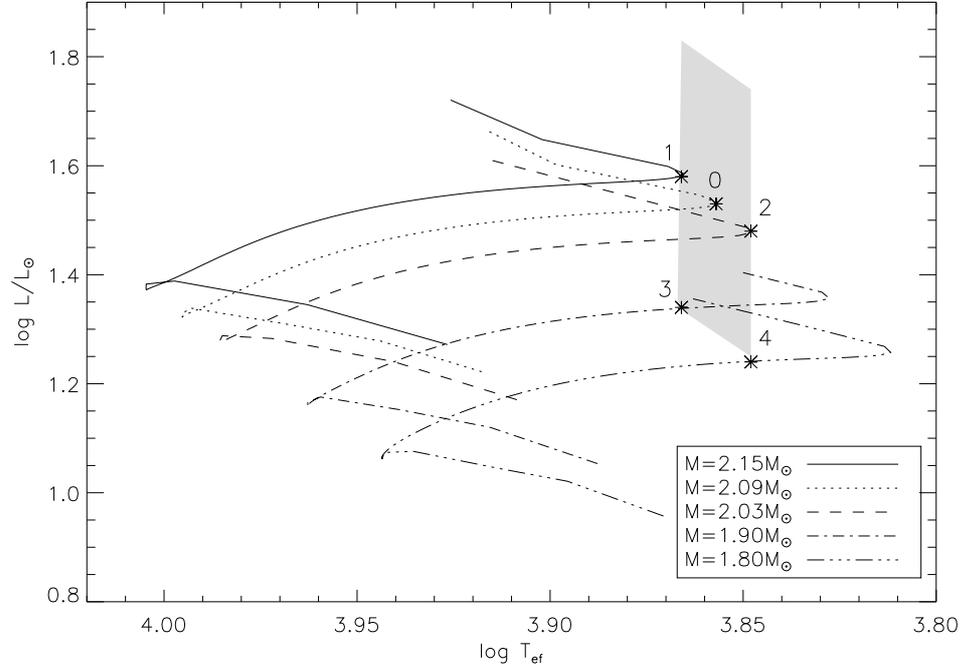


Figura 9.13: Diagrama HR de los modelos obtenidos sin atmósfera, y con rotación. La zona sombreada representa la caja de error. Para la convección se ha utilizado  $\alpha_{\text{MLT}} = 1.0$ .

En este caso no se tiene ninguna medida de  $v \sin i$ . Posiblemente su valor sea bastante reducido debido a su estado evolutivo tardío. Hemos optado, pues, por elegir una velocidad moderadamente lenta, de 20 km/s que, aunque no tiene por qué ser real, proporciona un buen punto de partida para el estudio que pretendemos llevar a cabo.

### 9.4.1. Modelos

Se ha utilizado como teoría de la convección la **MLT**, con un valor de  $\alpha$  intermedio,  $\alpha = 1.0$ , que parece ser suficiente para asegurar la coherencia del uso de esta

	$M/M_{\odot}$	$\log T_{\text{ef}}$	$\log g$	$\log L/L_{\odot}$	$X_C$	Edad	$f_0$	$\nu_{\Omega}$
0	2.09	3.857	3.61	1.53	0.040	900	69.84	1.3
1	2.15	3.866	3.60	1.58	0.042	830	69.03	1.2
2	2.03	3.848	3.61	1.48	0.404	977	70.89	1.3
3	1.90	3.866	3.80	1.34	0.178	1055	99.54	1.6
4	1.80	3.848	3.79	1.24	0.171	1242	100.74	1.7

Tabla 9.5: Propiedades de los modelos obtenidos con rotación, ( $\Omega = 20$  km/s). La temperatura efectiva está dada en grados K, la gravedad superficial  $g$  en el sistema cgs, y la edad en millones de años.  $X_C$  representa la fracción de Hidrógeno en el centro.  $f_0$  es la frecuencia del modo fundamental radial y  $\nu_{\Omega}$  la frecuencia de rotación del modelo, ambas expresadas en  $\mu\text{Hz}$ .

Modelo	$n, \ell, m$	$\sigma$ ( $\mu\text{Hz}$ )	Acoplado con:	$ \sigma - \sigma' $ ( $\mu\text{Hz}$ )	CC
$0j$	-5, 1, -1	60.10	-13, 3, -1	0.05	0.24
$0j$	-13, 3, -1	61.01	-5, 1, -1	0.05	0.76
$1j$	-3, 1, 0	69.07	-10, 3, 0	0.03	0.18
$1j$	-10, 3, 0	69.93	-3, 1, 0	0.03	0.82

Tabla 9.6: Ejemplos de parejas de modos acoplados con frecuencias cercanas (en torno a un 5%) a  $f_2$ .  $\beta$  denota los valores de los coeficientes de contaminación.

Modelo	$n, \ell, m$	$\sigma$ ( $\mu\text{Hz}$ )	Acoplado con:	$ \sigma - \sigma' $ ( $\mu\text{Hz}$ )	$\beta$
$1j$	1, 0, 0	69.05	-7, 2, 0	0.01	0.50
$1j$	-7, 2, 0	69.61	1, 0, 0	0.01	0.50
$2j$	-9, 1, -1	36.95	-23, 3, -1	0.52	0.51
$2j$	-23, 3, -1	36.80	-9, 1, -1	0.52	0.49
$3j$	1, 0, 0	99.58	-4, 2, 0	0.02	0.50
$3j$	-4, 2, 0	98.79	1, 0, 0	0.02	0.50
$4j$	1, 0, 0	100.77	-4, 2, 0	0.01	0.50
$4j$	-4, 2, 0	102.27	1, 0, 0	0.01	0.50

Tabla 9.7: Propiedades de los acoplamientos entre modos mixtos con  $(\ell, \ell') = (0, 2)$ .

aproximación en el estado evolutivo que presenta esta estrella. Por último, para la atmósfera se ha utilizado la aproximación de Eddington, ya que no incluiremos la interacción de la pulsación con la atmósfera. En la tabla 9.5 se muestran los datos de los modelos encontrados.

### 9.4.2. Acoplamientos por rotación

A continuación mostramos los estudios realizados sobre la degeneración por rotación de los modos para todos los modelos calculados. En la Fig. 9.14 se muestra la variación de la frecuencia de cada modo afectado por la degeneración accidental, en función de su frecuencia. Dado que la rotación que hemos considerado es relativamente lenta, no aparece la tendencia lineal que se observaba, por ejemplo, en **29 Cyg** (ver Sec. 8.4.2), sino una nube de puntos, que por otra parte, siempre estaba presente en las anteriores estrellas para bajas frecuencias.

En la Fig. 9.15 se muestran los coeficientes de contaminación de los modos en función de la frecuencia. Aunque el número de parejas afectadas por la degeneración accidental es menor que en los casos de las estrellas anteriores, se observan las propiedades ya comentadas, a saber, la presencia de distintas ramas en el caso de parejas  $(\ell, \ell') = (1, 3)$  para distintos valores de  $m$ , o la convergencia a 1 ó 0 de los coeficientes de contaminación para los modos con  $\ell = 2, 3$  ó  $\ell = 0, 1$ , respectivamente.

Es interesante señalar que en este caso no se ha encontrado ningún acoplamiento entre modos con el mismo valor de  $\ell$  en todo el espectro de frecuencias de todos los modelos calculados. Sí aparecen, sin embargo, modos degenerados con  $\beta = 0.5$ , tal y como se muestra en la tabla 9.7. Por primera vez en este estudio aparecen parejas de este tipo con  $\ell = 1$  y  $\ell' = 3$ . Aunque puede tratarse de un hecho aislado,

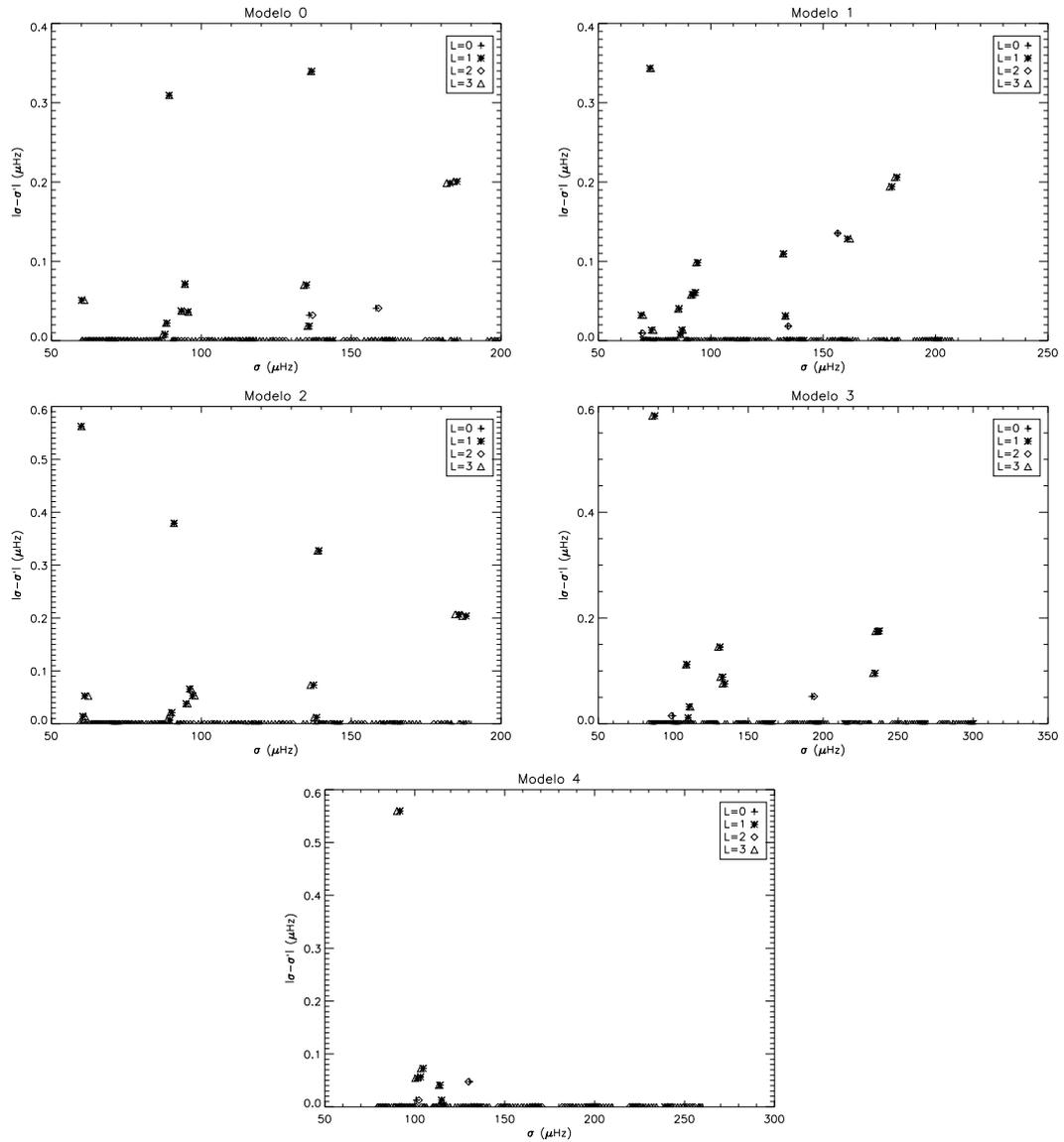


Figura 9.14: Diferencia de frecuencias  $|\sigma - \sigma'|$  para los cinco modelos de la caja fotométrica frente a  $\sigma$  (la frecuencia de los modos calculada sin acoplamiento), para distintos valores de  $\ell$ .  $\sigma'$  es la frecuencia que se obtiene para cada modo cuando se incluye la degeneración accidental.

este fenómeno podría estar íntimamente ligado al avanzado estado evolutivo. Para comprobarlo sería necesario un estudio sistemático de este tipo de estrellas en esta zona particular del diagrama HR.

### 9.4.3. Fotometría multicolor

A continuación pasamos a estudiar las consecuencias de la rotación sobre las predicciones de la fotometría multicolor, analizando las curvas en los diagramas fase-amplitud (ver secciones 7.5.3 y 8.4.3). Presentamos, en primer lugar, el comportamiento para dos parejas con frecuencias cercanas a la observada,  $f_2$ . Sus propiedades se muestran en la tabla 9.6, y sus diagramas de color en la Fig. 9.16. Puede observarse que el comportamiento de las curvas es el que ya se conocía: son cerradas

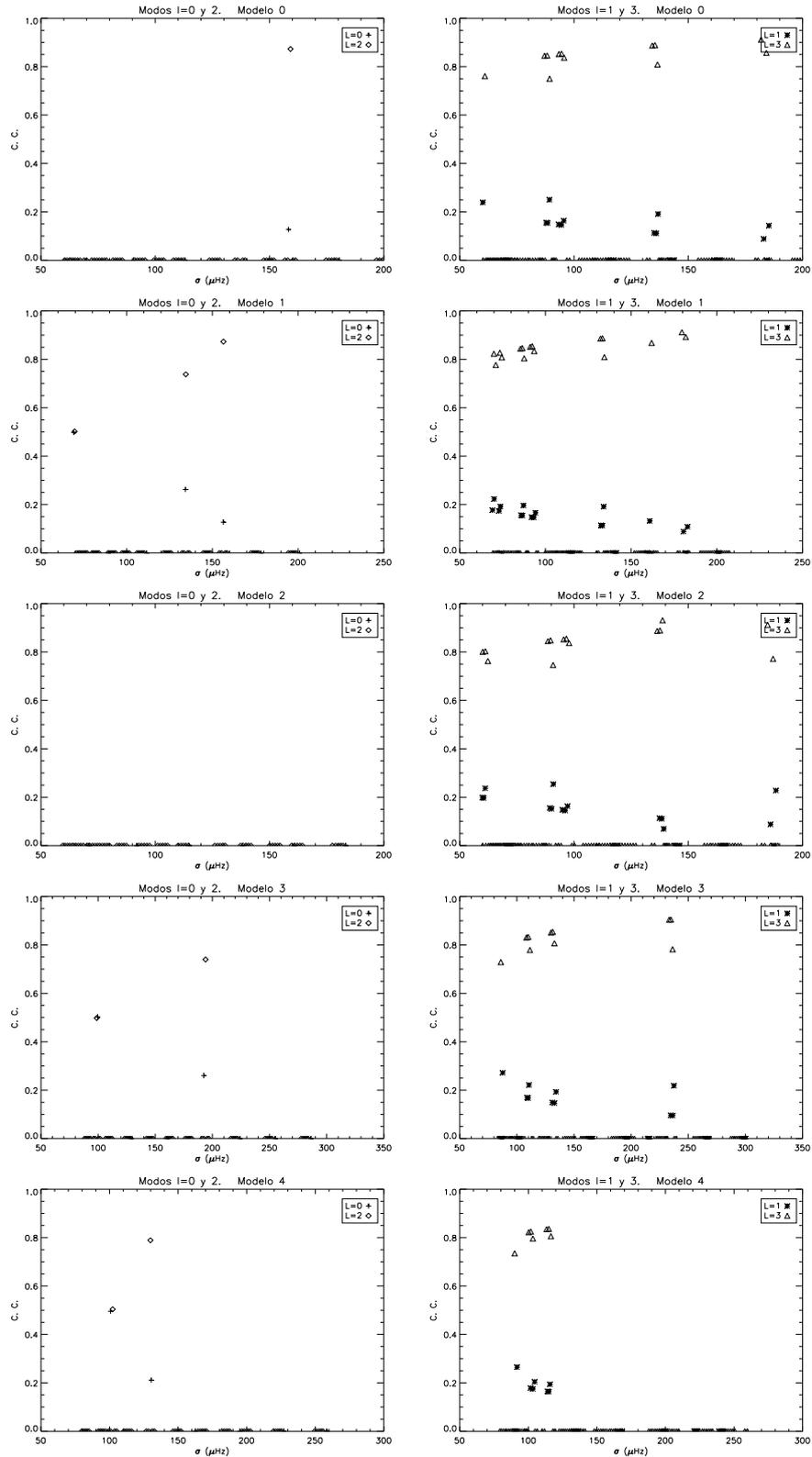


Figura 9.15: Coeficientes de contaminación para los cinco modelos de la caja fotométrica frente a la frecuencia de los modos. *Izquierda*: valores obtenidos para las parejas con  $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . *Derecha*: valores correspondientes a las parejas con  $(\ell, \ell') = (1, 3)$ .

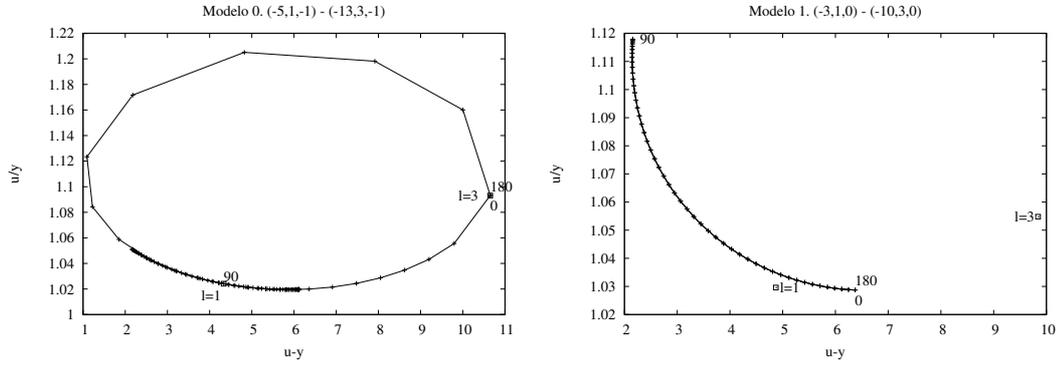


Figura 9.16: Diagramas fase-amplitud para el filtro  $u$  de las parejas que se muestran en la tabla 9.6. Los valores que se obtienen cuando no se tiene en cuenta la rotación se muestran mediante cuadrados, etiquetados según su valor de  $\ell$ .  $u - y$  y  $u/y$  representan, respectivamente, las diferencias  $\phi_u - \phi_y$  y los cocientes  $A_u/A_y$ .

para  $m = \pm 1$  y abiertas para  $m = 0$ .

Si estudiamos las gráficas correspondientes a las parejas con coeficientes de contaminación en torno a 0.5, mostradas en la Fig. 9.17, observamos que la forma de las curvas es la misma que se había obtenido en las estrellas anteriores. La novedad en este caso estriba en la pareja  $(-9, 1, -1) - (-23, 3, -1)$ , para la cual la línea es cerrada. Vemos que para este tipo de parejas, pues, el comportamiento en el diagrama fase-amplitud no depende tanto del valor del coeficiente de contaminación ( $\beta = 0.5$  en este caso), sino del valor de  $m$ . Puede comprobarse de nuevo que la mayor densi-

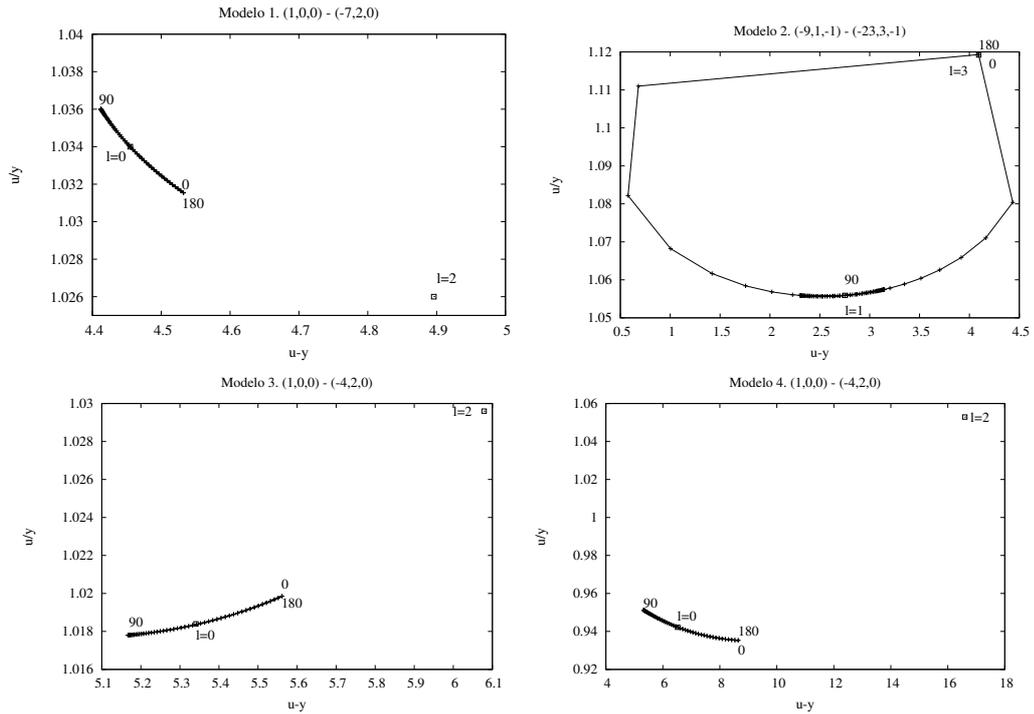


Figura 9.17: Diagramas fase-amplitud para el filtro  $u$  de los modos mixtos mostrados en la tabla 9.7. Igual que antes, se muestran los puntos correspondientes a las predicciones sin rotación, representados mediante cuadrados.

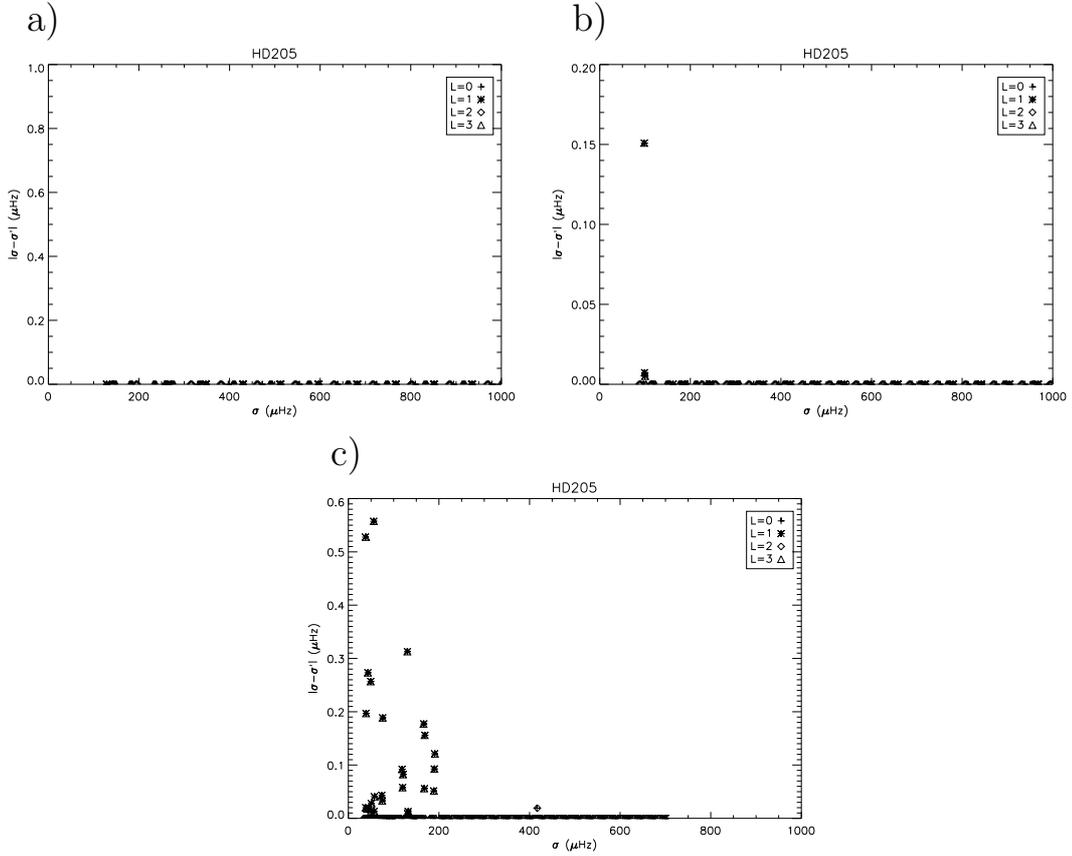


Figura 9.18: Diferencias  $|\sigma - \sigma'|$  para tres puntos del camino evolutivo obtenido con rotación rígida, en función de la frecuencia de los modos: a) modelo con 50 millones de años,  $v = 8.4$  km/s; b) modelo con 450 millones de años,  $v = 10.7$  km/s; c) modelo con 900 millones de años, en el punto de *turn-off*,  $v = 19.5$  km/s.

dad de puntos se da en torno a los modos con  $\ell \leq 1$ , los cuales además aparecen si se observa la estrella perpendicularmente al eje de rotación. En el caso de las curvas abiertas, no existe ninguna probabilidad de identificar observacionalmente de forma errónea los modos  $\ell = 0$  con un  $\ell = 2$ , ya que los valores teóricos quedan alejados de las curvas. Sí pudiera ocurrir, como ya hemos comentado, que pudieran confundirse con un  $\ell = 1$  o un  $\ell = 3$ .

#### 9.4.4. Conclusiones

En este caso se ha llevado a cabo el estudio de la degeneración accidental para una estrella muy evolucionada y que, por tanto, rota lentamente, por lo cual el número de acoplamientos es reducido, a pesar de la elevada densidad de modos característica de estos estados evolutivos. Las características generales de las diferencias de frecuencias, de los coeficientes de contaminación y de la dependencia de los índices de color con el ángulo del eje de rotación con respecto a la visual no difieren de las ya obtenidas en capítulos anteriores. Sí se ha encontrado una novedad, consistente en una pareja de modos con  $\ell$  impar (1 y 3), y  $m = -1$ , con  $\beta = 0.5$ . El comportamiento de sus curvas en el diagrama fase-amplitud se corresponde con el de otros pares con  $m = \pm 1$ , o sea, es cerrada, situándose el punto correspondiente

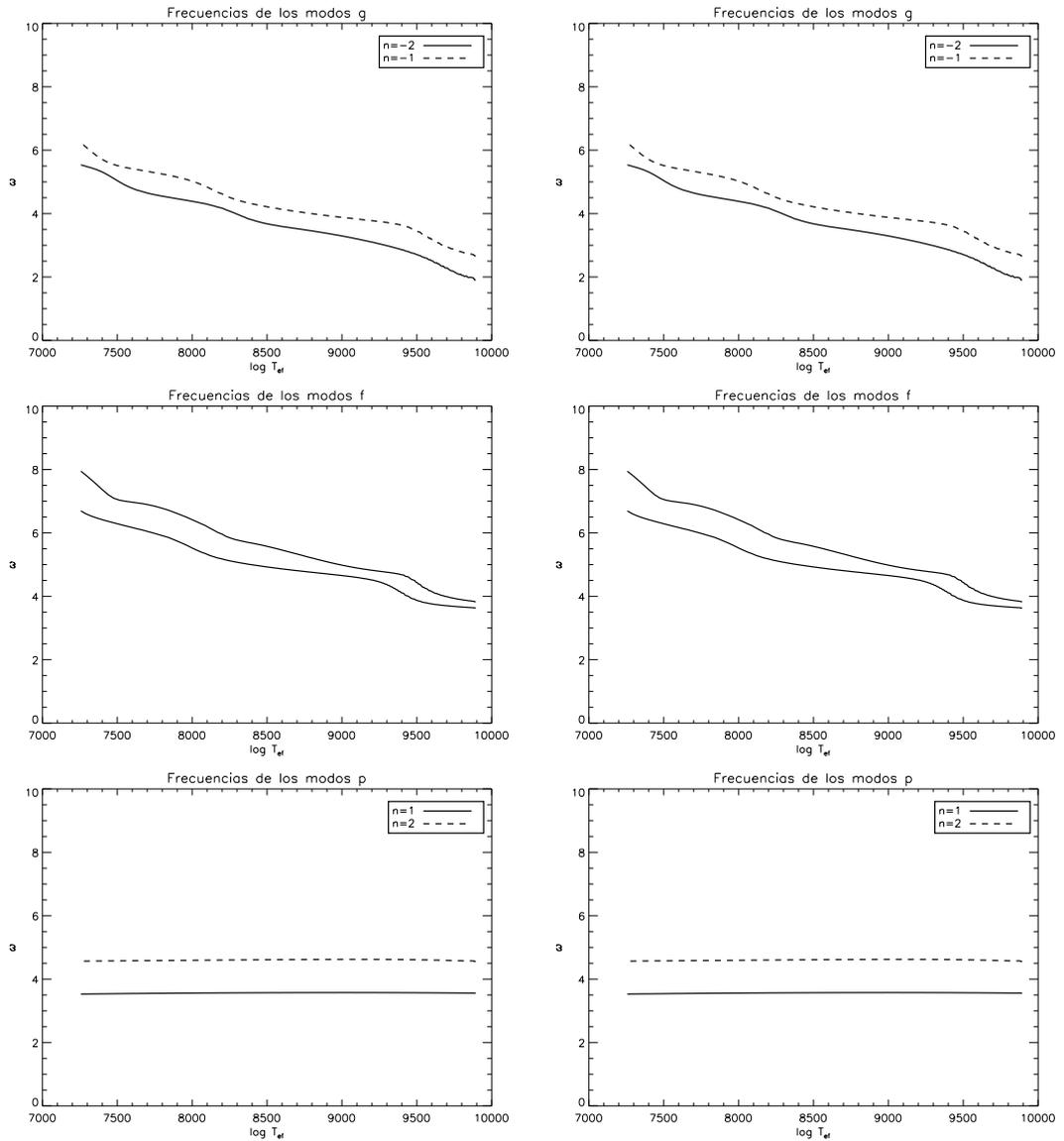


Figura 9.19: Evolución de la frecuencia adimensional de algunos modos **g** (gráficas superiores), **f** (gráficas centrales) y **p** (gráficas inferiores) para el modelo calculado con rotación rígida. A la izquierda se muestran las frecuencias calculadas teniendo en cuenta la rotación, pero no el acoplamiento. En las gráficas de la derecha ya se han incluido los efectos de éste.

a  $\ell = 3$  en la zona asociada a los ángulos  $i = 0^\circ$  y  $i = 180^\circ$  (los que se tendrían si se observara la estrella por los polos). Los coeficientes de contaminación de los modos con  $\ell = 2$  ó  $\ell = 3$  son siempre mayores que los correspondientes a aquéllos con  $\ell = 0$  ó  $\ell = 1$ , por lo que no se presentan novedades en este aspecto.

## 9.5. Efectos de la evolución sobre los acoplamientos por rotación

Pasamos a estudiar los efectos de la evolución estelar sobre los acoplamientos por rotación. El tratamiento de la rotación ha sido abordado, como hasta ahora,

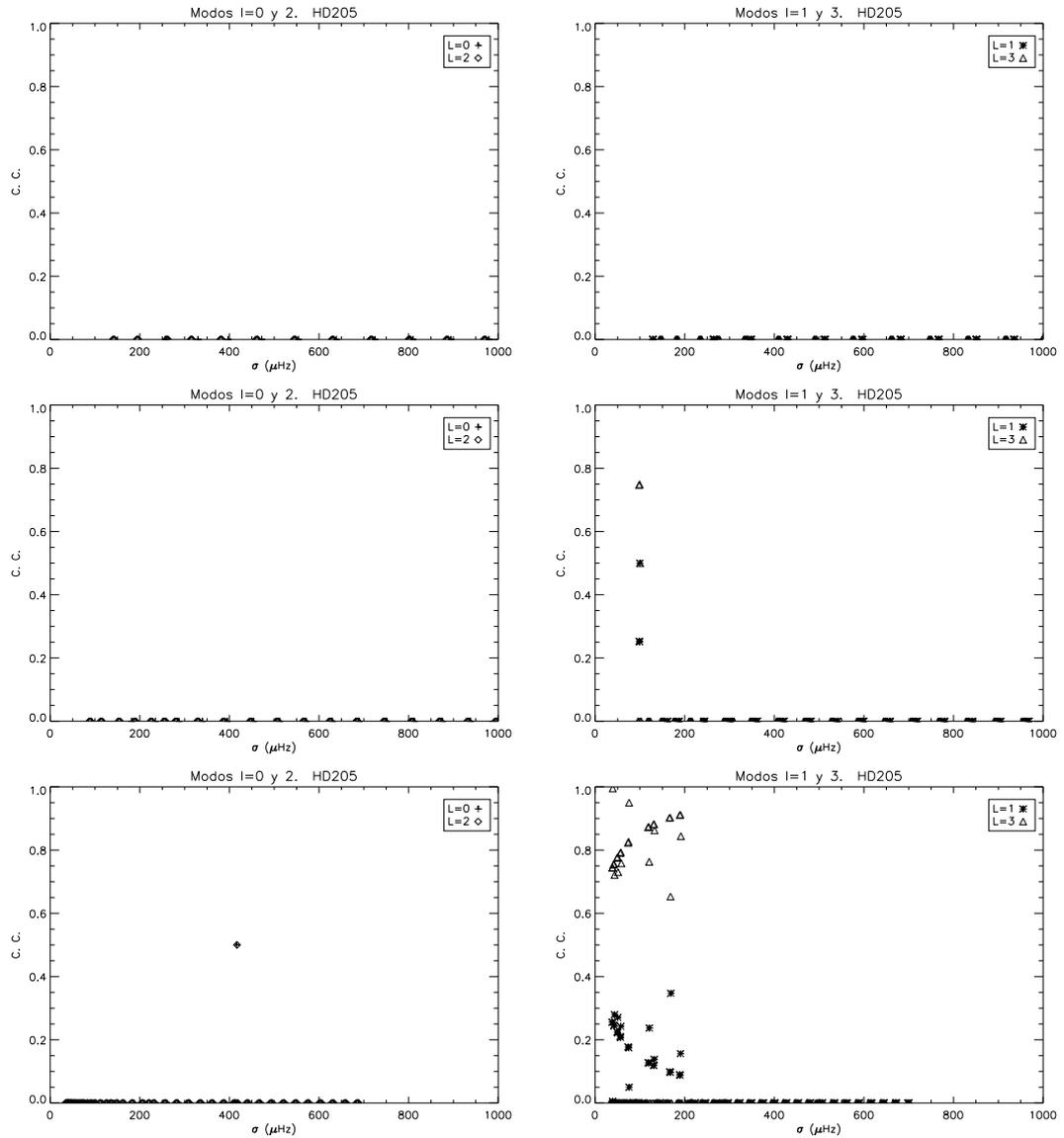


Figura 9.20: Coeficientes de contaminación para los tres puntos del camino evolutivo anteriores, en función de la frecuencia de los modos. *Izquierda*: valores obtenidos para las parejas  $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . *Derecha*: lo mismo, pero para las parejas  $(\ell, \ell') = (1, 3)$ . En orden descendente: modelos con 50, 450 y 900 millones de años.

mediante las aproximaciones de *rotación rígida* y *rotación diferencial*. Finalmente, mediante el código de pulsación se han obtenido los espectros adiabáticos de los modelos y los acoplamientos de los modos.

### 9.5.1. Rotación rígida

En este caso, los tres momentos evolutivos elegidos han sido: un modelo en la ZAMS, con una edad de 50 millones de años; otro aproximadamente a la mitad de su vida, con 450 millones de años, y por último el modelo dado por las observaciones, cuando la estrella está a punto de abandonar la Secuencia Principal, con una edad de 900 millones de años. Analizamos primero los acoplamientos, dados por la diferencia de frecuencias  $|\sigma - \sigma'|$ , que se muestran en la Fig. 9.18. Observamos que la baja

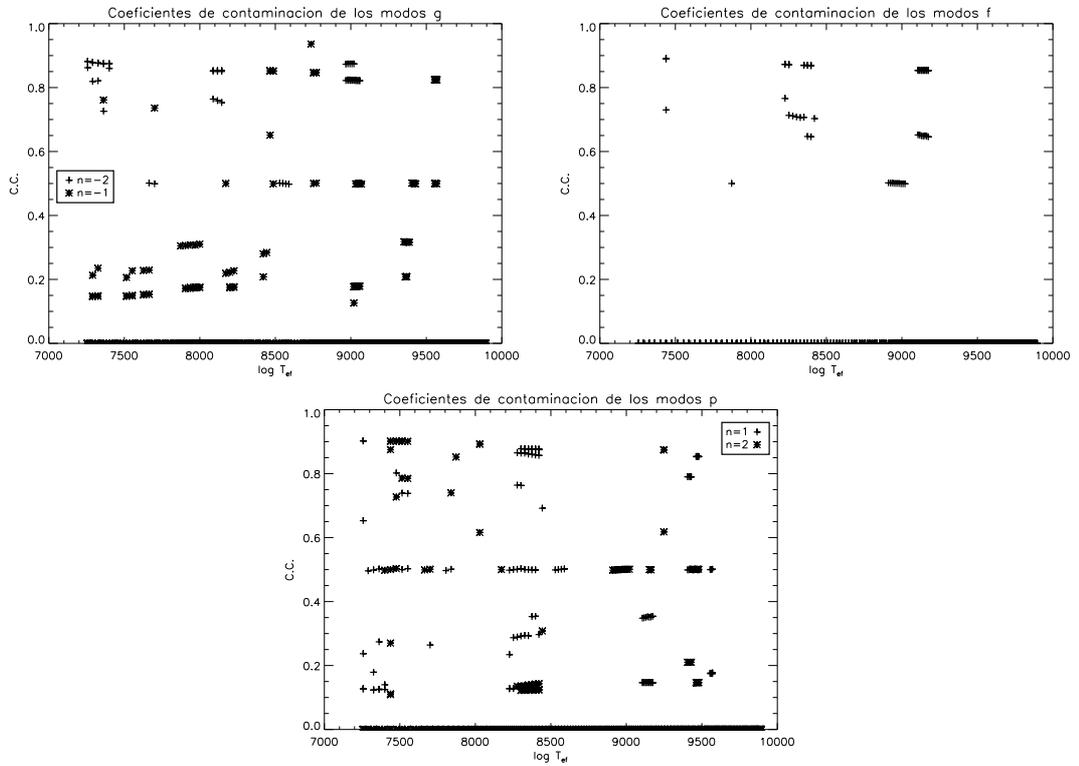


Figura 9.21: Evolución de los coeficientes de contaminación de los modos **g**, **f** y **p** para el modelo central de la caja fotométrica evolucionado con rotación rígida. La evolución viene caracterizada por la temperatura efectiva.

velocidad de rotación considerada da lugar a un número menor de acoplamientos que en las estrellas anteriores. De hecho, para el modelo más joven no se encuentra ninguno, mientras que en el más evolucionado aparecen algunas parejas, debido fundamentalmente a la mayor densidad de modos que existe en estadios avanzados, y no a la rotación.

En la Fig. 9.19 mostramos el efecto de la rotación sobre la frecuencia adimensional de ciertos modos (**g**, **f** y **p**) a lo largo de la evolución. No se han elegido todos los valores posibles de  $\ell$  y  $m$ , por claridad, sino únicamente  $\ell = 2, 3$ , con  $m = 0$  para los **f** y **g**, y  $\ell = 0$  para los **p**. En las gráficas de la izquierda se representan las frecuencias que se obtienen teniendo en cuenta únicamente la rotación, y a la derecha se muestra cómo varían éstas, cuando están afectadas también por el acoplamiento. No se observan diferencias significativas en ambos casos, ya que la velocidad angular no es lo suficientemente elevada.

Veamos ahora cómo se modifican los coeficientes de contaminación. En la Fig. 9.20 se muestran los valores obtenidos para todo el espectro de pulsación de los tres modelos anteriores. Para el más joven, como se comentó anteriormente, no se encuentran modos acoplados, aumentando ligeramente el número de parejas hacia el final de la evolución. A partir de esta gráfica y de la Fig. 9.18 concluimos que existe una frecuencia a partir de la cual ya no existen acoplamientos, que en este caso se sitúa en torno a los  $200 \mu\text{Hz}$ . Esto se debe a que la degeneración accidental aparece entre modos con una diferencia de frecuencias inferior a la frecuencia de rotación ( $\nu_\Omega$ ) de la estrella (ver Sec. 5.5), menor en este caso que en las dos estrellas anteriores. Las oscilaciones con frecuencia por encima de los  $200 \mu\text{Hz}$  distan entre

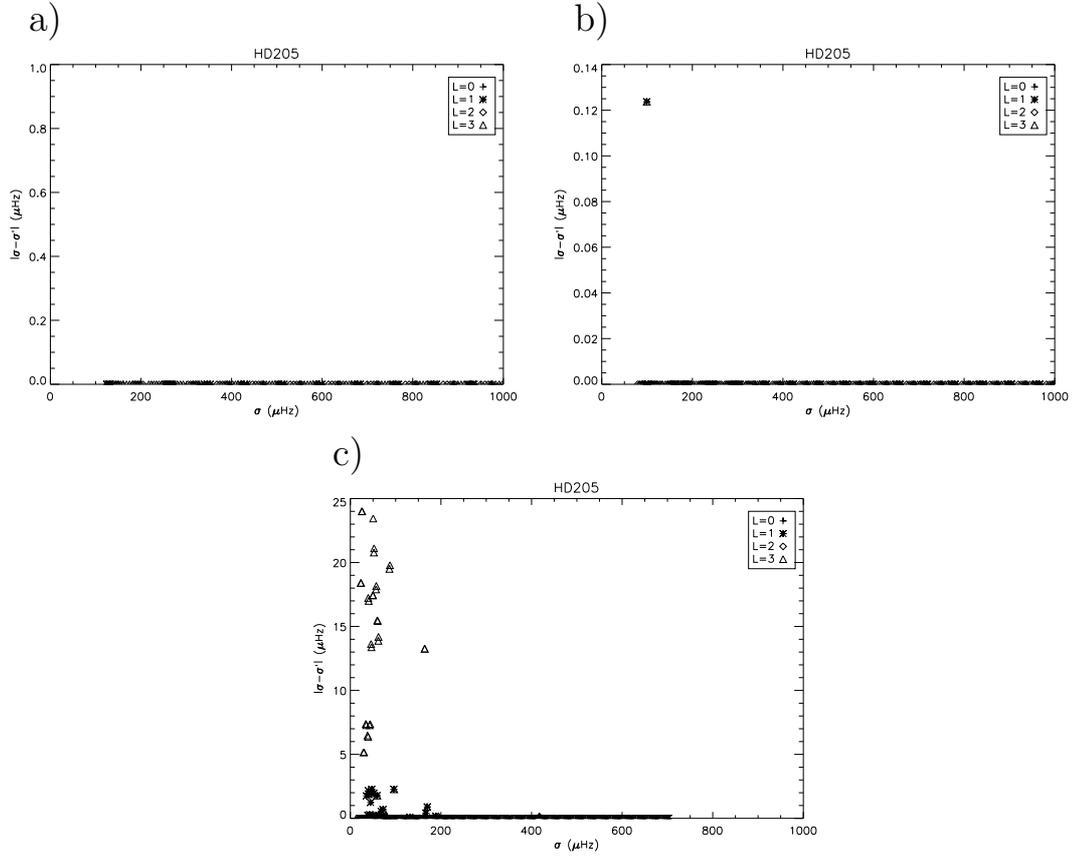


Figura 9.22: Diferencias  $|\sigma - \sigma'|$  para tres puntos del camino evolutivo obtenido con rotación diferencial, en función de la frecuencia de los modos: a) modelo con 50 millones de años,  $v = 45.9$  km/s; b) modelo con 450 millones de años,  $v = 36.3$  km/s; c) modelo con 900 millones de años, en el punto de *turn-off*,  $v = 19.8$  km/s.

sí en un valor superior a ésta, lo que implica que no será posible el acoplamiento entre ellas (estrictamente hablando, sí existirá, pero su intensidad -magnitud que no medimos en este trabajo- será muy pequeña, por lo que se puede descartar). En las estrellas anteriores estábamos considerando velocidades de rotación mayores, por lo que no se observaba este efecto.

La única excepción a lo anterior nos la encontramos en la pareja de modos  $\ell = 0$ ,  $\ell = 2$  en torno a los  $400 \mu\text{Hz}$ , correspondientes a  $n = 15, \ell = 0$ , y  $n = 14, \ell = 2$ , que están afectados por el fenómeno de *avoided crossing*.

Finalmente, en la Fig. 9.21 se muestra la evolución de los coeficientes de contaminación de todos los modos con órdenes entre  $n = -2$  y  $n = 2$ . A partir de esta gráfica se deduce que a lo largo de la vida de la estrella el valor de  $\beta$  de cada modo se mantiene aproximadamente constante (o es nulo si no está acoplado con ningún otro en un momento dado). La única excepción está en los modos **g**, que presentan una variación algo mayor que los otros dos. Estos coeficientes pueden tomar valores cercanos a 0.8, 0.5 ó 0.2, excepto para los modos **f**, los cuales no presentan el valor 0.2. Analizando las figuras correspondientes de las secciones 7.6.1 y 8.5.1, vemos que aparecen modos **f** acoplados con  $\beta \approx 0.2$  solamente hacia el final de la evolución, y siempre que la velocidad de rotación sea significativamente mayor que la considerada aquí. El origen de este tipo de fenómenos es complicado de identificar, y no lo hemos

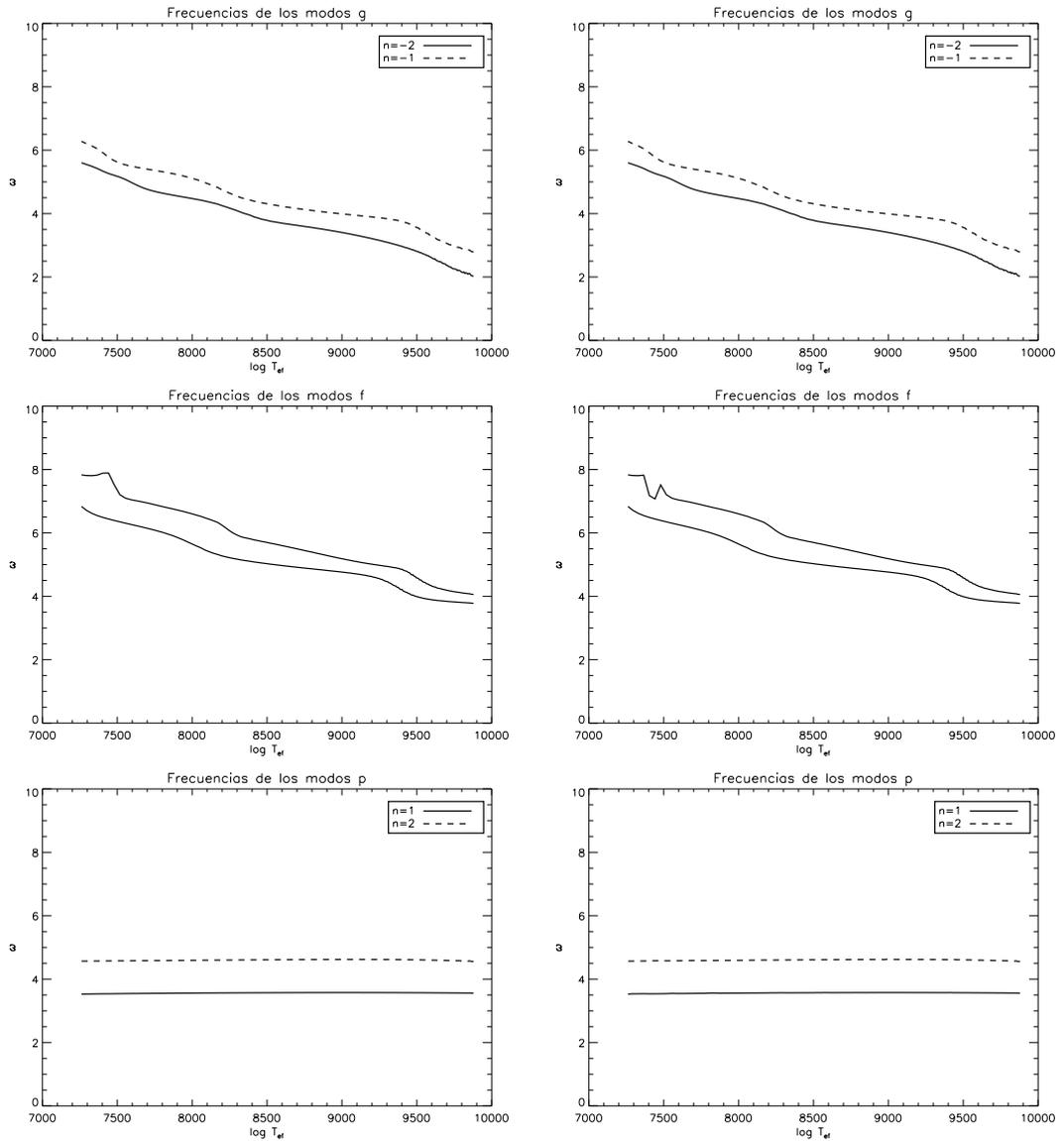


Figura 9.23: Evolución de la frecuencia adimensional de algunos modos **g** (gráficas superiores), **f** (gráficas centrales) y **p** (gráficas inferiores) para el modelo calculado con rotación diferencial. A la izquierda se muestran las frecuencias calculadas teniendo en cuenta la rotación, pero no el acoplamiento. En las gráficas de la derecha ya se han incluido los efectos de éste.

abordado aquí.

### 9.5.2. Rotación diferencial

En esta ocasión se ha utilizado la aproximación de *rotación diferencial*, con la que se obtiene una disminución de la velocidad angular de rotación a lo largo de la evolución del modelo. Presentamos los estudios llevados a cabo para las tres mismas edades consideradas en la sección anterior.

En la Fig. 9.22 se muestra la diferencia de frecuencias para esos tres momentos de la vida de la estrella, observándose un aumento en el valor de  $|\sigma - \sigma'|$ . El valor de la frecuencia a partir de la cual no existen acoplamientos se mantiene en torno a

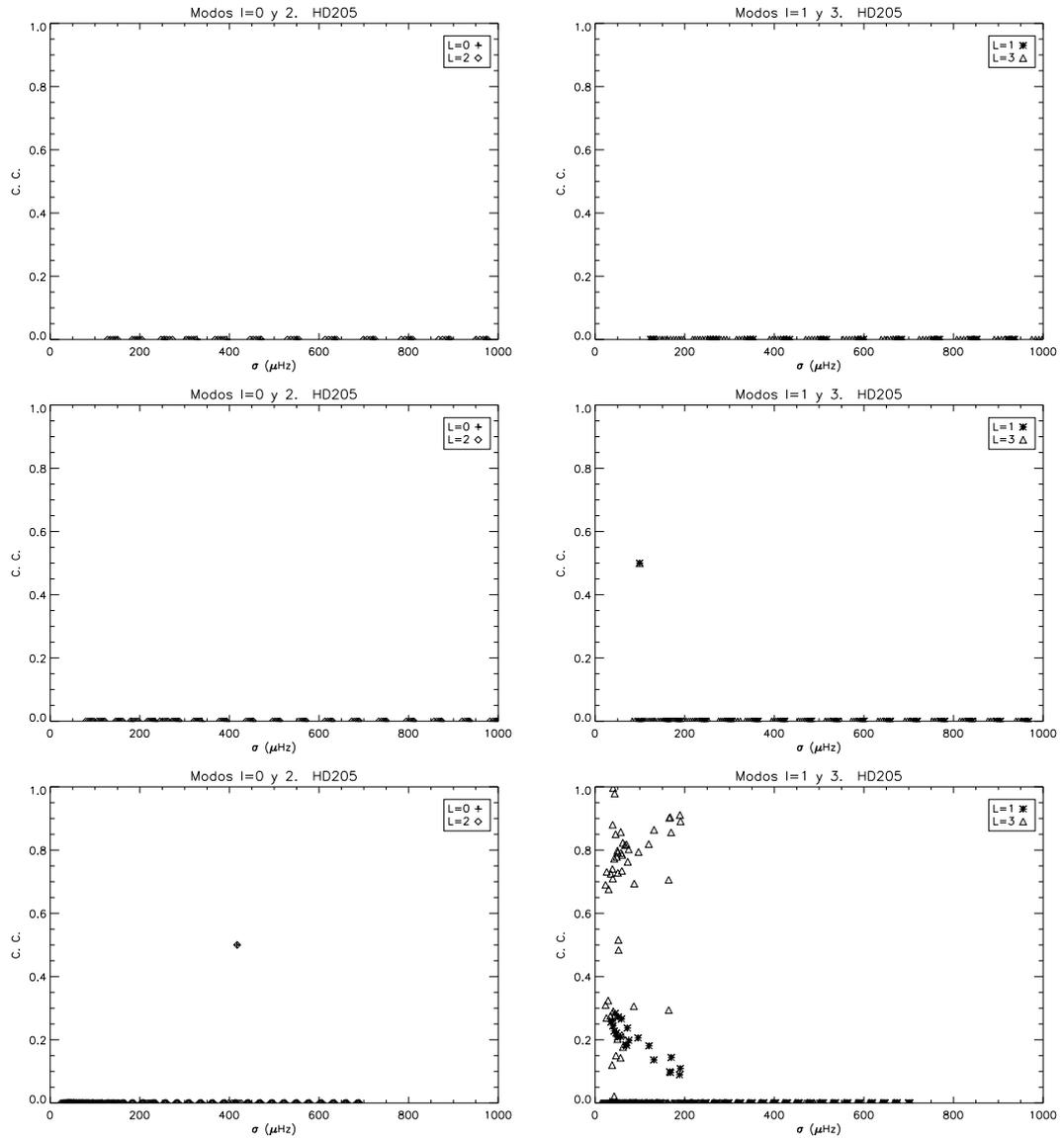


Figura 9.24: Coeficientes de contaminación para los tres puntos del camino evolutivo anteriores, en función de la frecuencia de los modos. *Izquierda*: valores obtenidos para las parejas  $(\ell, \ell') = (0, 2)$ . *Derecha*: lo mismo, pero para las parejas  $(\ell, \ell') = (1, 3)$ . En orden descendente: modelos con 50, 450 y 900 millones de años.

los  $200 \mu\text{Hz}$ , igual que antes. Esto es lógico, porque en ambos casos la frecuencia de rotación del modelo es la misma para la edad de 900 millones de años.

En la Fig. 9.23 se muestra cómo varían las frecuencias adimensionales de algunos modos **g**, **f** y **p** a lo largo de la vida de la estrella. Debido a la baja rotación, los resultados con y sin acoplamiento son iguales para los modos **g**, y muy parecidos para los **f** y **p** (con diferencias máximas del orden del 10 % para el primer caso, y del 0.2 % para el segundo), como era de esperar a tenor de los resultados anteriores. Además, los casos más significativos lo constituyen los modos **f**, que, como se demuestra en Suárez et al. (2006), son los más afectados en cualquier estadio evolutivo. Por otra parte, debido a la mayor velocidad de rotación con la que tiene que partir este modelo en la ZAMS con esta aproximación, es esperable que los modos se vean algo

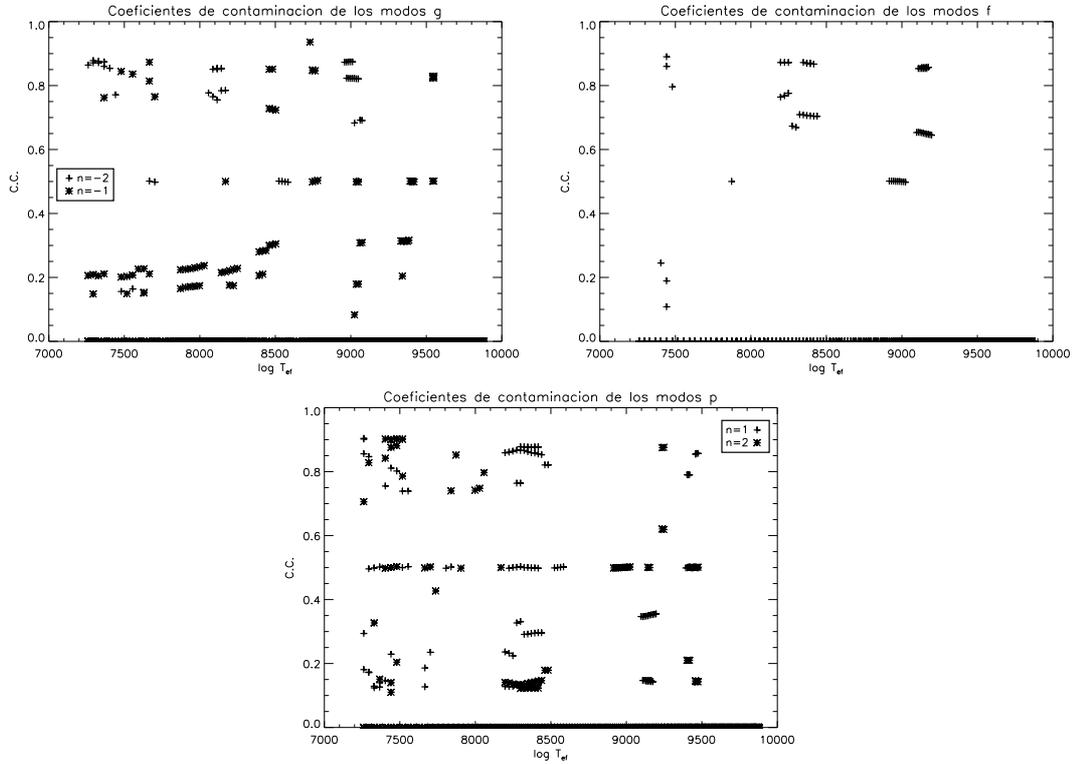


Figura 9.25: Evolución de los coeficientes de contaminación de los modos **g**, **f** y **p** para el modelo central de la caja fotométrica evolucionado con rotación diferencial. La evolución viene caracterizada por la temperatura efectiva.

más afectado que cuando se utilizó la rotación rígida.

Con respecto a los coeficientes de contaminación mostrados en la Fig. 9.24, observamos que la tendencia conforme aumenta la frecuencia de los modos es la misma que nos hemos encontrado hasta ahora, aunque no se pueda observar tan claramente como en los casos anteriores debido a la ausencia de acoplamiento para parejas con frecuencias por encima de los 200  $\mu\text{Hz}$ . Por otra parte, vemos que en el modelo más evolucionado aparecen ya algunas muestras de degeneración accidental entre oscilaciones con  $\ell = 3$ .

Finalmente, en la Fig. 9.25 se muestran los coeficientes de contaminación a lo largo de la evolución del modelo. No se observan diferencias significativas con respecto a los resultados obtenidos con la aproximación de *rotación rígida*. Sí aparecen, no obstante, algunos modos **f** con  $\beta \approx 0.2$ , que no eran visibles anteriormente, lo cual puede ser una indicación del estado evolutivo y del propio modo.

## 9.6. Conclusiones generales para HD 205

Como ya se hizo en los dos capítulos anteriores, hemos analizado las propiedades pulsacionales de esta estrella, encontrándose la presencia de modos **p** y **g** de órdenes bajos excitados simultáneamente. Este tipo de estrellas tan evolucionadas, aunque son más difíciles de estudiar por la complejidad de sus espectros, presentan generalmente rotaciones más bajas. La particularidad de las mismas es que constituyen un interesante escenario para el análisis de las propiedades de la pulsación. En este

capítulo hemos obtenido una posible traza de modos  $f$  acoplados con características concordantes con las obtenidas en otros trabajos sobre las oscilaciones de este tipo de estrellas (Suárez et al., 2006). Esto proporciona información adicional para el reconocimiento de patrones ya observados y en los que actualmente se trabaja con el ánimo de interpretar los espectros de frecuencias que se obtendrán con la misión espacial **COROT**, cuyo lanzamiento está previsto para octubre de este año.

# Capítulo 10

## Conclusiones y trabajo futuro

### 10.1. Conclusiones

En este trabajo se ha llevado a cabo un estudio astrosismológico completo de tres estrellas  $\delta$  Scuti: **RV Ari**, **29 Cyg** y **HD 205**, que abarca tanto el análisis de las oscilaciones no adiabáticas sin rotación (rangos de inestabilidad, estudio de la capa convectiva externa, estudio de los observables no adiabáticos y fotometría Strömgren) como de las oscilaciones adiabáticas con rotación (degeneración accidental, coeficientes de contaminación y diagramas fase-amplitud para modos acoplados por rotación). Asimismo, se han combinado las herramientas anteriores con los diagramas de Petersen, tanto clásicos como rotacionales. A continuación se enumeran las principales conclusiones que se han obtenido.

#### Rangos de inestabilidad y zona convectiva externa

Se ha estudiado la dependencia de los rangos de inestabilidad de los modos con distintas características de los modelos (teoría de la convección utilizada, valor del parámetro  $\alpha_{\text{MLT}}$ , masa, luminosidad, densidad media y temperatura efectiva). Los resultados obtenidos son los siguientes:

- La comparación entre la longitud de mezcla utilizada,  $\alpha_{\text{MLT}}H_p$ , y el valor del tamaño de la zona convectiva,  $\Delta z$ , revela que la **MLT** se utiliza de forma coherente únicamente cuando  $\alpha_{\text{MLT}} < 1.0$ .
- Los rangos de inestabilidad, en algunas ocasiones, arrojan resultados que no son físicamente realistas para  $\alpha_{\text{MLT}} \geq 1.5$ .
- De los dos puntos anteriores se deduce que los valores pequeños de este parámetro ( $\alpha_{\text{MLT}} \approx 0.5$ ) parecen ser más realistas para el rango de masas de las  $\delta$  Scuti que el solar ( $\alpha_{\text{MLT}} \approx 1.8$ ), el más utilizado hasta la fecha.
- La teoría **FST**, con  $\alpha_{\text{FST}} = 0.69$  (valor solar), parece no describir adecuadamente la zona convectiva externa de las estrellas estudiadas.

#### Observables no adiabáticos

La extensión del estudio de los observables no adiabáticos a temperaturas distintas a las utilizadas hasta ahora ha permitido confirmar los comportamientos conocidos hasta la fecha. Las conclusiones obtenidas de este estudio son las siguientes:

- Para temperaturas elevadas ( $T_{ef} \gtrsim 8700$  K), estos observables son independientes de la teoría de la convección utilizada.
- Para temperaturas bajas ( $T_{ef} \lesssim 6600$  K),  $f_T$  y  $\Psi_T$  parecen no depender ni de la masa, ni del valor de  $\alpha_{\text{MLT}}$ , ni de la teoría de la convección, aunque esto puede ser un efecto de la aproximación utilizada (convección congelada).
- Tanto  $f_T$  como  $\Psi_T$  aumentan conforme disminuye el valor de  $\alpha_{\text{MLT}}$ , para todas las temperaturas consideradas.
- Los valores de  $f_T$  y  $\Psi_T$  obtenidos mediante la **FST** ( $\alpha_{\text{FST}} = 0.69$ ) se sitúan entre los correspondientes a  $\alpha_{\text{MLT}} = 1.5$  y  $2.0$ .

### Fotometría Strömgren

Se ha llevado a cabo la identificación modal para las tres estrellas estudiadas. Asimismo, se ha estudiado la evolución de los índices de color, lo que ha permitido restringir, en el caso de **RV Ari**, el rango de temperaturas y edades compatibles con las observaciones. Para esta estrella también se ha analizado la influencia de la composición química sobre la identificación de los modos. Los resultados se enumeran a continuación:

- Los modos observados en **RV Ari** son compatibles con el fundamental radial y el primer sobretono radial, aunque no se pueden descartar de forma absoluta otros modos no radiales.
- La metalicidad no influye sobre la identificación modal.
- Al utilizar una metalicidad subsolar en los modelos de **29 Cyg**, pueden identificarse las dos primeras frecuencias observadas con el tercer y el cuarto sobretonos radiales, aunque también son posibles otros modos no radiales. La tercera frecuencia no se puede identificar adecuadamente.
- Al usar metalicidad solar se puede identificar la tercera frecuencia, confirmando el carácter  $\lambda$  Bootis de esta estrella, es decir, su metalicidad observada sería sólo superficial.
- En el caso de **HD 205** no puede llevarse a cabo una identificación unívoca de los modos, aunque parece que se tratan de un **g** puro y un **p** de orden bajo (posiblemente el fundamental radial).
- En todos los casos parece que se pierde discriminación al disminuir el valor de  $\alpha_{\text{MLT}}$ , aunque también se obtiene mejor correspondencia con los datos observacionales.
- A pesar de la fuerte dependencia de los observables no adiabáticos según el tratamiento de la convección utilizado, **MLT** ( $\alpha_{\text{MLT}} = 2.0, 1.5, 1.0, 0.5$ ) ó **FST** ( $\alpha_{\text{FST}} = 0.69$ ), esto no se traduce en una variación significativa de los índices de color. No obstante, todos los resultados apuntan hacia valores pequeños de la eficiencia convectiva en la zona externa de estas estrellas.
- El rango de temperaturas válidas de la estrella **RV Ari** puede reducirse al intervalo [6855,7080] K, y la edad a [1060,1150] millones de años.

## Degeneración accidental por rotación

Se ha estudiado la influencia de la rotación sobre las frecuencias de oscilación para distintas velocidades de rotación y diferentes estados evolutivos. Además, se ha analizado la influencia de la degeneración accidental para distintas edades, utilizando las aproximaciones de rotación rígida y rotación diferencial. Enumeramos las conclusiones:

- El número de modos acoplados por rotación aumenta sustancialmente con la velocidad de rotación y el estado evolutivo.
- Para velocidades de rotación moderadamente elevadas y órdenes radiales altos, el efecto neto sobre el valor de las frecuencias de los modos acoplados depende linealmente del orden radial.
- Las frecuencias de los modos están más afectadas por la degeneración accidental cuando se considera la rotación diferencial que con la rotación rígida.

## Coefficientes de contaminación

Se han presentado en este trabajo unas nuevas variables, los coeficientes de contaminación (CC), que dan cuenta del grado de mezcla de los armónicos esféricos de los modos acoplados. Se han estudiado sus propiedades para distintas parejas de modos y para distintos estados evolutivos de las estrellas consideradas. Las conclusiones obtenidas son las siguientes:

- Los CC de los modos con  $\ell = 2$  ó  $\ell = 3$  son siempre mayores ( $\beta \approx 0.8$ ) que los de los modos con  $\ell = 0$  ó  $\ell = 1$  ( $\beta \approx 0.2$ ). Conforme aumenta la frecuencia,  $\beta \rightarrow 1$  para los primeros y  $\beta \rightarrow 0$  para los segundos.
- Existe un número bastante reducido de modos de órdenes radiales bajos que presentan la particularidad de tener  $\beta \approx 0.5$ , y que desaparecen para los estados evolutivos avanzados de todas las estrellas estudiadas, excepto para **HD 205**.
- Se encuentran algunas parejas con  $\ell = \ell' = 3$ ,  $\beta_\ell \approx 0$ ,  $\beta_{\ell'} \approx 1$ . El número de tales parejas aumenta con la velocidad de rotación y el estado evolutivo de la estrella.

## Diagramas de color para modos degenerados por rotación

Se ha estudiado la dependencia de los índices de color con el ángulo de inclinación de la estrella. Se han obtenido los siguientes resultados:

- Un modo  $\ell = 0$  acoplado con otro  $\ell' = 2$  muestra índices de color cercanos a los predichos sin rotación para prácticamente todos los ángulos de inclinación. Lo mismo se verifica para las parejas  $\ell = 1$ ,  $\ell' = 3$ .
- Los índices de color se aproximan a los obtenidos sin rotación para  $\ell \geq 2$  solamente cuando la estrella se observa desde los polos.

- No obstante, las curvas de los diagramas fase-amplitud pasan cerca de los valores predichos para otros modos no acoplados por rotación, lo que dificulta la identificación en el caso de que la estrella rote.
- Los resultados obtenidos en este trabajo son independientes de la aproximación utilizada: rotación rígida o rotación diferencial. La única diferencia entre ambas está en el número de acoplamientos, mayor en el segundo caso.

### 10.1.1. Diagramas de Petersen

Los diagramas de Petersen (DP), tanto clásicos como rotacionales han resultado ser una herramienta sumamente útil en el estudio de las propiedades de **RV Ari** y de **29 Cyg**. En el primer caso, al poder identificar los dos modos observados como el fundamental radial y el primer sobretono radial, se pueden usar estos diagramas para delimitar los posibles valores de la metalicidad, la masa y la velocidad de rotación. Para esta misma estrella, se han utilizado los DP rotacionales en conjunción con los diagramas de color para modos degenerados, lo que aporta información adicional. En el segundo caso se han utilizado unos diagramas especiales, en los que se representan los cocientes de las frecuencias de los modos radiales de órdenes 3 y 4. Los resultados obtenidos se muestran a continuación:

- La utilización de los DP para **RV Ari** ha restringido la masa de la estrella al rango  $[1.75, 2.01]M_{\odot}$ , la velocidad de rotación a  $[18, 52.6]$  km/s, y la metalicidad al intervalo  $[-0.09, 0.11]$  dex.
- El uso simultáneo de los diagramas de color y de los diagramas de Petersen rotacionales restringen a su vez la velocidad de rotación a un valor en torno a los 35 km/s, y la metalicidad al intervalo  $[-0.09, 0.01]$  dex.
- La identificación modal, junto con el estudio de los cocientes de frecuencias de los modos  $n = 3$  y  $n = 4$  para **29 Cyg**, seleccionan dos grupos de modos para cada una de las tres frecuencias observadas, cuando se utiliza metalicidad solar.

## 10.2. Trabajo futuro

Por último, presentamos las líneas de trabajo futuro que pensamos desarrollar próximamente:

1. En primer lugar habría que extender el estudio de los rangos de inestabilidad y de los observables no adiabáticos cuando se utiliza la **FST**, con otros valores de  $\alpha_{\text{FST}}$ , y comparar los resultados con los obtenidos con **MLT**. Asimismo, sería interesante analizar cómo se modifican los valores teóricos cuando se incluye la interacción de la pulsación con la convección. Para ello se puede utilizar la teoría **TDC** (*Time Dependent Convection*), desarrollada recientemente en nuestro grupo.
2. También sería necesario comparar la identificación modal que se obtiene en los tres casos, para distintas temperaturas efectivas. Esto permitiría obtener el

valor de  $T_{ef}$  por debajo de la cual la aproximación de la convección congelada deja de ser válida, y los valores de  $\alpha_{\text{FST}}$  más adecuados para el estudio de las estrellas  $\delta$  Scuti, como se ha hecho en este trabajo para el parámetro  $\alpha_{\text{MLT}}$ .

3. Asimismo, puede extenderse el estudio de la evolución de los índices de color, que en este trabajo ha permitido la restricción de los posibles valores de la temperatura efectiva y la edad de la estrella, a otros valores de  $\alpha_{\text{FST}}$ . Dado que para estadios más evolucionados la temperatura es suficientemente baja como para que empiece a ser relevante la interacción de la pulsación con la convección, sería conveniente comparar estos resultados con los obtenidos al usar la **TDC**.
4. La utilización de los diagramas de color con rotación y de los diagramas de Petersen rotacionales ha restringido notablemente los posibles valores de la masa, la velocidad de rotación y la metalicidad de la estrella **RV Ari**. Sería interesante ampliar este estudio a otras estrellas del grupo de las **HADS**.
5. En este trabajo se ha tenido que recurrir a unos diagramas de Petersen especiales, en los que han intervenido el tercer y cuarto sobretonos radiales. Es conveniente, pues, realizar un trabajo teórico más profundo que permita entender el comportamiento de estos diagramas para otras parejas de modos radiales diferentes al fundamental y el primer sobretono.
6. Con respecto a **29 Cyg**, habría que extender el estudio aquí realizado, calculando nuevos modelos con metalicidad solar, ya que en este trabajo solamente se ha obtenido el central.
7. Es conveniente estudiar las propiedades teóricas de los diagramas de color para los distintos tipos de parejas de modos acoplados encontradas en este trabajo (modos con  $\Delta\ell = 2$ , modos mixtos con  $\beta \approx 0.5$ , y modos con  $\Delta\ell = 0$ ). En particular, quedan por explicar las causas de las diferentes morfologías de las curvas obtenidas.
8. Habría que profundizar en el estudio teórico de las propiedades de los modos de órdenes radiales bajos con  $\beta \approx 0.5$ , y en particular de su evolución.
9. Por último, habría que aplicar la metodología presentada en este trabajo a otras estrellas para las que se disponen de datos adecuados, y a las que serán observadas próximamente por la misión espacial **COROT**, cuyo lanzamiento está previsto para octubre de este año. Se espera conseguir resultados con precisiones tales que las técnicas aquí utilizadas podrán ser mucho más discriminatorias.

# Apéndice A

## Funciones especiales

### A.1. Polinomios de Legendre

Los Polinomios de Legendre,  $P_\ell(x)$ ,  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ , son las soluciones de tipo polinómico, convenientemente normalizadas, de las ecuaciones (Galindo y Pascual, 1989):

$$\left[ (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + \ell(\ell+1) \right] P_\ell(x) = 0, \quad (\text{A.1})$$

cuya expresión general es:

$$P_\ell(x) = 2^{-\ell} \sum_{n=0}^{[\ell/2]} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(2\ell-2n)!}{(\ell-n)!(\ell-2n)!} x^{\ell-2n}, \quad (\text{A.2})$$

donde  $[\ell/2]$  indica la parte entera de  $\ell/2$ .

Principales propiedades de los Polinomios de Legendre:

1.

$$P_\ell(1) = 1, \quad P_\ell(-1) = (-1)^\ell \quad (\text{A.3})$$

2. Todos los ceros de  $P_\ell(x)$  son simples y se encuentran situados en el intervalo  $(-1, 1)$ . Además, se verifica:

$$|P_\ell(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [-1, 1] \quad (\text{A.4})$$

3.

$$P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x) \quad (\text{A.5})$$

4.

$$P_\ell(0) = \begin{cases} 0 & \ell \text{ impar} \\ (-1)^{\ell/2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (\ell-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots \ell} & \ell \text{ par} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

5. Fórmula de Rodrigues:

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell \quad (\text{A.7})$$

6. Fórmula de Schläfli:

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^{\ell+1}\pi i} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^\ell}{(z - x)^{\ell+1}} dz, \quad (\text{A.8})$$

donde  $C$  es un contorno cerrado simple en el plano complejo  $z$  que contiene en su interior al punto  $z = x$ , recorrido en sentido positivo.

7. Los Polinomios de Legendre forman un conjunto ortogonal completo en  $\mathcal{L}^2[-1, 1]$ , y satisfacen la condición de normalización:

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x) P_{\ell'} dx = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell\ell'}. \quad (\text{A.9})$$

Si  $f(x) \in \mathcal{L}^2[-1, 1]$ , entonces:

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(x), \quad (\text{A.10})$$

donde:

$$a_\ell = \frac{2\ell + 1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_\ell(x) dx = \frac{2\ell + 1}{2^{\ell+1}\ell!} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^\ell \frac{d^\ell f(x)}{dx^\ell} dx. \quad (\text{A.11})$$

8. Función generatriz:

$$[1 - 2hx + h^2]^{-1/2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^\ell P_\ell(x), \quad (\text{A.12})$$

donde  $|h| < 1$ .

9. Fórmulas de recurrencia:

$$P'_{\ell+1}(x) - xP'_\ell(x) = (\ell + 1)P_\ell(x) \quad (\text{A.13})$$

$$(\ell + 1)P_{\ell+1}(x) = (2\ell + 1)xP_\ell(x) - \ell P_{\ell-1}(x) \quad (\text{A.14})$$

$$xP'_\ell(x) - P'_{\ell-1}(x) = \ell P_\ell(x) \quad (\text{A.15})$$

$$P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x) = (2\ell + 1)P_\ell(x) \quad (\text{A.16})$$

$$(x^2 - 1)P'_\ell(x) = \ell x P_\ell(x) - \ell P_{\ell-1}(x) \quad (\text{A.17})$$

Para cálculos numéricos, el uso iterado de (A.14) permite calcular  $P_\ell(x)$  para todo  $x$ , partiendo de  $P_0(x) = 0$  y  $P_1(x) = x$ .

10. Expresiones de los primeros Polinomios de Legendre:

$$P_0(x) = 1 \quad (\text{A.18})$$

$$P_1(x) = x \quad (\text{A.19})$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad (\text{A.20})$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^2 - 3x) \quad (\text{A.21})$$

## A.2. Funciones asociadas de Legendre

Las funciones asociadas de Legendre,  $P_\ell^m(x)$ , con  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ , y  $m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell$ , se definen como las soluciones regulares para  $x \in [-1, 1]$ , convenientemente normalizadas, de la ecuación diferencial:

$$\left[ (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_\ell^m(x) = 0. \quad (\text{A.22})$$

La forma general de estas funciones es:

$$\begin{aligned} P_\ell^m(x) &= (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x) \\ &= (1-x^2)^{m/2} \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^\ell, \quad m > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(x) \quad (\text{A.24})$$

Propiedades generales de estas funciones:

1.

$$P_\ell^0(x) = P_\ell(x) \quad (\text{A.25})$$

2. Ortogonalidad y normalización:

$$\int_{-1}^1 P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'} \quad (\text{A.26})$$

3. Fórmulas de recurrencia:

$$P_\ell^{m-1}(x) = \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_\ell^m(x) - [\ell(\ell+1) - m(m-1)] P_{\ell-1}^{m-1}(x) \quad (\text{A.27})$$

$$(\ell-m+1) P_{\ell+1}^m(x) = (2\ell+1)x P_\ell^m(x) - (\ell+m) P_{\ell-1}^m(x) \quad (\text{A.28})$$

$$(2\ell+1) (1-x^2)^{1/2} P_\ell^m(x) = P_{\ell+1}^{m+1}(x) - P_{\ell-1}^{m+1}(x) \quad (\text{A.29})$$

$$(2\ell+1) (1-x^2)^{1/2} P_\ell^m(x) = (\ell+m)(\ell+m-1) P_{\ell-1}^{m-1}(x) - (\ell-m+1)(\ell-m+2) P_{\ell+1}^{m-1}(x) \quad (\text{A.30})$$

$$(\text{A.31})$$

4. Fórmula de adición:

$$P_\ell(x) = P_\ell(x_1) P_\ell(x_2) + 2 \sum_{m=1}^{\ell} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(x_1) P_\ell^m(x_2) \cos m\omega, \quad (\text{A.32})$$

donde  $x_1, x_2, x \in [-1, 1]$ , y verifican:

$$x = x_1 x_2 - \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)} \cos \omega. \quad (\text{A.33})$$

### A.3. Armónicos esféricos

Los armónicos esféricos son funciones definidas como:

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) \equiv \left[ \frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \right]^{1/2} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad m \geq 0 \quad (\text{A.34})$$

$$Y_\ell^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_\ell^{m*}(\theta, \phi) \quad m < 0,$$

donde:  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi)$ , y \* representa el complejo conjugado.

Propiedades más importantes de los armónicos esféricos:

1. Ecuación diferencial:

$$\left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + \ell(\ell + 1) \right] Y_\ell^m(\theta, \phi) = 0, \quad (\text{A.35})$$

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial \phi} + m \right] Y_\ell^m(\theta, \phi) = 0, \quad (\text{A.36})$$

2. Paridad:

$$Y_\ell^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta, \phi). \quad (\text{A.37})$$

3. Sea un vector  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ . Se definen las componentes:

$$x_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + ix_2), \quad x_0 = x_3, \quad x_{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - ix_2), \quad (\text{A.38})$$

entonces se verifica:

$$Y_1^\ell(\theta, \phi) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} x_m. \quad (\text{A.39})$$

4. Ortogonalidad y normalización:

$$\int Y_{\ell'}^{m'*}(\theta, \phi) Y_\ell^m(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (\text{A.40})$$

donde:

$$\int d\Omega \equiv \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta, \quad (\text{A.41})$$

Además, forman un sistema completo en  $\mathcal{L}^2(S_2)$ ,  $S_2 \equiv \{\mathbf{r}/r = 1\}$ , con medida  $d\Omega$ .

5. Algunas ecuaciones:

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = \delta_{m0} \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}}, \quad (\text{A.42})$$

$$\sum_m Y_\ell^{m*}(\theta, \phi) Y_\ell^m(\theta, \phi) = \frac{2\ell + 1}{4\pi}, \quad (\text{A.43})$$

$$Y_\ell^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} P_\ell(\cos \theta). \quad (\text{A.44})$$

6. Si tenemos dos direcciones en el espacio, caracterizadas por las coordenadas esféricas  $(\theta_1, \phi_1)$  y  $(\theta_2, \phi_2)$ , y  $\theta$  es el ángulo formado por estas dos direcciones, entonces:

$$P_\ell(\cos \theta) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=\ell}^{\ell} Y_\ell^{m*}(\theta_1, \phi_1) Y_\ell^m(\theta_2, \phi_2). \quad (\text{A.45})$$

7. Desarrollo de una onda plana:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^\ell j_\ell(kr) Y_\ell^{m*}(\theta_1, \phi_1) Y_\ell^m(\theta_2, \phi_2) \quad (\text{A.46})$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell + 1) j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta), \quad (\text{A.47})$$

donde  $j_\ell(kr)$  son las funciones esféricas de Bessel, y  $\theta$  el ángulo formado por los vectores  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{r}$ , con direcciones dadas, en coordenadas esféricas, por  $(\theta_1, \phi_1)$  y  $(\theta_2, \phi_2)$ , respectivamente.

8. Regla de acoplamiento de los armónicos esféricos:

$$Y_{\ell_1}^{m_1}(\theta, \phi) Y_{\ell_2}^{m_2}(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[ \frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)}{4\pi(2\ell + 1)} \right]^{1/2} \times \\ C(\ell_1 \ell_2 \ell | m_1 m_2 m) C(\ell_1 \ell_2 \ell | 000) Y_\ell^m(\theta, \phi), \quad (\text{A.48})$$

donde  $m = m_1 + m_2$ , y  $C(\ell_1 \ell_2 \ell | m_1 m_2 m)$  son los coeficientes de Clebsch-Gordan. A partir de esta ecuación, y usando la relación de ortogonalidad (A.40), obtenemos:

$$\int Y_{\ell_3}^{m_3*}(\theta, \phi) Y_{\ell_2}^{m_2}(\theta, \phi) Y_{\ell_1}^{m_1}(\theta, \phi) d\Omega = \left[ \frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)}{4\pi(2\ell + 1)} \right]^{1/2} \\ \times C(\ell_1 \ell_2 \ell | m_1 m_2 m_3) C(\ell_1 \ell_2 \ell | 000). \quad (\text{A.49})$$

# Apéndice B

## Radiación en las atmósferas estelares

Definamos brevemente las principales magnitudes relacionadas con el transporte radiativo en las atmósferas estelares. Para un estudio más detallado se pueden consultar los trabajos de Mihalas y Weibel Mihalas (1999), Mihalas (1978) y Gray (1992). Consideremos la atmósfera de una estrella esféricamente simétrica, y asumamos que es tan delgada comparada con el radio estelar, que se puede reducir a una superficie esférica de radio  $R$ .

Se define la *intensidad específica monocromática*,  $I_\lambda$ , como la energía radiada en la dirección del observador por un elemento de superficie  $R^2 d\mu' d\phi'$  ( $\mu' = \cos \theta'$ ), durante un intervalo de tiempo  $dt$ , dentro de un cono delimitado por el ángulo sólido  $d\Omega$ , y en el intervalo de longitudes de onda  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ :

$$I_\lambda(\mu') \mu' R^2 d\mu' d\phi' d\Omega dt d\lambda. \quad (\text{B.1})$$

Se define el *flujo monocromático dirigido hacia afuera*,  $F_\lambda^+$ , integrando la intensidad  $I_\lambda$  sobre media esfera:

$$F_\lambda^+ = \int_0^1 \int_0^{2\pi} I_\lambda(\mu') \mu' d\mu' d\phi'. \quad (\text{B.2})$$

Cuando la atmósfera es esféricamente simétrica,  $F_\lambda^+$  puede tomar dos significados físicos diferentes:

1. Desde el punto de vista de un observador distante,  $F_\lambda^+$  es tal que:

$$(R^2/r_0^2) F_\lambda^+ dS dt d\lambda \quad (\text{B.3})$$

es la cantidad de energía radiada por toda la estrella que atraviesa un elemento de superficie  $dS$  situado a una distancia  $r_0$  de la misma, durante un intervalo de tiempo  $dt$ , en el intervalo de longitudes de onda  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ .

2. Desde el punto de vista de un elemento de la superficie estelar,  $F_\lambda^+$  es tal que:

$$F_\lambda^+ dS dt d\lambda \quad (\text{B.4})$$

es la cantidad de energía que proviene del interior estelar, y que atraviesa un elemento de área  $dS$  de la superficie estelar, durante el intervalo de tiempo  $dt$ , en el intervalo de longitudes de onda  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$  (los fotones que provienen del exterior no se tienen en cuenta en este balance de energía).

Cuando se consideran estrellas que pulsan con modos no radiales o que roten, ya no se tiene simetría esférica, de manera que los dos puntos de vista anteriores conducen a magnitudes diferentes. En este caso más general, el primer punto de vista (el de un observador distante) se denota mediante  $E(\lambda, t)$ , mientras que  $F_\lambda^+(\theta', \phi', t)$  representa al flujo dirigido hacia el exterior correspondiente al segundo punto de vista (el de un elemento local situado en la superficie estelar).

Se define la *función de “limb-darkening” normalizada*:

$$h_\lambda(\mu') = \frac{2\pi I_\lambda(\mu')}{F_\lambda^+}. \quad (\text{B.5})$$

A partir de las ecuaciones (B.1) y (B.2) se deduce:

$$\int_0^1 h_\lambda(\mu') \mu' d\mu' = 1. \quad (\text{B.6})$$

En condiciones normales, esta función disminuye desde el centro hacia la periferia del disco estelar debido a dos efectos. En primer lugar, cuando se observa la atmósfera desde una dirección oblicua no se ven capas tan profundas como cuando se observa desde una dirección perpendicular. Por otro lado, dado que la temperatura aumenta con la profundidad óptica, hacia el centro se observan capas más calientes, e  $I_\lambda$  aumenta.

# Bibliografía

- Aerts, C.: 1996, *A&A* **314**, 115
- Aizenman, M. L. y Smeyers, P.: 1977, *Ap&SS* **48**, 123
- Alania, I. F.: 1954, *Astr. Circ.* **146**, 114
- Alcock, C., Allsman, R. A., Alves, D. R., Axelrod, T. S., Becker, A. C., Bennett, D. P., Cook, K. H., Freeman, K. C., Geha, M., Griest, K., Lehner, M. J., Marshall, S. L., McNamara, B. J., Minniti, D., Nelson, C., Peterson, B. A., Popowski, P., Pratt, M. R., Quinn, P. J., Rodgers, A. W., Sutherland, W., Templeton, M. R., Vandehei, T., y Welch, D. L.: 2000, *ApJ* **536**, 798
- Ando, H. y Osaki, Y.: 1975, *PASJ* **27**, 581
- Babcock, H. W.: 1949, *The Observatory* **69**, 191
- Baglin, A., Auvergne, M., Valtier, J. C., y Saez, M. (eds.): 1980, *Delta Scuti stars - Observational and theoretical aspects*
- Baglin, A., Breger, M., Chevalier, C., Hauck, B., Le Contel, J. M., Sareyan, J. P., y Valtier, J. C.: 1973, *A&A* **23**, 221
- Baglin, A. y The COROT Team: 1998, in *IAU Symp. 185: New Eyes to See Inside the Sun and Stars*, p. 301
- Balázs, J.: 1956, *Communcations of the Konkoly Observatory Hungary* **40**, 8
- Balona, L. A.: 1986, *MNRAS* **219**, 111
- Barban, C., Goupil, M. J., Van't Veer-Menneret, C., Garrido, R., Kupka, F., y Heiter, U.: 2003, *A&A* **405**, 1095
- Belmonte, J. A., Jones, A. R., Palle, P. L., y Roca Cortes, T.: 1990a, *ApJ* **358**, 595
- Belmonte, J. A., Perez Hernandez, F., y Roca Cortes, T.: 1990b, *A&A* **231**, 383
- Berthomieu, G., Provost, J., Rocca, A., Cooper, A. J., Gough, D. O., y Osaki, Y.: 1980, *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag* **125**, 307
- Bessell, M. S.: 1969, *ApJS* **18**, 195
- Böhm, K. H.: 1958, *Zeitschrift fur Astrophysics* **46**, 245
- Bouchy, F. y Carrier, F.: 2002, *A&A* **390**, 205

- Breger, M.: 1966, *ApJ* **146**, 958
- Breger, M.: 1969, *ApJS* **19**, 79
- Breger, M.: 1972, *ApJ* **171**, 539
- Breger, M.: 1979, *PASP* **91**, 5
- Breger, M.: 1980, *ApJ* **235**, 153
- Breger, M.: 1991, *A&A* **250**, 107
- Breger, M.: 1995, in *ASP Conf. Ser. 83: IAU Colloq. 155: Astrophysical Applications of Stellar Pulsation*, p. 70
- Breger, M., Lenz, P., Antoci, V., Guggenberger, E., Shobbrook, R. R., Handler, G., Ngwato, B., Rodler, F., Rodríguez, E., López de Coca, P., Rolland, A., y Costa, V.: 2005, *A&A* **435**, 955
- Breger, M., Zima, W., Handler, G., Poretti, E., Shobbrook, R. R., Nitta, A., Prouton, O. R., Garrido, R., Rodríguez, E., y Thomassen, T.: 1998, *A&A* **331**, 271
- Brogia, P. y Pestarino, E.: 1955, *Memorie della Societa Astronomica Italiana* **26**, 429
- Brookes, J. R., Isaak, G. R., y van der Raay, H. B.: 1978, *MNRAS* **185**, 1
- Buzasi, D. L., Bruntt, H., Bedding, T. R., Retter, A., Kjeldsen, H., Preston, H. L., Mandeville, W. J., Suarez, J. C., Catanzarite, J., Conrow, T., y Laher, R.: 2005, *ApJ* **619**, 1072
- Cabot, W., Hubickyj, O., Pollack, J. B., Cassen, P., y Canuto, V. M.: 1990, *Geophys. Ap. Fluid Dyn.* **53**, 1
- Campbell, W. W. y Wright, W. H.: 1900, *ApJ* **12**, 254
- Canuto, V. M., Goldman, I., y Mazzitelli, I.: 1996, *ApJ* **473**, 550
- Canuto, V. M. y Mazzitelli, I.: 1991, *ApJ* **370**, 295
- Carrier, F., Eggenberger, P., y Bouchy, F.: 2005, *A&A* **434**, 1085
- Casas, R., Suárez, J. C., Moya, A., y Garrido, R.: 2006, *A&A* submitted
- Chan, K. L. y Sofia, S.: 1989, *ApJ* **336**, 1022
- Charbonneau, P.: 1993, *ApJ* **405**, 720
- Chevalier, C.: 1971, *A&A* **14**, 24
- Christensen-Dalsgaard, J.: 1978, *Solar Oscillations - PhD Dissertation*, University of Cambridge [1978]
- Christensen-Dalsgaard, J.: 1982, *MNRAS* **199**, 735

- Christensen-Dalsgaard, J.: 1991, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **62**, 123
- Christensen-Dalsgaard, J.: 1998, *Lecture notes on Stellar Oscillations*, Institut for Fysik og Astronomi, Aarhus Universitet
- Christensen-Dalsgaard, J., Duvall, T. L., Gough, D. O., Harvey, J. W., y Rhodes, E. J.: 1985, *Nature* **315**, 378
- Christensen-Dalsgaard, J. y Frandsen, S.: 1983, *SoPh* **82**, 165
- Christensen-Dalsgaard, J., Gough, D. O., y Thompson, M. J.: 1991, *ApJ* **378**, 413
- Claverie, A., Isaak, G. R., McLeod, C. P., van der Raay, H. B., y Cortes, T. R.: 1979, *Nature* **282**, 591
- Cowling, T. G.: 1941, *MNRAS* **101**, 367
- Cox, A., Hodson, S. W., y King, D. S.: 1979, *ApJ* **228**, 870
- Cox, J. P.: 1980, *Theory of stellar pulsation*, Research supported by the National Science Foundation Princeton, NJ, Princeton University Press, 1980. 393 p.
- Cox, J. P. y Giuli, R. T.: 1968, *Principles of stellar structure*, New York, Gordon and Breach [1968]
- Cugier, H. y Daszyńska, J.: 2001, *A&A* **377**, 113
- Danziger, I. J. y Dickens, R. J.: 1967, *ApJ* **149**, 55
- Daszyńska-Daszkiewicz, J., Dziembowski, W. A., Pamyatnykh, A. A., y Goupil, M. J.: 2002, *A&A* **392**, 151
- Detre, L.: 1937, *Astronomische Nachrichten* **262**, 81
- Detre, L.: 1956, *Communcations of the Konkoly Observatory Hungary* **40**, 1
- Deubner, F. L.: 1975, *A&A* **44**, 371
- Deubner, F. L.: 1977, in *IAU Colloq. 36: The Energy Balance and Hydrodynamics of the Solar Chromosphere and Corona*, p. 45
- Dupret, M. A.: 2002, *Nonradial nonadiabatic oscillation of near main sequence variable stars*, Ph.D. Thesis, Univ. Liège
- Dupret, M. A., De Ridder, J., De Cat, P., Aerts, C., Scuflaire, R., Noels, A., y Thoul, A.: 2003, *A&A* **398**, 677
- Dupret, M. A., De Ridder, J., Neuforge, C., Aerts, C., y Scuflaire, R.: 2002, *A&A* **385**, 563
- Dupret, M. A., Grigahcène, A., Garrido, R., De Ridder, J., Scuflaire, R., y Gabriel, M.: 2005a, *MNRAS* **361**, 476

- Dupret, M. A., Grigahcène, A., Garrido, R., Gabriel, M., y Scuflaire, R.: 2004, *A&A* **414**, L17
- Dupret, M. A., Grigahcène, A., Garrido, R., Gabriel, M., y Scuflaire, R.: 2005b, *A&A* **435**, 927
- Duvall, T. L. y Harvey, J. W.: 1983, *Nature* **302**, 24
- Duvall, T. L. y Harvey, J. W.: 1984, *Nature* **310**, 19
- Dziembowski, W. y Krolikowska, M.: 1985, *Acta Astronomica* **35**, 5
- Dziembowski, W. y Krolikowska, M.: 1990, *Acta Astronomica* **40**, 19
- Dziembowski, W. A.: 1971, *Acta Astronomica* **21**, 289
- Dziembowski, W. A.: 1977, *Acta Astronomica* **27**, 95
- Dziembowski, W. A. y Goode, P. R.: 1992, *ApJ* **394**, 670
- Dziembowski, W. A. y Jerzykiewicz, M.: 1996, *A&A* **306**, 436
- Eckart, C.: 1960, *Hydrodynamics of Oceans an Atmospheres*, Pergamon Press [1960]
- Eddington, A. S.: 1918, *MNRAS* **79**, 2
- Eddington, A. S.: 1919, *MNRAS* **79**, 177
- Eggen, O. J.: 1956a, *PASP* **68**, 238
- Eggen, O. J.: 1956b, *PASP* **68**, 541
- ESA: 1997, *The Hipparcos and Tycho Catalogues*. ESA, SP-1200
- Faraggiana, R. y Bonifacio, P.: 1999, *A&A* **349**, 521
- Faraggiana, R., Gerbaldi, M., y Burnage, R.: 1997, *A&A* **318**, L21
- Fernley, J. A., Jameson, R. F., Sherrington, M. R., y Skillen, I.: 1987, *MNRAS* **225**, 451
- Fitch, W. S. y Szeidl, B.: 1976, *ApJ* **203**, 616
- Frandsen, S.: 1998, in *ASP Conf. Ser. 135: A Half Century of Stellar Pulsation Interpretation*, p. 490
- Frandsen, S., Balona, L. A., Viskum, M., Koen, C., y Kjeldsen, H.: 1996, *A&A* **308**, 132
- Galindo, A. y Pascual, P.: 1989, *Mecánica Cuántica*, Ediciones de la Universidad Complutense de Madrid (EUDEMA S. A.)
- Garrido, R.: 2000, in *ASP Conf. Ser. 210: Delta Scuti and Related Stars*, pp 67–98
- Garrido, R., García-Lobo, E., y Rodríguez, E.: 1990, *A&A* **234**, 262

- Georgobiani, D., Zhao, J., Benson, D., Stein, R. F., Kosovichev, A. G., y Nordlund, A.: 2005, *AGU Fall Meeting Abstracts* p. A1117
- Gies, D. R. y Percy, J. R.: 1977, *AJ* **82**, 166
- Gilliland, R. L., Brown, T. M., Kjeldsen, H., McCarthy, J. K., Peri, M. L., Belmonte, J. A., Vidal, I., Cram, L. E., Palmer, J., Frandsen, S., Parthasarathy, M., Petro, L., Schneider, H., Stetson, P. B., y Weiss, W. W.: 1993, *AJ* **106**, 2441
- Gough, D.: 1977, in *IAU Colloq. 36: The Energy Balance and Hydrodynamics of the Solar Chromosphere and Corona*, p. 3
- Gough, D. O.: 1984, *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A* **313**, 27
- Gough, D. O.: 1986, in *Hydrodynamic and Magnetodynamic Problems in the Sun and Stars*, p. 117
- Gough, D. O. y Thompson, M. J.: 1990, *MNRAS* **242**, 25
- Goupil, M. J., Dziembowski, W. A., Pamyatnykh, A. A., y Talon, S.: 2000, in *ASP Conf. Ser. 210: Delta Scuti and Related Stars*, p. 267
- Gray, D. F.: 1992, *The observation and analysis of stellar photospheres (2nd edition)*, Cambridge University Press
- Gray, R. O. y Corbally, C. J.: 2002, *AJ* **124**, 989
- Grec, G., Fossat, E., y Pomerantz, M.: 1980, *Nature* **288**, 541
- Grigahcène, A., Dupret, M. A., Gabriel, M., Garrido, R., y Scuflaire, R.: 2005, *A&A* **434**, 1055
- Grigahcène, A., Dupret, M. A., Garrido, R., Gabriel, M., y Scuflaire, R.: 2004, *Communications in Asteroseismology* **145**, 10
- Guenther, D. B.: 1991, *ApJ* **375**, 352
- Guriev, N. I.: 1938, *Tadjik Circ.* 38
- Handler, G. y Paunzen, E.: 1995, *Delta Scuti Star Newsletter* **9**, 6
- Heger, A., Langer, N., y Woosley, S. E.: 2000, *ApJ* **528**, 368
- Heiter, U., Kupka, F., Paunzen, E., Weiss, W. W., y Gelbmann, M.: 1998, *A&A* **335**, 1009
- Heiter, U., Kupka, F., van't Veer-Menneret, C., Barban, C., Weiss, W. W., Goupil, M. J., Schmidt, W., Katz, D., y Garrido, R.: 2002, *A&A* **392**, 619
- Hester, J. J., Scowen, P. A., Sankrit, R., Lauer, T. R., Ajhar, E. A., Baum, W. A., Code, A., Currie, D. G., Danielson, G. E., Ewald, S. P., Faber, S. M., Grillmair, C. J., Groth, E. J., Holtzman, J. A., Hunter, D. A., Kristian, J., Light, R. M., Lynds, C. R., Monet, D. G., O'Neil, E. J., Shaya, E. J., Seidelmann, K. P., y Westphal, J. A.: 1996, *AJ* **111**, 2349

- Hillenbrand, L. A., Massey, P., Strom, S. E., y Merrill, K. M.: 1993, *AJ* **106**, 1906
- Hoffmeister, C.: 1934, *Astronomische Nachrichten* **253**, 195
- Houdek, G., Rogl, J., Balmforth, N. J., y Christensen-Dalsgaard, J.: 1995, in *ASP Conf. Ser. 76: GONG 1994. Helio- and Astro-Seismology from the Earth and Space*, p. 641
- Johnstone, D., Hollenbach, D., y Bally, J.: 1998, *ApJ* **499**, 758
- Jorgensen, H. E., Johansen, K. T., y Olsen, E. H.: 1971, *A&A* **12**, 223
- Kawaler, S. D.: 1993, *ApJ* **404**, 294
- Kawaler, S. D., Winget, D. E., Hansen, C. J., y Iben, I.: 1986, *ApJ* **306**, L41
- Kennelly, E. J., Brown, T. M., Kotak, R., Sigut, T. A. A., Horner, S. D., Korzennik, S. G., Nisenson, P., Noyes, R. W., Walker, A., y Yang, S.: 1998, *ApJ* **495**, 440
- Kennelly, E. J. y Walker, G. A. H.: 1996, *PASP* **108**, 327
- Kholopov, P., Samus, N., Durlevich, O. V., Kazarovets, E. V., Kireeva, N., y Tsvetkova, T. M.: 1992, *Bulletin d'Information du Centre de Donnees Stellaires* **40**, 15
- Kippenhahn, R. y Weigert, A.: 1990, *Stellar Structure and Evolution*, Stellar Structure and Evolution, XVI, 468 pp. 192 figs. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Also Astronomy and Astrophysics Library
- Kjeldsen, H., Bedding, T. R., Viskum, M., y Frandsen, S.: 1995, *AJ* **109**, 1313
- Koen, C., O'Donoghue, D., Kilkeny, D., Lynas-Gray, A. E., Marang, F., y van Wyk, F.: 1998, *MNRAS* **296**, 317
- Kovács, G.: 2000, *A&A* **363**, L1
- Kraichnan, R. H.: 1964, *Phys. Fluids* **7**, 1030
- Kukarkin, B. V.: 1969, *General Catalogue of Variable Stars*, Moskva: Akad. Nauk, Moscow State University, Sternberg State Astronomical Institute, 1969, 3rd ed.
- Kupka, F. y Montgomery, M. H.: 2002, *MNRAS* **330**, L6
- Kurtz, D. W.: 1990, *ARA&A* **28**, 607
- Kurtz, D. W., Garrison, R. F., Koen, C., Hofmann, G. F., y Viranna, N. B.: 1995, *MNRAS* **276**, 199
- Kurtz, D. W., Martinez, P., van Wyk, F., Marang, F., y Roberts, G.: 1994, *MNRAS* **268**, 641
- Kurtz, D. W., Shibahashi, H., y Goode, P. R.: 1990, *MNRAS* **247**, 558
- Kurtz, D. W., van Wyk, F., Roberts, G., Marang, F., Handler, G., Medupe, R., y Kilkeny, D.: 1997, *MNRAS* **287**, 69

- Kurucz, R.: 1993, *ATLAS9 Stellar Atmosphere Programs and 2 km/s grid. Kurucz CD-ROM No. 13. Cambridge, Mass.: Smithsonian Astrophysical Observatory, 1993.* 13
- Kurucz, R. L.: 1998, in *IAU Symp. 189: Fundamental Stellar Properties*, pp 217–226
- Kusakin, A. V. y Mkrtichian, D. E.: 1996, *Information Bulletin on Variable Stars* **4314**, 1
- Landolt, A. U.: 1968, *ApJ* **153**, 151
- Lange, G. A.: 1935, *Tadjik Circ.* 4
- Ledoux, P. y Walraven, T.: 1958, *Handbuch der Physik* **51**, 353
- Lee, U.: 1985, *PASJ* **37**, 279
- Leighton, R. B., Noyes, R. W., y Simon, G. W.: 1962, *ApJ* **135**, 474
- Leslie, D. C.: 1973, *Reports of Progress in Physics* **36**, 1365
- Löffler, W.: 2003, in *Asteroseismology Across the HR Diagram*, pp 529–532
- Maeder, A. y Meynet, G.: 2000, *ARA&A* **38**, 143
- Mantegazza, L., Poretti, E., y Bossi, M.: 1996, *A&A* **308**, 847
- Marchetti, E., Faraggiana, R., y Bonifacio, P.: 2001, *A&A* **370**, 524
- McNamara, D. H.: 1985, *PASP* **97**, 715
- McNamara, D. H. y Feltz, K. A.: 1978, *PASP* **90**, 275
- Michaud, G. y Charland, Y.: 1986, *ApJ* **311**, 326
- Michel, E., Chevreton, M., Goupil, M. J., y et al.: 1995, in *Helioseismology. ESA SP, Proceedings of the 4th Soho Workshop, held Pacific Grove, California, USA, 2-6 April 1995, Paris: European Space Agency (ESA), —c1995, edited by J.T. Hoeksema, V. Domingo, B. Fleck, and Bruce Battrick, Poster Session, p.533*, p. 533P
- Michel, E., Hernández, M. M., Houdek, G., Goupil, M. J., Lebreton, Y., Pérez Hernández, F., Baglin, A., Belmonte, J. A., y Soufi, F.: 1999, *A&A* **342**, 153
- Mihalas, D.: 1978, *Stellar atmospheres (2nd edition)*, San Francisco, W. H. Freeman and Co., 1978. 650 p.
- Mihalas, D. y Weibel Mihalas, B.: 1999, *Foundations of Radiation Hydrodynamics*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York
- Millis, R. L.: 1967, *PASP* **79**, 262
- Morel, P.: 1997, *A&AS* **124**, 597

- Morgan, W. W., Keenan, P. C., y Kellman, E.: 1943, *An atlas of stellar spectra, with an outline of spectral classification*, Chicago, Ill., The University of Chicago press [1943]
- Moya, A., Garrido, R., y Dupret, M. A.: 2004a, in *ESA SP-538: Stellar Structure and Habitable Planet Finding*, pp 365–368
- Moya, A., Garrido, R., y Dupret, M. A.: 2004b, *A&A* **414**, 1081
- Moya, A., Garrido, R., y Dupret, M. A.: 2004c, in *ASP Conf. Ser. 310: IAU Colloq. 193: Variable Stars in the Local Group*, p. 271
- Orszag, S. A.: 1977, in *Fluid Dynamics, Les Houches Summer School of Theoretical Physics*, p. 237
- Osaki, J.: 1975, *PASJ* **27**, 237
- Osaki, Y. y Hansen, C. J.: 1973, *ApJ* **185**, 277
- Palle, P.: 1997, in *IAU Symp. 181: Sounding Solar and Stellar Interiors*, p. 15
- Pamyatnykh, A. A.: 2003, *Ap&SS* **284**, 97
- Paunzen, E. y Gray, R. O.: 1997, *A&AS* **126**, 407
- Paunzen, E. y Handler, G.: 1996, *Information Bulletin on Variable Stars* **4318**, 1
- Paunzen, E., Weiss, W. W., Heiter, U., y North, P.: 1997, *A&AS* **123**, 93
- Paunzen, E., Weiss, W. W., Kuschnig, R., Handler, G., Strassmeier, K. G., North, P., Solano, E., Gelbmann, M., Kuenzli, M., y Garrido, R.: 1998, *A&A* **335**, 533
- Pekeris, C. L.: 1938, *ApJ* **88**, 189
- Pérez Hernández, F., Claret, A., y Belmonte, J. A.: 1995, *A&A* **295**, 113
- Pérez Hernández, F., Claret, A., Hernández, M. M., y Michel, E.: 1999, *A&A* **346**, 586
- Pesnell, W. D.: 1990, *ApJ* **363**, 227
- Petersen, J. O.: 1973, *A&A* **27**, 89
- Petersen, J. O.: 1976, in *ASSL Vol. 60: IAU Colloq. 29: Multiple Periodic Variable Stars*, p. 195
- Petersen, J. O.: 1978, *A&A* **62**, 205
- Petersen, J. O. y Christensen-Dalsgaard, J.: 1996, *A&A* **312**, 463
- Petersen, J. O. y Christensen-Dalsgaard, J.: 1999, *A&A* **352**, 547
- Pócs, M. D. y Szeidl, B.: 2001, *A&A* **368**, 880
- Pojmanski, G.: 2002, *Acta Astronomica* **52**, 397

- Pojmanski, G.: 2003, *Acta Astronomica* **53**, 341
- Rhodes, E. J., Ulrich, R. K., y Simon, G. W.: 1977, *ApJ* **218**, 901
- Richter, G., Wenzel, W., y Hoffmeister, C.: 1985, *Variable stars*, Berlin and New York, Springer-Verlag, 1985, 339 p. Translation.
- Rodríguez, E.: 2005, *Comunicación Privada*
- Rodríguez, E. y Breger, M.: 2001, *A&A* **366**, 178
- Rodríguez, E., Costa, V., Handler, G., y García, J. M.: 2003, *A&A* **399**, 253
- Rodríguez, E., López-González, M. J., y López de Coca, P.: 2000, *A&AS* **144**, 469
- Rodríguez, E., López de Coca, P., Rolland, A., Garrido, R., y Costa, V.: 1994, *A&AS* **106**, 21
- Rodríguez, E., Rolland, A., López de Coca, P., García-Lobo, E., y Sedano, J. L.: 1992, *A&AS* **93**, 189
- Rodríguez, E., Rolland, A., López de Coca, P., y Martín, S.: 1996, *A&A* **307**, 539
- Rolland, A., Hobart, M. A., Costa, V., Rodríguez, E., Olivares, I., López de Coca, P., y García-Pelayo, J. M.: 2002, in *ESA SP-485: Stellar Structure and Habitable Planet Finding*, pp 333–335
- Saio, H.: 1981, *ApJ* **244**, 299
- Saio, H. y Cox, J. P.: 1980, *ApJ* **236**, 549
- Schatzman, E. L.: 1958, *White dwarfs*, Amsterdam, North-Holland Pub. Co.; New York, Interscience Publishers, 1958.
- Schou, J., Christensen-Dalsgaard, J., y Thompson, M. J.: 1992, *ApJ* **385**, L59
- Schrijvers, C., Telting, J. H., Aerts, C., Ruymaekers, E., y Henrichs, H. F.: 1997, *A&AS* **121**, 343
- Scufflaire, R.: 1974, *A&A* **36**, 107
- Shapley, H.: 1914, *ApJ* **40**, 448
- Shibahashi, H.: 1987, *LNP Vol. 274: Stellar Pulsation* **274**, 112
- Shibahashi, H. y Osaki, Y.: 1981, *PASJ* **33**, 427
- Shobbrook, R. R. y Stobie, R. S.: 1974, *MNRAS* **169**, 643
- SIMBAD: 2005, *SIMBAD Database, CDS, Strasbourg, France*
- Smalley, B., Gardiner, R. B., Kupka, F., y Bessell, M. S.: 2002, *A&A* **395**, 601
- Smalley, B. y Kupka, F.: 1997, *A&A* **328**, 349
- Smith, H. J.: 1955, *AJ* **60**, 179

- Soloviev, V. A. y Shakhovskoj, N. M.: 1958, *Tadjik Trudy* **7**, 45
- Soufi, F., Goupil, M. J., y Dziembowski, W. A.: 1998, *A&A* **334**, 911
- Stellingwerf, R. F.: 1979, *ApJ* **227**, 935
- Stibbs, D. W.: 1950, *MNRAS* **110**, 395
- Suárez, J. C., Garrido, R., y Goupil, M. J.: 2006, *A&A* **447**, 649
- Suárez, J. C.: 2002, *Ph.D. Thesis*
- Suárez, J. C., Bruntt, H., y Buzasi, D.: 2005, *A&A* **438**, 633
- Suárez, J. C., Goupil, M. J., y Morel, P.: 2006, *A&A* in press
- Szymanski, M. K.: 2005, *Acta Astronomica* **55**, 43
- Tassoul, J. L.: 1978, *Theory of rotating stars*, Princeton Series in Astrophysics, Princeton: University Press, 1978
- Telting, J. H., Aerts, C., y Mathias, P.: 1997, *A&A* **322**, 493
- Throop, H. B., Bally, J., Esposito, L. W., y McCaughrean, M. J.: 2001, *Science* **292**, 1686
- Toutain, T.: 1997, in *IAU Symp. 181: Sounding Solar and Stellar Interiors*, p. 39
- Townsend, R. H. D.: 2002, *MNRAS* **330**, 855
- Turcotte, S. y Charbonneau, P.: 1993, *ApJ* **413**, 376
- Udalski, A., Kubiak, M., y Szymanski, M.: 1997, *Acta Astronomica* **47**, 319
- Ulrich, R. K.: 1970, *ApJ* **162**, 993
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., y Shibahashi, H.: 1989, *Nonradial oscillations of stars*, Nonradial oscillations of stars, Tokyo: University of Tokyo Press, 1989, 2nd ed.
- van Leeuwen, F., Evans, D. W., Grenon, M., Grossmann, V., Mignard, F., y Perryman, M. A. C.: 1997, *A&A* **323**, L61
- Vauclair, C.: 1997, in *IAU Symp. 181: Sounding Solar and Stellar Interiors*, p. 367
- Venn, K. A. y Lambert, D. L.: 1990, *ApJ* **363**, 234
- Viskum, M., Kjeldsen, H., Bedding, T. R., dall, T. H., Baldry, I. K., Bruntt, H., y Frandsen, S.: 1998, *A&A* **335**, 549
- Vitense, E.: 1953, *Zeitschrift fur Astrophysics* **32**, 135
- Walraven, T., Walraven, J., y Balona, L. A.: 1992, *MNRAS* **254**, 59
- Watson, R. D.: 1988, *Ap&SS* **140**, 255

- Winget, D. E.: 1993, in *ASP Conf. Ser. 42: GONG 1992. Seismic Investigation of the Sun and Stars*, p. 331
- Winzer, J. E.: 1974, *Ph.D. Thesis, Univ. Toronto*
- Wolff, S. C.: 1983, *The A-stars: Problems and perspectives. Monograph series on nonthermal phenomena in stellar atmospheres*, The A-stars: Problems and perspectives. Monograph series on nonthermal phenomena in stellar atmospheres
- Woźniak, P. R., Vestrand, W. T., Akerlof, C. W., Balsano, R., Bloch, J., Casperson, D., Fletcher, S., Gisler, G., Kehoe, R., Kinemuchi, K., Lee, B. C., Marshall, S., McGowan, K. E., McKay, T. A., Rykoff, E. S., Smith, D. A., Szymanski, J., y Wren, J.: 2004, *AJ* **127**, 2436
- Yakhot, V. y Orszag, S. A.: 1986, *J. Sci. Computing* **1**, 1
- Zahn, J. P.: 1992, *A&A* **265**, 115
- Zhevakin, S. A.: 1953, *Russian A. J.* **30**, 161